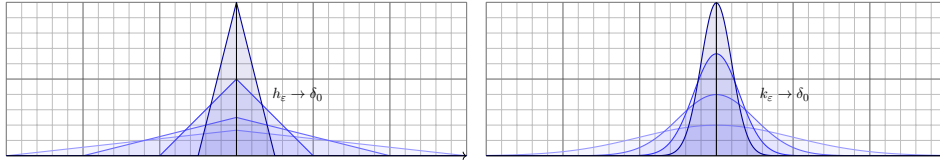


Kapitel D

Integrale und Grenzwerte



Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.

Richard Feynman (1918–1988), *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (1985)

Inhalt dieses Kapitels D

- 1 Vertauschen von Integral und Reihe
 - Absolute Konvergenz in L^1
 - Integration von Potenzreihen
- 2 Vertauschen von Integral und Limes
 - Punktweise Konvergenz
 - Majorisierte Konvergenz
- 3 Vertauschen von Integral und Ableitung
 - Kompakte Integrationsbereiche
 - Beliebige Integrationsbereiche
- 4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - Warnende Beispiele zur Vertauschung
 - Berechnung von Integralen und Reihen
- 5 Kalkül der Distributionen
 - Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
 - Distributionen und ihre Rechenregeln

Wann vertauschen Integral und Limes?

Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x) dx \right] ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\Omega} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right] dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x) dx \right] ?$$

Ableitung des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_Y f(x, y) dy \right] ?$$

😊 Diese Rechentechniken sind oft hilfreich. Die wollen Sie nutzen.

😞 Die Gleichungen gelten nicht immer! Das müssen Sie wissen.

😊 Es gibt einfache Kriterien. Die sollen Sie beherrschen.

Das zentrale Kriterium ist die majorisierte Integrierbarkeit.

Vorgehensweise

In Rechnungen möchten Sie oft Integral und Grenzwert vertauschen. In Anwendungen treten diese Umformungen häufig auf. Leider werden sie oft blind oder nach Gefühl angewendet, oder gar so getan, als gälten sie einfach immer. Das ist nicht richtig, wie wir an Beispielen sehen.

Die Gleichungen gelten aber doch häufig genug, um nützlich zu sein, und zahlreiche Anwendungen illustrieren die Kraft dieser Methoden. Zur korrekten Verwendung benötigen Sie also geeignete Kriterien!

Wir wollen daher in diesem Kapitel die Voraussetzungen erläutern und die ersehnten Rechenregeln ableiten. Als Mahnung zur Sorgfalt illustrieren einfache Gegenbeispiele, wann die Formeln nicht gelten.

Als erste Warnung nenne ich folgenden beliebten Finanztrick:

Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle.

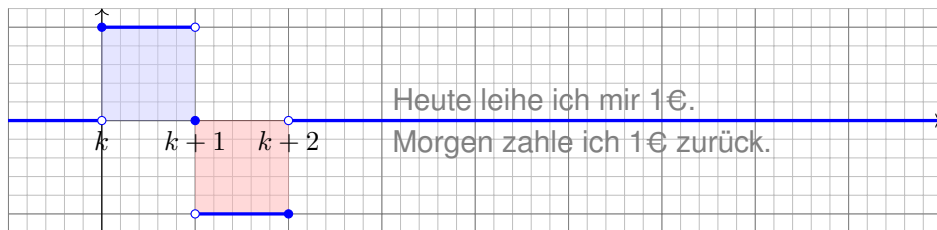
Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle.

Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück. . . dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

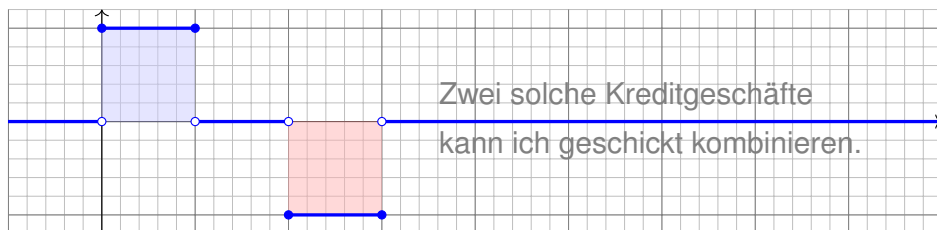
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben.

Vor dieser Methode möchte ich hier ausdrücklich warnen!

Kredit und Tilgung: Skizzieren Sie $f_k = \mathbf{I}_{[k, k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2]}$ für $k \in \mathbb{N}$.

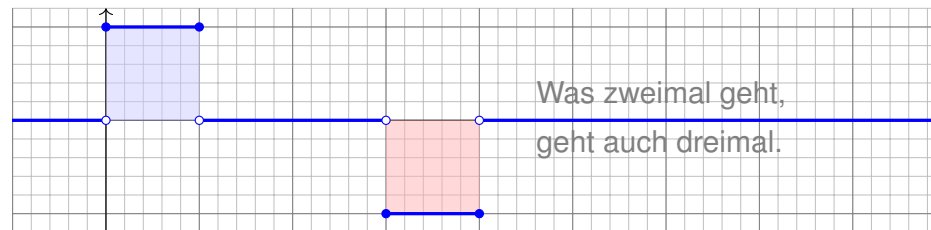


Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0$.

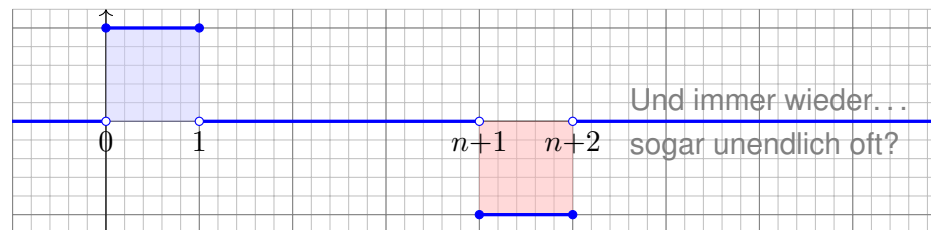


Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \rightarrow \infty$?

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx$$

Lösung: (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right] = 0$$

(b) Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1, n+2]}(x) \rightarrow \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \rightarrow \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \implies \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx = 1$$

☹️ Integral und Reihe vertauschen im Allgemeinen nicht!
Dies ist ein sehr einfaches, doch frappierendes Beispiel:
Für die Funktionen $f_k = \mathbf{I}_{[k, k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2]}$ gilt

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx \neq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x) dx \right].$$

Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

⚠️ Im Kreditbeispiel: Wir leihen uns Geld, das wir nie zurückzahlen. Wir vertrösten immer auf morgen, doch lösen das Versprechen nie ein. (Schneeballsystem, Ponzi-Betrug, „robbing Peter to pay Paul“)

⚠️ In den meisten Anwendungen sollte diese Pathologie nicht auftreten. Wir müssen dazu die Erhaltung der Masse explizit sicherstellen, gegebenenfalls separat nachweisen oder ausdrücklich fordern.

😊 Mathematisch garantieren wir dies durch Fubini D1A oder allgemeiner den Satz von der majorisierten Konvergenz D2D. Damit lässt sich das Problem präzise benennen und lösen.

Aufgabe: Zeigen Sie $\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k$ für $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$.

Lösung: Dank Linearität des Integrals gilt für endliche Summen:

$$I_n := \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k$$

Dank $f_k \geq 0$ gilt monotone Konvergenz $\sum_{k=0}^n f_k \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, also

$$I_n = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k \nearrow \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k =: A.$$

Aus $\int_{\Omega} f_k \geq 0$ folgt ebenso die monotone Konvergenz der Reihe

$$I_n = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k =: B.$$

Die Folge I_n kann nur einen Grenzwert haben! Wir folgern $A = B$:

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k$$

😊 Alles wird gut! Dies wollen wir nun als Satz zusammenfassen.

Satz D1A: Fubini für absolut konvergente Reihen

Sei $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ in fast allen Punkten $x \in \Omega$ absolut konvergent, zudem über Ω absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k.$$

☺ Beachten Sie die Parallele: Der Satz C1E von Fubini besagt dasselbe für Integrale.

Beweis: Die erste Gleichung haben wir gezeigt. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| = +\infty$ bilden eine Nullmenge N . Für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$, und wir definieren $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ durch diese absolut konvergente Reihe. Für $x \in N$ setzen wir $f(x) = 0$. Die zweite Gleichung gilt für $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$. Sie folgt für reelle Funktionen durch Zerlegung $f_k = f_k^+ - f_k^-$, und sodann für komplexe Funktionen durch Zerlegung $f_k = \text{Re } f_k + i \text{Im } f_k$.

Aufgabe: Gegeben sei eine konvergente Potenzreihe

$$f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(1) Entwickeln Sie $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dx$ ebenso als Potenzreihe.

(2) Konkretes Beispiel: Entwickeln und integrieren Sie $f(x) = e^{-x^2}$.

Lösung: (1) Dank D1A dürfen wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{t=0}^x f(t) dt = \int_{t=0}^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right] dt \stackrel{\text{D1A}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{t=0}^x a_k t^k dt \right] \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

😊 Die Vertauschung gilt hier dank absoluter Konvergenz auf $[0, x]$.

😊 Probe durch termweises ableiten. (2) Konkretes Beispiel: [B145](#)

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \stackrel{(1)}{\implies} F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x) dx \right]$$

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz! [A309](#)
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$, [D106](#)
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$. [D107](#)

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. [D429](#)

Im obigen Gegenbeispiel gilt $\sum \int f_k \neq \int \sum f_k$. Die Konvergenz ist hier nicht monoton, denn f_k hat einen positiven und einen negativen Teil. Zudem gilt $\sum \int |f_k| = \int \sum |f_n| = \infty$. Unsere einfachen Kriterien sind hier demnach nicht anwendbar und lassen keinen Schluss zu. Wir haben daher $\sum \int f_k$ und $\int \sum f_k$ getrennt ausgerechnet, um explizit vergleichen zu können: Bemerkenswerterweise gilt $\sum_{k=0}^{\infty} (\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx) = 0$, aber $\int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)) dx = 1$. Konkrete Gegen/Beispiele wie diese sind lehrreich. Rechnen reinigt die Seele! Sätze klären und ordnen Phänomene und liefern universelle Werkzeuge.

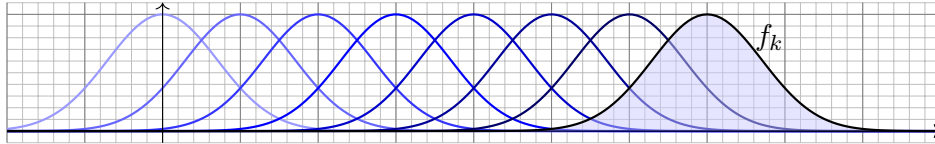
Definition D2A: punktweise Konvergenz

Wir sagen, die Funktionenfolge $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ **konvergiert punktweise** gegen die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für jedes $x \in \Omega$ gilt

Aufgabe: Skizzieren Sie $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-(x-k)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(1) Konvergiert f_k punktweise? Gegen welche Grenzfunktion f ?

(2) Vergleichen Sie $\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx$.



Lösung: (1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \rightarrow \infty$ gilt $f_k(x) \rightarrow 0$. (2) Daher gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

⚠ Anshauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Dasselbe Problem entsteht für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, etwa die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_Q$ zu einen endlichen Quader Q , und ihre Verschiebungen $f_k(x) = f(x - kv)$.

In vielen Rechnungen stehen wir vor der Frage: Wie verhalten sich die Integrale $\int_{\Omega} f_k$ und $\int_{\Omega} f$ bei punktweiser Konvergenz $f_k \rightarrow f$?

☹ Stetigkeit und Integrierbarkeit können verloren gehen!

Die nachfolgende Aufgabe zeigt ein einfaches Beispiel.

😊 Messbarkeit ist unkaputtbar! Sind alle f_k messbar und konvergiert $f_k \rightarrow f$ punktweise, dann ist auch die Grenzfunktion f messbar. [A316]

😊 Monotone Konvergenz funktioniert immer! [A309]

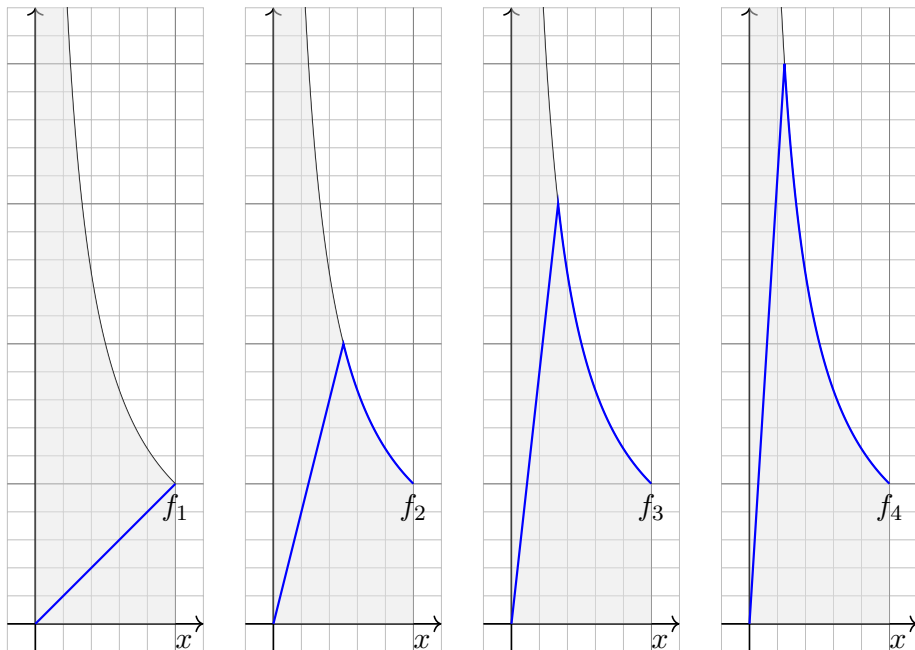
Aus monotoner Konvergenz $0 \leq f_k \nearrow f$ folgt stets $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$.

☹ Im Allgemeinen folgt aus $f_k \rightarrow f$ jedoch nicht $\int_{\Omega} f_k \rightarrow \int_{\Omega} f$.

Typisches Problem: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Unter welchen Voraussetzungen können wir $\int_{\Omega} f_k \rightarrow \int_{\Omega} f$ schließen?

Als praktisches Kriterium werden wir die majorisierte Integrierbarkeit nutzen. Zur Motivation stelle ich ein paar warnende Beispiele voran.



Aufgabe: Skizzieren Sie für $k = 1, 2, 3, \dots$ die Funktion

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} k^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(1) Bestimmen Sie punktweise die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$.

(2) Ist jede Funktion f_k stetig? integrierbar? und die Grenzfunktion f ?

Lösung: (1) Für festes $x \in [0, 1]$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

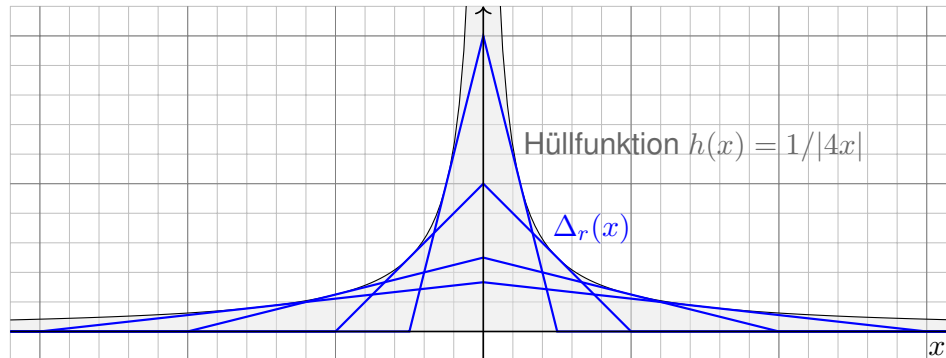
(2) Jede der Funktionen $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und somit integrierbar. Die Grenzfunktion f hingegen ist weder stetig noch absolut integrierbar.

⚠ Sind alle Funktionen f_k stetig bzw. integrierbar, so kann man nicht auf die Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit der Grenzfunktion f schließen!

⚠ Selbst wenn alle f_k und die Grenzfunktion f integrierbar sind, wie oben, gilt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Integralfolge!

Aufgabe: Skizzieren Sie für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die Dreiecksfunktion

$$\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \Delta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq r, \\ \frac{r-|x|}{r^2} & \text{für } |x| \leq r. \end{cases}$$



- (1) Berechnen Sie $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x)$. Gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \int \Delta_r(x) dx = \int \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) dx$?
- (2) Berechnen Sie $\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x)$. Gilt $\lim_{r \rightarrow 0} \int \Delta_r(x) dx = \int \lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) dx$?

Lösung: Für jedes $r > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \Delta_r(x) dx = 1$.

- (1) Für festes $x \in \mathbb{R}$ und $r \rightarrow \infty$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) = 0.$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \Delta_r(x) dx = 1 \neq 0 = \int \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) dx$$

- (2) Für festes $x \in \mathbb{R}$ und $r \rightarrow 0$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) = \Delta_0(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int \Delta_r(x) dx = 1 \neq 0 = \int \lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) dx$$

⚠ Die Ursache des Problems ist in beiden Fällen anschaulich klar: Masse „verschwindet nach Unendlich“ und fehlt daher im Integral.

Definition D2B: majorisierte Integrierbarkeit

Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie messbarer Funktionen $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $i \in I$. Wir nennen $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Majorante**, wenn $|f_i| \leq h$ für alle $i \in I$ gilt. Die Familie heißt **majorisiert integrierbar**, wenn eine integrierbare Majorante existiert, also $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f_i| \leq h$ und $\int_{\Omega} h < \infty$.

- 😊 Die Integrierbarkeit $\int_{\Omega} h < \infty$ der Majorante garantiert, dass keine Masse nach Unendlich verschwinden kann.
- 😊 Aus der Majoration $|f_i| \leq h$ folgt $\int_{\Omega} |f_i| \leq \int_{\Omega} h < \infty$, insbesondere ist jede einzelne der Funktionen f_i integrierbar.
- ⚠ Selbst wenn jede einzelne Funktion f_i integrierbar ist, folgt daraus noch nicht, dass die gesamte Familie $(f_i)_{i \in I}$ majorisiert integrierbar ist!

Beispiel: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \max(0, \frac{r-|x|}{r^2})$. Zur Familie $(\Delta_r)_{r \in \mathbb{R}_{>0}}$ ist $h(x) = 1/(4|x|)$ eine Majorante. Dies ist sogar die kleinste Majorante, denn $\Delta_{2|x|}(x) = h(x)$. Die Familie $(\Delta_r)_{r \in \mathbb{R}_{>0}}$ ist daher nicht majorisiert integrierbar.

Das vorige Beispiel ist durchaus typisch:

Proposition D2C: Hüllfunktion

Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann majorisiert integrierbar, wenn ihre **Hüllfunktion**

$$h = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|,$$

absolut integrierbar ist, also $\int_{\Omega} h < \infty$ erfüllt.

Beweis: Mit f_k ist auch $|f_k|$ messbar, ebenso $h_k = \max\{|f_0|, \dots, |f_k|\}$. Somit ist auch die obige Hüllfunktion $h := \lim h_k = \sup |f_k|$ messbar.

Wegen $|f_k| \leq h$ ist dies eine Majorante, und zwar die kleinst mögliche. Damit ist die behauptete Äquivalenz klar dank Monotonie des Integrals.

Beispiel: Für die wandernden Glockenkurven $f_a(x) = s e^{-(x-a)^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist die Hüllfunktion $h = 1$: Man betrachte hierzu obige Skizze. Die Familie $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ ist also nicht majorisiert integrierbar.

Unter welchen Vorsichtsmaßnahmen gilt folgende nützliche Formel?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Satz D2D: majorisierte Konvergenz, Lebesgue 1901

Sei $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen.

- (1) Konvergiert f_n punktweise gegen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so ist auch f messbar.
- (2) Existiert eine **integrierbare Majorante** $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mit $|f_n| \leq h$ und $\int_{\Omega} h < \infty$, so ist f int'bar, es gilt $\int_{\Omega} |f_n - f| \rightarrow 0$ und somit $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$.

- 😊 Dies ist eine nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!
- ⚠ Die punktweise Konvergenz (1) allein genügt nicht, siehe Beispiele. Die integrierbare Majorante (2) ist daher wesentliche Voraussetzung: Die Majorante verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet! In den obigen Beispielen war genau dies die Ursache des Problems.
- 😊 Anwendungsbeispiel: $\text{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nachrechnen: (1) Monotone Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. A309
 Alle f_n sind messbar, also auch $f_{n,k} := \min\{f_n, \dots, f_k\}$ und $f_{n,k} \searrow g_n := \inf_{k \geq n} f_k$.
 Es gilt $g_n \nearrow \lim g_n = \lim \inf f_n = \lim f_n = f$ nach Voraussetzung, also ist auch f messbar.

(2) Wir beginnen mit der Ungleichung $0 \leq |f_n - f| = |f(f_n - f)| \leq |f_n - f|$.
 Wir zeigen nun, dass die rechte Seite $\int |f_n - f|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.
 Die folgende Rechnung ist technisch, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Lemma von Fatou: Sind $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar, dann gilt $\int \lim \inf f_n \leq \lim \inf \int f_n$.

Beweis des Lemmas: Für $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ gilt $g_n \leq f_n$ und $g_n \nearrow g = \lim \inf f_n$, also

$$\int \lim \inf f_n = \int \lim g_n \stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim \int g_n = \lim \inf \int g_n \leq \lim \inf \int f_n.$$

Beweis des Satzes der majorisierten Konvergenz: Es gelte $f_n \rightarrow f$ (zumindest fast überall).
 Aus $|f_n| \leq h$ folgt $|f| \leq h$ (fast überall), somit $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2h$. Mit Fatou folgt:

$$\begin{aligned} \int 2h &= \int \lim \inf (2h - |f_n - f|) \leq \lim \inf \int (2h - |f_n - f|) \\ &= \lim \inf \left(\int 2h - \int |f_n - f| \right) = \int 2h - \lim \sup \int |f_n - f| \end{aligned}$$

Wir setzen $\int 2h$ als endlich voraus. Daher können wir diesen Wert auf beiden Seiten subtrahieren.
 Wir erhalten $\lim \sup \int |f_n - f| \leq 0$. Mit $\int |f_n - f| \geq 0$ folgt schließlich $\lim \int |f_n - f| = 0$.

Beispiel: Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $g_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |g_k| < \infty.$$

Dank majorisierter Konvergenz erhalten wir erneut

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} g_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} g_k.$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt (fast überall) punktweise Konvergenz

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k \rightarrow f = \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Zudem ist $h = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$ eine Majorante für $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und somit

$$\int_{\Omega} f_n = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n g_k \rightarrow \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Für $f_n \rightarrow f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \leq f_n \nearrow f$, A309
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \rightarrow f$ mit $|f_n| \leq h$ und $\int_{\Omega} h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\text{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- 😊 Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.
- 😊 Sei $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit Schranke $|f| \leq h$ ist die Zuordnung $f \mapsto \int_{\Omega} f$ folgenstetig: Aus punktweiser Konvergenz $f_n \rightarrow f$ folgt $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$.
- ⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Ein **parameterabhängiges Integral** ist von der Form

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \quad \text{mit} \quad f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}.$$

Beispiele: (1) Wir kennen dies bereits von **Doppelintegralen**

$$\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_X F(x) dx.$$

(2) Das **Newton–Potential** einer Massenverteilung $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy.$$

(3) Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Ist F stetig? diff'bar? Wann dürfen wir ∂_x unters Integral ziehen?

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$$

Wir beginnen mit Parameterintegralen der einfachsten Bauart:

Satz D3A: Parameterintegrale auf Rechtecken

Ist $f: [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so auch die Funktion

$$F: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{y=y_0}^{y_1} f(x, y) dy.$$

Ist zudem f stetig diff'bar bezüglich x , so auch F , und es gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{y=y_0}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{y=y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

- ☺ Die Stetigkeit von f bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ sind naheliegende Voraussetzungen.
- ☺ Die Kompaktheit von $[y_0, y_1]$ verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der viel allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen. Wir beweisen sie nachfolgend dank majorisierter Integrierbarkeit.

Etwas allgemeiner und noch nützlicher sind Normalbereiche:

Satz D3B: Leibniz–Regel für Parameterintegrale

Seien $g, h: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g \leq h$. Auf dem Normalbereich

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_1, g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

sei $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Integration nach y ergibt die stetige Funktion

$$F: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

Sind zudem f, g, h stetig diff'bar bezüglich x , so auch F , und es gilt

$$F'(x) = h'(x) f(x, h(x)) - g'(x) f(x, g(x)) + \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

- ☺ Bei festen Grenzen $g(x) = y_0$ und $h(x) = y_1$ erhalten wir Satz D3A.
- ☺ Als Spezialfall enthält Satz D3B den HDI: $\frac{d}{dx} \int_{y=a}^x f(y) dy = f(x)$.

☺ Wie zuvor können wir die Ableitung unter das Integral ziehen. Als Randterme kommen die Ableitungen der Intervallgrenzen hinzu!

Beweis: Zur Vereinfachung sei f auf ganz \mathbb{R}^2 fortgesetzt zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Als Hilfsfunktion definieren wir

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad G(x, u, v) := \int_{y=u}^v f(x, y) dy.$$

Sie ist stetig in u, v, x dank Satz D3A, und sogar stetig differenzierbar nach u, v, x dank Satz D3A für $x_0 \leq x \leq x_1$ und $g(x) \leq u \leq v \leq h(x)$. Somit ist die Verkettung $F(x) = G(x, g(x), h(x))$ stetig in x , sogar C^1 .

Für die Ableitung F' finden wir dank Kettenregel, Satz D3A und HDI:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x), h(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(\dots) \frac{dg}{dx}(x) + \frac{\partial G}{\partial v}(\dots) \frac{dh}{dx}(x) \\ &= \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy - f(x, g(x)) g'(x) + f(x, h(x)) h'(x) \end{aligned}$$

- ☺ Für diese etwas längliche Ableitung genügen Geduld und Sorgfalt. Diese Leibniz–Formel nützt in vielen Rechnungen, zum Beispiel [N247](#).

Alles bleibt einfach, solange wir über Kompakta integrieren:

Satz D3C: Parameterintegrale über Kompakta

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ kompakt. Ist $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so auch

$$F : X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Ist zudem f stetig diff'bar bezüglich x_j , so auch F , und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

😊 Die Stetigkeit von f bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ sind naheliegende Voraussetzungen.

😊 Die Kompaktheit von Y verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der noch allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen: Falls Y nicht kompakt ist, benötigen wir majorisierte Integrierbarkeit.

Beweis: (1) Stetigkeit von F gilt dank majorisierter Konvergenz D2D: Der Ball $\bar{B}(x_0, r) \subseteq X$ ist kompakt, ebenso $K = \bar{B}(x_0, r) \times Y$, hierauf ist die stetige Funktion f beschränkt, $f(x, y) \leq h(y) := M = \max|f|_K|$, also $f(x, -)$ majorisiert integrierbar dank $\int_Y h(y) dy = M \text{vol}(Y) < \infty$.

(2) Sei $p = 1$ und $x \in [a, b] \subseteq X$. Dank HDI und Fubini berechnen wir

$$F(x) - F(a) \stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_Y f(x, y) - f(a, y) dy \stackrel{\text{HDI}}{\underset{\text{B11}}{=}} \int_Y \int_{t=a}^x \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dt dy$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{[a, x] \times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) d(t, y) \stackrel{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{t=a}^x \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy dt$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von $\partial_1 f$ folgt hieraus

$$F'(x) \stackrel{\text{HDI}}{\underset{\text{B11}}{=}} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

Erläuterung: Die Vertauschung von Ableitung und Integral (2) führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von zwei Integralen. Der HDI lässt sich anwenden, da $\partial_1 f$ stetig ist. Der Satz von Fubini lässt sich anwenden, da $\partial_1 f$ stetig ist und somit absolut integrierbar auf $[a, x] \times Y$. Dank (1) ist $t \mapsto \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy$ stetig, daher können wir im letzten Schritt den HDI anwenden.

Wann dürfen wir Grenzwerte unter das Integral ziehen?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy$$

Satz D3D: Stetigkeit von Parameterintegralen

Sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F(x) := \int_Y f(x, y) dy \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Für die Stetigkeit von $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn f stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn f bezüglich x stetig ist und über Y majorisiert integrierbar.

Majorante $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f(x, y)| \leq h(y)$ und $\int_Y h(y) dy < \infty$

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy.$$

Nachrechnen: Für $x \rightarrow x_0$ gilt dank majorisierter Konvergenz D2D:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy$$

$$\stackrel{(2)}{=} \int_Y f(x_0, y) dy = F(x_0)$$

Erläuterung: Wir sehen hieran, dass für die Stetigkeit von F im Punkt $x_0 \in X$ genügen:

- Für jedes $y \in Y$ ist die Abbildung $f(-, y) : X \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto f(x, y)$ in x_0 stetig. Das bedeutet $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$ für alle $x \rightarrow x_0$ und festes $y \in Y$. \Rightarrow (2)
- Für alle $x \in X$, oder zumindest alle x in einer kleinen Umgebung $\bar{B}(x_0, r)$ von x_0 , ist die Abbildung $f(x, -) : Y \rightarrow \mathbb{C} : y \mapsto f(x, y)$ majorisiert integrierbar. \Rightarrow (1)

Diese Bedingungen sind automatisch erfüllt, wenn $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und Y kompakt ist: Als Majorante wählen wir dann die Konstante $M = \max\{|f(x, y)| \mid x \in \bar{B}(x_0, r), y \in Y\}$. Hier ist $\bar{B}(x_0, r) \subseteq X$ der abgeschlossene Ball mit Mittelpunkt x_0 und Radius $0 < r < \infty$. Somit ist auch die Produktmenge $\bar{B}(x_0, r) \times Y$ kompakt, und hierauf ist f beschränkt.

😊 Die Kompaktheit von Y bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠️ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Stetigkeit gilt nicht immer! [D409]

Wann dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen?

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \implies \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

Satz D3E: Ableitung von Parameterintegralen

Sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F : X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von F haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich x_j stetig ist und über Y majorisiert int'bar.
Majorante $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ mit $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)| \leq h(y)$ und $\int_Y h(y) dy < \infty$

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

Nachrechnen: Zur Vereinfachung sei $p = 1$ und $x \in [a, b] \subseteq X$.

$$F(x) - F(a) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_Y f(x, y) - f(a, y) dy \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_Y \int_{t=a}^x \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dt dy$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{[a, x] \times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) d(t, y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{t=a}^x \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy dt$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von $\partial_1 f$ folgt hieraus

$$F'(x) \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

Erläuterung: Die Vertauschung von Ableitung und Integral führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von Integralen. Fubini lässt sich hier anwenden, da $\partial_1 f$ majorisiert integrierbar ist und somit absolut integrierbar auf $[a, x] \times Y$: Für $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ mit $\int_Y h(y) dy < \infty$ und $|\partial_t f(x, y)| \leq h(y)$ gilt $\int_{[a, x] \times Y} |\partial_t f(t, y)| d(t, y) \leq |x - a| \int_Y h(y) dy < \infty$. Dank D3D ist $t \mapsto \int_Y \partial_t f(t, y) dy$ stetig, daher können wir im letzten Schritt erneut den HDI anwenden.

😊 Die Kompaktheit von Y bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠️ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Als alternativen Beweis der Ableitungsformel weisen wir direkt folgende Gleichungen nach:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + te_j) - F(x)}{t} \stackrel{(2)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_Y \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} dy$$

$$\stackrel{(3)}{=} \int_Y \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} dy \stackrel{(4)}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

Gleichung (1) und (4) ist die Definition der partiellen Ableitung, (2) gilt dank Linearität des Integrals, also bleibt (3) zu zeigen. Dank der vorausgesetzten majorisierten Integrierbarkeit existiert eine Funktion $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ mit $\int_Y h(y) dy < \infty$ und $|(\partial f / \partial x_j)(x, y)| \leq h(y)$.

Nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung (B4B) gilt

$$\frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau e_j, y) \quad \text{für ein } \tau \in [0, t], \text{ also}$$

$$\left| \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau e_j, y) \right| \leq h(y).$$

Somit gilt (3) dank majorisierter Konvergenz. Hierfür genügen also folgende Voraussetzungen:

- Für jedes $y \in Y$ ist die Abbildung $x \mapsto f(x, y)$ nach x_j differenzierbar.
- Für die Ableitung $\partial f / \partial x_j$ existiert eine integrierbare Majorante h , das heißt $|(\partial f / \partial x_j)(x, y)| \leq h(y)$ und $\int_Y h(y) dy < \infty$.

Ist die Ableitung $\partial f / \partial x_j$ zudem stetig in x_j , so auch die Ableitung $\partial F / \partial x_j$.

Zum Abschluss blicken wir kurz zurück auf die Entwicklung der Integration in den Kapiteln A bis D. Die ursprünglich formulierten Ziele und Probleme liegen nun klar vor uns, ebenso die inzwischen zu ihrer Lösung bereitgestellten Werkzeuge und ihre ersten Anwendungen.

Wir wollen ein- und mehrdimensionale Integrale verstehen und berechnen, zunächst mittels Normierung, Linearität, Monotonie, sodann dank Einschachtelung und Ausschöpfung. Diese axiomatische Grundlage dient zur *Definition* und *Konstruktion* des Integrals.

Hieraus haben wir die wichtigsten Rechenregeln erarbeitet: eindimensional den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), mehrdimensional den Satz von Fubini und den Transformationssatz, sowie allgemein die Grenzwertsätze der monotonen und majorisierten Konvergenz. Dies sind mächtige Werkzeuge, wie schon die bisherigen Beispiele belegen.

Wir wünschen uns möglichst einfache und vielseitige Rechenregeln der Art: „Aus $f_n \rightarrow f$ folgt $\int_\Omega f_n \rightarrow \int_\Omega f$.“ Hierzu reicht die Integration stetiger Funktionen à la Riemann nicht aus, denn sie können beim Grenzübergang $f_n \rightarrow f$ zerbrechen. Die Integration nach Lebesgue ist hier wesentlich robuster: Sind alle f_n messbar, dann auch die Grenzfunktion f . Wir erhalten auf diesem Weg einfache und vielseitige Konvergenzsätze, wie dieses Kapitel D eindrucksvoll zeigt.

Gegenbeispiele zeigen aber auch, dass man diese Rechenregeln nicht blind anwenden darf. Wenn man es experimentell angeht, sollte man sich zumindest der Risiken bewusst sein. Für die Korrektheit des Ergebnisses haben wir nun einfache Kriterien, die Sie kennen und beherrschen sollen. Es lohnt sich! Hierzu dient die präzise Formulierung der Rechenregeln in Form von Sätzen: Das ist zugegeben etwas länglich, aber Qualität hat nun einmal ihren Preis.

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f_k(x) dx \right)$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz! [A309](#)
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$, [D106](#)
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$. [D107](#)

😊 Dieses einfache Kriterium ist in vielen Anwendungen nützlich. Es verhindert insbesondere, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Schon in einfachsten Gegenbeispielen gilt $\sum \int f_k \neq \int \sum f_k$. [D101](#)

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. [D429](#)
Die majorisierte Konvergenz erlaubt genauere Aussagen.

Für $f_n \rightarrow f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \leq f_n \nearrow f$, [A309](#)
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \rightarrow f$ mit $|f_n| \leq h$ und $\int_{\Omega} h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\text{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

😊 Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

😊 Sei $h: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit Schranke $|f| \leq h$ ist die Zuordnung $f \mapsto \int_{\Omega} f$ folgenstetig: Aus punktwieser Konvergenz $f_n \rightarrow f$ folgt $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$. Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die Stetigkeit von F haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Sie gilt, wenn f stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn f bezüglich x stetig ist und über Y majorisiert integrierbar.

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy.$$

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von F haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich x_j stetig ist und über Y majorisiert int'bar.

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

Satz D4A: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, Schwarz 1873

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $a \in U$ gilt dann $\partial_j \partial_i F(a) = \partial_i \partial_j F(a)$.

Die Hesse-Matrix $(\partial_j \partial_i F)_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist in jedem Punkt symmetrisch, das Gradientenfeld $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist somit rotationsfrei.

😊 Die Vertauschung $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_j$ ist ungemein nützlich, und wir wollen sie eigentlich immer anwenden. Es gibt jedoch eine Voraussetzung!

⚠️ Wenn man die Bedingung $F \in C^2(U, \mathbb{R})$, also Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen, weiter abschwächt zur minimalen Bedingung „ F ist zweimal partiell differenzierbar“, dann gilt die Vertauschbarkeit im Allgemeinen nicht! Es gibt dann Gegenbeispiele wie das folgende.

Beweis des Satzes: Wir dürfen $n = 2$ sowie $i = 1, j = 2$ annehmen. Nach Verschiebung dürfen wir zudem $a = (0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ annehmen. Da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $[0, \delta] \times [0, \delta] \subseteq U$ gilt. Für $(x, y) \in U$ sei $G_y(x) := F(x, y) - F(x, 0)$. Dank Mittelwertsatz für $x \mapsto G_y(x)$ gilt $G_y(x) - G_y(0) = G'_y(\xi) \cdot x$ für ein geeignetes $0 \leq \xi \leq x$.

Wir untersuchen $G'_y(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0)$: Dank Mittelwertsatz für $y \mapsto \partial_1 F(\xi, y)$ gilt $G'_y(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot y$ für ein geeignetes $0 \leq \eta \leq y$. Wir erhalten also zu $x, y \in [0, \delta]$ insgesamt:

$$F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot xy$$

Wenn wir statt y zuerst x festhalten, dann erhalten wir ebenso:

$$F(x, y) - F(0, y) - F(x, 0) + F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot xy$$

Hierbei hängen $(\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in [0, x] \times [0, y]$ wie erklärt von (x, y) ab. Für $(x, y) \in]0, \delta]^2 \subseteq U$ dividieren wir durch $xy \neq 0$ und erhalten

$$\partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Im Grenzwert für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gilt $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (0, 0)$. Dank der Stetigkeit der zweiten Ableitungen $\partial_2 \partial_1 F$ und $\partial_1 \partial_2 F$ folgt

$$\partial_2 \partial_1 F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(0, 0).$$

Damit ist die Vertauschbarkeit $\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$ bewiesen.

Aufgabe: Wir untersuchen die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(0, 0)$ und

$$F(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Berechnen Sie (1) $f = \text{grad } F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und (2) $g = \text{rot } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt $\text{rot grad } F = 0$? Erklären Sie! Ist f stetig (C^0)? stetig diff'bar (C^1)? Vertauschen die partiellen Ableitungen? Gilt der Satz von Schwarz?

Lösung: (1) In jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt dank Quotientenregel

$$f = (\partial_x F, \partial_y F) = \left(y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ müssen wir genauer hinschauen:

$$F(x, 0) = 0 \implies (\partial_x F)(0, 0) = 0$$

$$F(0, y) = 0 \implies (\partial_y F)(0, 0) = 0$$

Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist stetig: Die Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ ist kompakt, daher nimmt $|x^4 \pm 4x^2 y^2 - y^4|/r^4$ hierauf ein Maximum $M(r)$ an. Zu verschiedenen Radien $r > 0$ bleibt $M(r)$ unverändert. Die Faktoren y, x sichern Konvergenz $f(x, y) \rightarrow (0, 0)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

(2) Wir berechnen $g = \text{rot } f = (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) = (\partial_x \partial_y F - \partial_y \partial_x F)$: Auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $F \in C^2$, also $\text{rot } f = 0$ dank Schwarz (D4A). Übung: Sie können $\partial_x f_2$ und $\partial_y f_1$ explizit ausrechnen und vergleichen. Im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ müssen wir erneut genauer hinschauen:

$$f_2(x, 0) = \frac{+x^5}{x^4} = +x \implies (\partial_x f_2)(0, 0) = +1$$

$$f_1(0, y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y \implies (\partial_y f_1)(0, 0) = -1.$$

Somit erhalten wir schließlich für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Rotation

$$g(x, y) = \text{rot}(f)(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

⚠️ Das Vektorfeld f hat ein Potential F , aber dennoch gilt $\text{rot } f \neq 0$.

Erklärung: Es mangelt an Differenzierbarkeit! (1) Die Funktion F ist C^1 , aber nicht C^2 , und die Vertauschbarkeit $\partial_x \partial_y F = \partial_y \partial_x F$ gilt hier nicht! Der Satz von Schwarz gilt immer noch, lässt sich aber hier nicht anwenden. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $F \in C^\infty$, somit $\partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F$. (2) Das Vektorfeld $f = \text{grad } F$ ist stetig (C^0) und differenzierbar, aber nicht stetig diff'bar (C^1). Das bequeme Kriterium „exakt \implies rotationsfrei“ dank Schwarz lässt sich hier nicht anwenden!

Der Satz von Fubini (C1E) besagt in der einfachsten Form

$$\int_{x=a_1}^{b_1} \int_{y=a_2}^{b_2} g(x, y) \, dy \, dx = \int_{y=a_2}^{b_2} \int_{x=a_1}^{b_1} g(x, y) \, dx \, dy$$

für jede stetige Funktion g auf $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Geometrisch ist das anschaulich: Beide Integrale ergeben das Volumen $\int_Q g$ unter g . Der Satz von Schwarz (D4A) garantiert die Vertauschbarkeit

$$\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$$

für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $F: \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$. Das ist geometrisch weit weniger anschaulich. Wer Satz D4A für anschaulich oder gar selbstverständlich hält, der wiederhole und untersuche das Gegenbeispiel [D403](#) sowie den Beweis des Satzes! Fubini ist zentral für die mehrdimensionale Integralrechnung. Schwarz ist zentral für die mehrdimensionale Differentialrechnung. Der HDI (B1i) übersetzt zwischen beiden: Fubini impliziert Schwarz!

Lösung: Wir zeigen die Behauptung in jedem Punkt $a = (a_1, a_2) \in U$. Da der Definitionsbereich U offen ist, können wir $b_1 > a_1$ und $b_2 > a_2$ hinreichend nahe wählen, so dass $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq U$ gilt.

Für alle $x \in [a_1, b_1]$ und $y \in [a_2, b_2]$ finden wir dank HDI (Satz B1i):

$$\begin{aligned} \int_{u=a_1}^x \int_{v=a_2}^y \partial_2 \partial_1 F(u, v) \, dv \, du &= \int_{u=a_1}^x \partial_1 F(u, y) - \partial_1 F(u, a_2) \, du \\ &= F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Hier nutzen wir zuerst, dass zu festem u die Abbildung $v \mapsto \partial_1 F(u, v)$ stetig differenzierbar ist mit Ableitung $v \mapsto \partial_2 \partial_1 F(u, v)$, sodann dass die Abbildung $u \mapsto F(u, y) - F(u, a_2)$ stetig differenzierbar ist mit Ableitung $u \mapsto \partial_1 F(u, y) - \partial_1 F(u, a_2)$. Daher dürfen wir in beiden Fällen den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden!

Dank Fubini (C1E) dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\int_{v=a_2}^y \int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, v) \, du \, dv = F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2)$$

Mit dem Satz von Fubini wollen die den Satz von Schwarz zeigen:

Satz D4B: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion. Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zwei Indizes. Wir setzen voraus: Die partiellen Ableitungen $\partial_i F$ und $\partial_j F$ sowie $\partial_j \partial_i F$ existieren und sind stetig. Dann existiert auch die Ableitung $\partial_i \partial_j F$, und es gilt $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$.

😊 Diese Formulierung ist etwas genauer und stärker als Satz D4A: Wir verlangen nur die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen $\partial_i F$ und $\partial_j F$ sowie $\partial_j \partial_i F$. Die Existenz und Stetigkeit der Ableitung $\partial_i \partial_j F$ hingegen wird nicht gefordert, sondern gleich mit gefordert!

Aufgabe: Wir dürfen $n = 2$ sowie $i = 1, j = 2$ annehmen. Zeigen Sie:

$$\int_{u=a_1}^x \int_{v=a_2}^y \partial_2 \partial_1 F(u, v) \, dv \, du = F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2)$$

Nutzen Sie Fubini und berechnen Sie $\partial_1 \partial_2 F = \partial_2 \partial_1 F$. Erklären Sie in jedem Rechenschritt, welchen Satz / welche Rechenregel Sie benutzen!

Der Integrand $v \mapsto \int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, v) \, du$ ist stetig dank Satz D3A. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1i) können wir daher das linke Integral nach y ableiten und erhalten:

$$\int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, y) \, du = \partial_2 F(x, y) - \partial_2 F(a_1, y)$$

Auch der Integrand $u \mapsto \partial_2 \partial_1 F(u, y)$ ist stetig nach Voraussetzung. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1i) können wir daher das linke Integral nach x ableiten und erhalten:

$$\partial_2 \partial_1 F(x, y) = \partial_1 \partial_2 F(x, y)$$

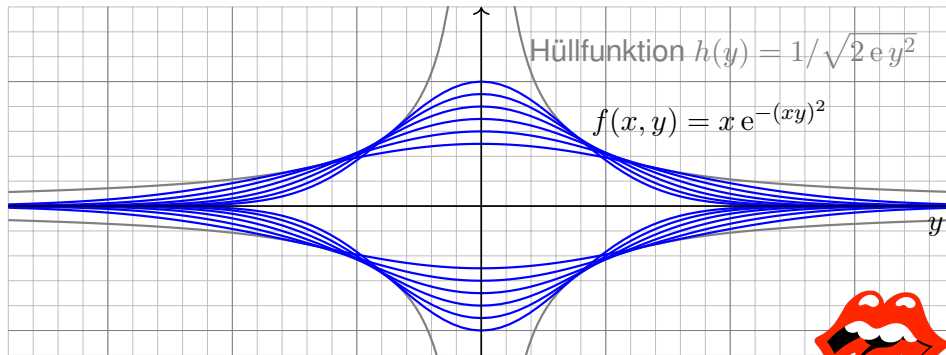
Dies gilt insbesondere im Punkt $(x, y) = (a_1, a_2)$, den wir beliebig vorgegeben haben. Somit gilt $\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$ auf ganz U .

😊 Diese sorgfältige aber leichte Rechnung zeigt: Fubini impliziert Schwarz. Umgekehrt impliziert ebenso Schwarz auch Fubini in der angegebenen einfachsten Form; dies führen wir hier nicht weiter aus.

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[x e^{-(xy)^2} \right] dy$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x, y) = x e^{-(xy)^2}$:

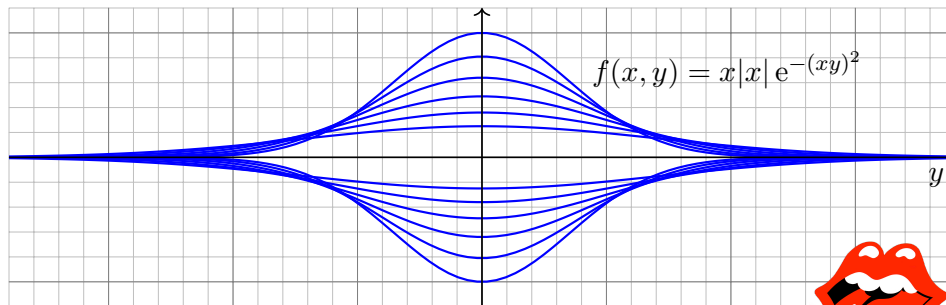


⚠ Der Integrationsbereich \mathbb{R} ist hier nicht kompakt. Die Hüllfunktion hat unendliches Integral. Also Vorsicht!

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\mathbb{R}} x|x| e^{-(xy)^2} dy \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[x|x| e^{-(xy)^2} \right] dy \quad \text{in } x = 0$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x, y) = x|x| e^{-(xy)^2}$:



⚠ Der Integrationsbereich \mathbb{R} ist hier nicht kompakt. Wir treffen dieselben Probleme wie zuvor. Also Vorsicht!
You can't always get what you want, but you get what you need.

(2) Zur Integration substituieren wir $u = xy$ und $du = |x|dy$:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy = \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-(xy)^2} |x| dy$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{C2G}}{=}} \text{sign}(x) \sqrt{\pi}$$

Für die Funktion $g(u) = e^{-u^2}$ kennen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} g(u) du = \sqrt{\pi}$. Für festes $x > 0$ ist $f(x, y) = x g(xy)$ die vertikale Streckung um x und horizontale Stauchung um x , hat also genau dieselbe Fläche wie g ! Das Umklappen des Vorzeichens ist in der Skizze gut zu erkennen. Obwohl der Integrand $f(x, y)$ stetig ist, ist das Integral $F(x)$ unstetig!

$$\lim_{x \searrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy \right] = \lim_{x \searrow 0} F(x) = \sqrt{\pi}, \quad \text{aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} \left[x e^{-(xy)^2} \right] dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0. \quad \text{Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten! Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3D).

(2) Die Funktion $f(x, y) = x|x| g(xy)$ mit $g(u) = e^{-u^2}$ ist stetig diff'bar. Das Integral berechnen wir dank Substitution $u = xy$ und $du = |x|dy$:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} x|x| g(xy) dy \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} x \int_{\mathbb{R}} g(u) du \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{C2G}}{=}} x \sqrt{\pi}$$

Ableiten des Integranden hingegen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2|x| g(xy) + x|x| y g'(xy)$$

Das verschwindet für $x = 0$. Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[x|x| e^{-(xy)^2} \right]_{x=0} dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0, \quad \text{aber}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\mathbb{R}} x|x| e^{-(xy)^2} dy \right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[x \sqrt{\pi} \right]_{x=0} = \sqrt{\pi}. \quad \text{Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten! Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

Verallgemeinerung: Die Funktion $g(u) = e^{-u^2}$ (Glockenkurve) dient in den beiden vorigen Aufgaben als schönes und konkretes Beispiel.

Das Phänomen besteht jedoch für jede Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Das Integral $a := \int_{\mathbb{R}} g(u) du$ erfülle hierzu lediglich $0 < a < \infty$.

Selbst harmlose Funktionen wie die Glockenkurve $g(u) = e^{-u^2}$ oder die Dreiecksfunktion $g(u) = \Delta_1(u)$ illustrieren das Problem. [D205](#)

Diskutieren Sie den allgemeinen Fall nach diesem Vorbild:

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x \searrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy \right] \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} [x g(xy)] dy \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\mathbb{R}} x |x| g(xy) dy \right] \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} [x |x| g(xy)] dy \quad \text{in } x = 0.$$

Lässt sich Kompaktheit nutzen? Majorisierte Integrierbarkeit? Ist der Integrand stetig bzw. stetig diff'bar? Und das Integral?

Lösung: Zur Integration substituieren wir $u = xy$ und $du = |x|dy$:

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy = \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(u) |x| dy$$

$$= \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(u) du = \text{sign}(x) a$$

Wie zuvor ist dieses Parameterintegral $F(x)$ unstetig in $x = 0$. (Skizze!) Wir finden $\lim_{x \searrow 0} [\int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy] = a$, aber $\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} [x g(xy)] dy = 0$. Kompaktheit oder majorisierte Integrierbarkeit (D3D) gelten hier nicht!

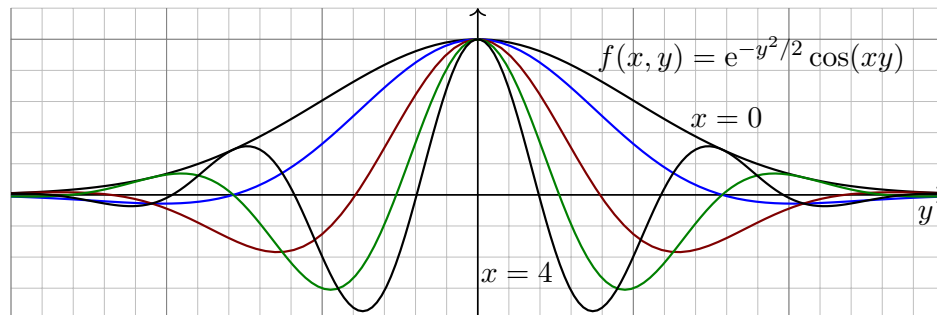
Entsprechendes gilt für die Ableitung von $F(x) = \int_{\mathbb{R}} x |x| g(xy) dy$. Die Rechnung der vorigen Aufgabe überträgt sich wörtlich:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\mathbb{R}} x |x| g(xy) dy \right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} [xa]_{x=0} = a, \quad \text{aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} [x |x| g(xy)]_{x=0} dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0. \quad \text{Sapristi!}$$

⚠ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen. Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

😊 Nach den Warnungen hier ein gutartiges und nützliches Beispiel:



Aufgabe: (0) Skizzieren Sie die Funktion $f(x, y) = e^{-y^2/2} \cos(xy)$.

(1) Erlaubt $\partial_x f(x, y)$ eine integrierbare Majorante $h(y)$?

(2) Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cos(xy) dy.$$

Hinweis: Zeigen Sie $F'(x) = -xF(x)$, indem Sie die Ableitung $\partial_x F(x)$ unter das Integral ziehen und partiell integrieren. Lösen Sie nach F auf.

Lösung: (1) Ableitung und integrierbare Majorante:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \left| e^{-y^2/2} \cdot (-y) \sin(xy) \right| \leq e^{-y^2/2} |y| =: h(y)$$

(2) Dank Vorbereitung (1) dürfen wir ∂_x unter das Integral ziehen:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cos(xy) dy \stackrel{\text{D3E (1)}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} (-y) \sin(xy) dy$$

$$\stackrel{\text{part}}{=} \left[e^{-y^2/2} \sin(xy) \right]_{y=-\infty}^{+\infty} - \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} x \cos(xy) dy = -xF(x)$$

Demnach genügt $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $F'(x) = -xF(x)$.

Wir trennen die Variablen gemäß $F'(x)/F(x) = -x$

und integrieren zu $\ln F(x) - \ln F(0) = -x^2/2$.

Wir erhalten die Lösung $F(x) = F(0) e^{-x^2/2}$.

Mit $F(0) = \sqrt{2\pi}$ folgt $F(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$.

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-tx} dx.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-tx} dx.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unter das Integral ziehen?

Das Integral (2) ist die Laplace-Transformierte der Polynomfunktionen $x \mapsto x^n$, siehe Kapitel L. Die Rechnung gelingt mit partieller Integration [B316], etwas mühsam. Differenzieren ist leichter.

Was soll Frage (3) bedeuten? Natürlich dürfen wir unter dem Integral nach t ableiten: Das ist ein freies Land, und niemand kann uns das Ableiten verbieten! Wir können erst nach t ableiten und dann über x integrieren oder umgekehrt. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht klar, ob diese beiden Rechnungen dasselbe Ergebnis liefern. Der obige Satz D3E rechtfertigt hier die Gleichheit!

Lösung: (1) Integriert wird hier über x bei festem Parameter t :

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-tx} dx = \left[-\frac{e^{-tx}}{t} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{t}.$$

(2) Wenn wir ∂_t unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\infty} -x e^{-tx} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{1}{t^2} & \text{also} & \int_{x=0}^{\infty} x e^{-tx} dx = \frac{1}{t^2}, \\ \int_{x=0}^{\infty} -x^2 e^{-tx} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{2}{t^3} & \text{also} & \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3}, \\ \int_{x=0}^{\infty} -x^3 e^{-tx} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{3!}{t^4} & \text{also} & \int_{x=0}^{\infty} x^3 e^{-tx} dx = \frac{3!}{t^4}. \end{aligned}$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad \text{speziell} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a, b]$ unabhängige Majorante:

$$|-x^n e^{-tx}| \leq x^n e^{-ax} =: h(x) \leq \frac{\text{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} h(x) dx < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unter das Integral ziehen?

Die Funktion $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ ist die Dichte der Standard-Normalverteilung, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Das Integral über $x\varphi(x)$ ist ihr Mittelwert (Schwerpunkt), hier = 0 aus Symmetriegründen. Das Integral über $x^2\varphi(x)$ ist ihre Varianz (Trägheitsmoment). Allgemein nennt man das Integral über $x^n\varphi(x)$ das n -te Moment.

Der zweite Parameter t wird hier trickreich eingeführt, um unterm Integral zu differenzieren, motiviert durch den Erfolg (2) und gerechtfertigt durch die integrierbare Majorante (3).

Lösung: (1) Wir substituieren durch $u = \sqrt{t}x$ und $du = \sqrt{t}dx$, also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = t^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) Wenn wir ∂_t unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^2}{2} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} & \text{also} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = t^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^4}{2} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} & \text{also} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 3 \cdot t^{-\frac{5}{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^6}{2} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx &\stackrel{\text{D3E}}{=} -\frac{3 \cdot 5}{2}t^{-\frac{7}{2}} & \text{also} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^6 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 3 \cdot 5 \cdot t^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot t^{-\frac{2k+1}{2}} \sqrt{2\pi}.$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a, b]$ unabhängige Majorante:

$$|-x^{2n} e^{-tx^2/2}| \leq x^{2n} e^{-ax^2/2} =: h(x) \leq \frac{\text{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}} h(x) dx < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

Aufgabe: Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^1 x^5 dx, \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x) dx, \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x)^2 dx, \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x)^3 dx.$$

Lösung: Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^1 x^t dx = (t+1)^{-1} \quad \text{für } t > -1. \quad \xrightarrow{t=5} \frac{1}{6}$$

Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x) dx \stackrel{?}{=} F'(t) = -(t+1)^{-2} \quad \xrightarrow{t=5} \frac{-1}{36}$$

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x)^2 dx \stackrel{?}{=} F''(t) = +2(t+1)^{-3} \quad \xrightarrow{t=5} \frac{1}{108}$$

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x)^3 dx \stackrel{?}{=} F'''(t) = -6(t+1)^{-4} \quad \xrightarrow{t=5} \frac{-1}{216}$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheiten „ $\stackrel{?}{=}$ “. Welche Sätze greifen hier? Alternativ können Sie hier partiell integrieren. Finden Sie das leichter?

Aufgabe: Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^1 \frac{x^0 - 1}{\ln x} dx \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^1 \frac{x^1 - 1}{\ln x} dx \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx.$$

Lösung: Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx \quad \text{für } t > -1.$$

Unser erstes Integral $F(0) = 0$ ist leicht. Wir suchen nun $F(1)$ und $F(2)$. Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$F'(t) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^1 \partial_t \left[\frac{x^t - 1}{\ln x} \right] dx = \int_{x=0}^1 x^t dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{t+1}$$

Der HDI beschert uns nun das ersehnte Ergebnis:

$$F(t) = F(t) - F(0) = \int_{s=0}^t \frac{1}{s+1} ds = \left[\ln(s+1) \right]_{s=0}^t = \ln(t+1)$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheit „ $\stackrel{?}{=}$ “. Welche Sätze greifen hier?

Aufgabe: Berechnen Sie das berühmt-berüchtigte Dirichlet-Integral

$$I := \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

(1) als Parameterintegral $F(t) := \int_{x=0}^{\infty} \sin(x)/x \cdot e^{-xt} dx$ à la Laplace und
(2) als Doppelintegral mit $\int_{t=0}^{\infty} e^{-xt} dt = 1/x$ dank Fubini. (Siehe F425)

Lösung: (1) Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen:

$$F'(t) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^{\infty} -\sin(x) e^{-xt} dx \stackrel{(3)}{=} \frac{-1}{1+t^2}$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt $F(t) \rightarrow 0$. Der HDI beschert uns das ersehnte Ergebnis:

$$I = F(0) \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(2) Wenn wir hier Integrale vertauschen dürfen, so erhalten wir:

$$I = \int_{x=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^{xt}} dt dx \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^{xt}} dx dt \stackrel{(3)}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheiten „ $\stackrel{?}{=}$ “. Das ist nicht leicht! (L409)

Aufgabe: Wie löst man das hier auftretende Integral (3)? (Siehe L101)

Lösung: (3) Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter, so auch hier. Wir fassen Mut und berechnen für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \in \mathbb{R}$ allgemein

$$U := \int_{x=0}^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{und} \quad V := \int_{x=0}^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

Dies sind der Realteil und der Imaginärteil der Exponentialfunktion!

$$U + iV = \int_{x=0}^{\infty} e^{(-a+ib)x} dx = \left[\frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

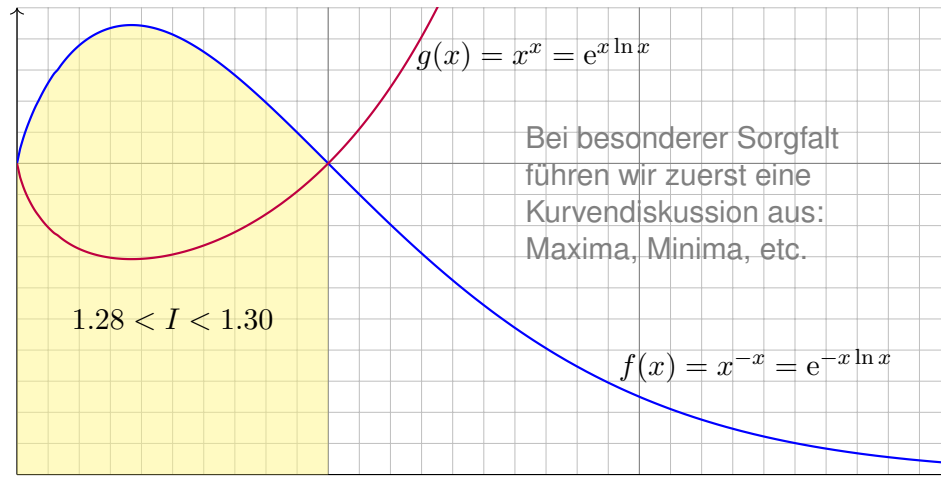
Daraus folgen die beiden gesuchten reellen Integrale:

$$U = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad V = \frac{b}{a^2+b^2}$$

😊 Wir tauschen *zwei* mühsame reelle Integrale gegen *ein* komplexes, und dieses gelingt spielend leicht. Integration ist eine Kunst, sie kann große Freude bereiten, doch sie erfordert auch Erfahrung und Übung, Geduld und Sorgfalt. Wir wollen die Techniken schrittweise ausbauen.

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = x^{-x} = e^{-x \ln x}$ auf $[0, 3]$. Schätzen Sie damit graphisch-numerisch das Integral $I = \int_0^1 x^{-x} dx$.

Lösung: (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild: Wir nutzen hierzu insbesondere den Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} [x^{-x}] = 1$.



Aufgabe: (2) Zeigen Sie folgende erstaunliche Gleichung:

$$\int_{x=0}^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$$

Anleitung: (a) Setzen Sie für den Integranden die Exponentialreihe ein. (b) Vertauschen Sie Integral und Reihe. Warum gilt dabei Gleichheit? (c) Erinnern Sie sich an den Feynman-Trick D421 zur Berechnung von

$$\int_{x=0}^1 x^t (-\ln x)^k dx = \frac{k!}{(t+1)^{k+1}} \quad \text{für } t > -1 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(3) Berechnen Sie damit das Integral bis auf einen Fehler $\varepsilon \leq 10^{-9}$. (a) Für den Fehler bei Reihenabbruch gilt dank geometrischer Reihe:

$$\varepsilon_{n-1} := \sum_{k=n}^{\infty} k^{-k} < \sum_{k=n}^{\infty} n^{-k} = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^n(1-1/n)} \stackrel{!}{\leq} 10^{-9}$$

(b) Bis zu welchem Term müssen Sie numerisch summieren?

Lösung: (2) Wir nutzen sorgsam unsere Integrationswerkzeuge:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 x^{-x} dx &= \int_{x=0}^1 e^{-x \ln x} dx \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{x=0}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (-\ln x)^k}{k!} dx \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{x=0}^1 x^k (-\ln x)^k dx \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \end{aligned}$$

😊 Die einzige nicht-elementare Umformung ist die Vertauschung von Integral und Reihe (b). Die hier summierten Funktionen sind alle positiv, also ändert die Vertauschung das Ergebnis nicht, siehe Fubini D1A.

😊 Erfahrung zahlt sich aus: Das innere Integral (c) kennen wir bereits.

(3) Die Reihe konvergiert glücklicherweise extrem schnell! Es genügt, die ersten neun Terme ($k = 1, 2, \dots, 9$) zu summieren:

$$\sum_{k=1}^9 k^{-k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} + \dots + \frac{1}{9^9} = 1.2912859969590 \dots$$

Der Fehler ist $\varepsilon_9 = \sum_{k=10}^{\infty} k^{-k} < \frac{1}{0.9 \cdot 10^{10}} = 1.111 \dots \cdot 10^{-10} < 10^{-9}$. Längere Summation liefert schnell und bequem weitere Dezimalstellen:

$$\int_{x=0}^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} = 1.29128599706266 \dots$$

😊 Plausibilitätscheck: Die ersten zwei Nachkommastellen entsprechen unserer Graphik. Hier können Sie weitere numerische Methoden testen.

📺 *The Bernoulli Integral is ridiculous*, youtu.be/PxyK_Tsnz10. Dort wird Schritt (2c) durch Substitution gelöst, das ist mühsamer. Wir genießen, leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{x=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} dx \right], \quad \int_{x=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} \right] dx.$$

(2) Gilt absolute Konvergenz? Was ist hierbei die Hüllfunktion?
 (3) Gilt majorisierte Integrierbarkeit? Was ist die Hüllfunktion?

Lösung: (1) Wir können beide Seiten direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{x=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} dx \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \\ \int_{x=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} \right] dx &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_{u=0}^1 \frac{1}{1+u} du = \left[\ln(1+u) \right]_{u=0}^1 = \ln(2) \end{aligned}$$

😊 Dank unserer Integrations- und Summationstechniken gelingt die direkte Rechnung auf beiden Seiten. Demnach gilt Vertauschbarkeit.

(2) Als Hüllfunktion der absoluten Integranden finden wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)x} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Diese ist nicht integrierbar; wir substituieren $u = e^{-x}$ und erhalten:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_{u=0}^1 \frac{1}{1-u} dx = \left[-\ln(1-u) \right]_{u=0}^1 = +\infty$$

(3) Mit alternierenden Vorzeichen hingegen finden wir dank Leibniz:

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(k+1)x} \right| \leq e^{-x}$$

Die Hüllfunktion $h(x) = e^{-x}$ ist viel sparsamer und bleibt integrierbar:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{\infty} = 1 < +\infty$$

Hier gilt nicht absolute Konvergenz, aber majorisierte Konvergenz!

😊 Dies genügt, um Integral und Reihe vertauschen zu dürfen (D2D).

Aufgabe: Die geometrische Reihe für $q = \sin(x)^2/2 \in [0, 1/2]$ zeigt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} = \frac{2 \sin(x)}{2 - \sin(x)^2}.$$

Integrieren Sie über $[0, \pi/2]$ und berechnen Sie so die **Wallis–Reihe**:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{\pi}{2}$$

😊 Konvergiert die Reihe? Ist der Grenzwert plausibel? Die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$ beweist die Konvergenz gegen einen Grenzwert $\in [1, 2]$.

Lösung: Auf der rechten Seite erhalten wir dank Substitution

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2 \sin(x)}{2 - \sin(x)^2} dx = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2 \sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx = \left[-2 \arctan(\cos x) \right]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Links gilt dank absoluter Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}$$

Zur Erinnerung: Stammfunktionen zu $\sin(x)^n$ und $\cos(x)^n$ berechnen wir, wie bereits gesehen [B130](#), rekursiv durch partielle Integration:

$$\int \sin(x)^n dx = -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} dx$$

$$\int \cos(x)^n dx = +\frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} dx$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n dx$ gilt $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}},$$

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

😊 Einsetzen in obige Reihe beschert uns die schöne Wallis–Formel. Ist die Rechnung auch lang und mühsam, jeder Schritt ist klar und leicht.

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D433
Ausführung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **Fakultät** definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

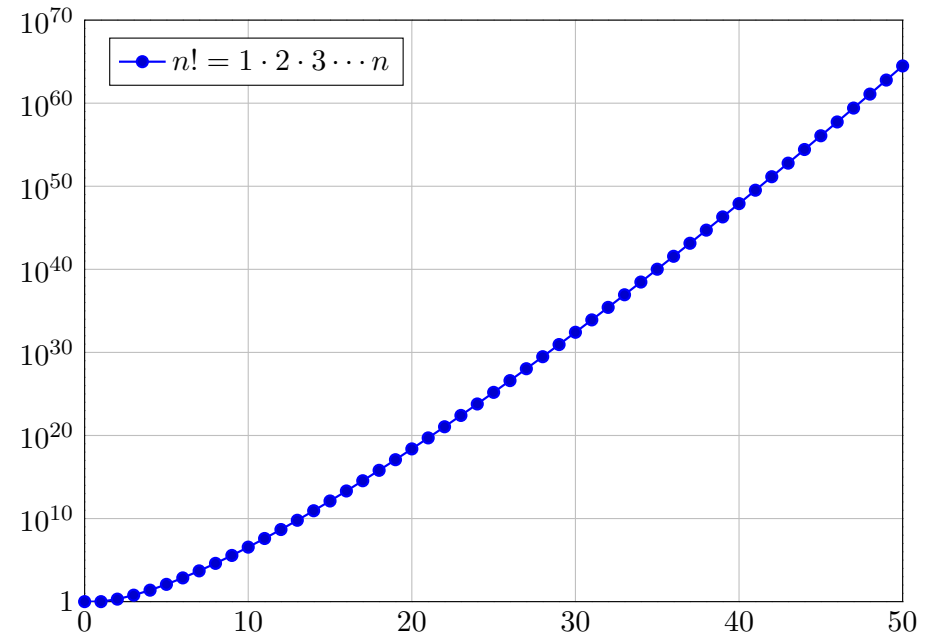
Für große n ist die exakte Berechnung mühsam und oft gar nicht nötig:
Für $n \rightarrow \infty$ suchen wir für $n!$ eine einfache aber gute Näherungsformel.
Unsere vorigen Abschätzungen [B312] legen folgende Asymptotik nahe:

$$n! \sim \text{const} \cdot \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Dies wollen wir nun nachrechnen und auch die Konstante bestimmen.

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D434
Ausführung



Stirlings Näherungsformel für $n!$

D435
Ausführung

Aufgabe: Dank der Gamma-Funktion wissen wir $n! = \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-x} dx$.
Bestimmen Sie hieraus den Grenzwert von $n! / \sqrt{n}(n/e)^n$ für $n \rightarrow \infty$.

📺 Die grundlegende Idee erklärt das Video youtu.be/JsUI40uS0TU.
Der genaue Grenzwert ist das Ziel der folgenden Rechnung.

Anleitung: Nutzen Sie hierzu die majorisierte Konvergenz dank der folgenden beiden Hilfsaussagen, die Sie anschließend nachrechnen:

(1) Punktweise für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $n \rightarrow \infty$ gilt die Konvergenz

$$f_n(t) := \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \cdot \mathbf{I}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

(2) Zudem ist die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorisiert integrierbar.

Lösung: Einsetzen des Integrals und Umformen ergibt:

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} = \int_{x=0}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(\frac{x}{n}\right) + 1 - \frac{x}{n}\right)\right] \frac{dx}{\sqrt{n}}$$

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D436
Ausführung

Substitution $x = \sqrt{n}t + n$ bedeutet $dx = \sqrt{n} dt$ und $\frac{x}{n} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}}$, also:

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} = \int_{t=-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] dt = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$$

Uns interessiert hier das Verhalten für $n \rightarrow \infty$. Dank majorisierter Konvergenz (1-2) und Satz D2D vertauschen Limes und Integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt \stackrel{\text{MaK}}{\stackrel{\text{D2D}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{C2G}}{=}} \sqrt{2\pi}$$

Damit erhalten wir schließlich das Wachstumsverhalten der Fakultät $n \mapsto n!$ durch die Stirling-Formel als asymptotische Näherung (B3D):

Satz D4c: Stirling-Formel

Für $n \rightarrow \infty$ gilt der Grenzwert $n! / \sqrt{n}(n/e)^n \rightarrow \sqrt{2\pi}$.

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Übung: Rechnen Sie die Voraussetzungen (1-2) sorgfältig nach.

Beispiel: Das **Newton–Potential** einer Masse m im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$(1) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)
Für jede diskrete Verteilung der Massen m_1, \dots, m_N in den Punkten $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^3$ erhalten wir entsprechend die **Superposition** (Summe)

$$(2) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y_1, \dots, y_N\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|y_i-x|}.$$

Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$. Außerhalb von K ist das Potential die **Superposition** (Faltung, D5E)

$$(3) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy.$$

Aufgabe: (a) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld** $f = \text{grad } F$.
(b) Ist das Potential F auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ harmonisch, gilt hier also $\Delta F = 0$?
Dürfen wir hier die Ableitungen unter das Integral ziehen? Warum?

Zur Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$.
Für $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist der **Gradient** $f = \text{grad } F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

Für $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ gilt $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, und für die **Divergenz** von f folgt

$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = \Delta F.$$

Dies führt zum **Laplace–Operator** $\Delta: C^2(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(U, \mathbb{R}): F \mapsto \Delta F$,

$$\Delta = \text{div} \circ \text{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Eine Funktion F mit der Eigenschaft $\Delta F = 0$ heißt **harmonisch**.

Mit anderen Worten, die Funktion $F: \mathbb{R}^3 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta F = 0.$$

Dies ist die **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace–Gleichung**.

Lösung: (1) Wir berechnen (a) und (b) zunächst für eine Punktmasse:

$$F(x) = \frac{m}{|y-x|} \Rightarrow f(x) = \text{grad } F(x) = m \frac{y-x}{|y-x|^3} \Rightarrow \Delta F = \text{div } f = 0$$

(1a) Nachrechnen für die i -te Koordinate $f_i = \partial F / \partial x_i$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right]^{-1/2} = \left[\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right]^{-3/2} (y_i - x_i) = \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3}$$

(1b) Nochmaliges Ableiten ergibt analog:

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3} = \frac{-1}{|y-x|^3} + 3 \frac{(y_i - x_i)^2}{|y-x|^5}$$

Für den Laplace–Operator $\Delta F = \text{div } f$ erhalten wir schließlich:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

Somit gilt $\Delta F = 0$: Die Funktion $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch!

(2) Für eine Summe von Punktmassen gilt dank Linearität der Ableitung:

$$F(x) = \sum_i \frac{m_i}{|y_i-x|} \Rightarrow f(x) = \sum_i m_i \frac{y_i-x}{|y_i-x|^3} \Rightarrow \Delta F = \text{div } f = 0$$

(3) Zur Massendichte $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir die Superposition (Faltung)

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy.$$

(3a) Das zugehörige Gravitationsfeld $f = \text{grad } F$ ist (dank Satz D3C)

$$f(x) = \text{grad} \int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy \stackrel{\text{D3C}}{=} \int_K \text{grad} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy = \int_K \frac{y-x}{|y-x|^3} \varrho(y) dy.$$

(3b) Somit ist das Newton–Potential F auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ harmonisch, denn

$$\Delta F(x) = \Delta \int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy \stackrel{\text{D3C}}{=} \int_K \Delta \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy = \int_K 0 dy = 0.$$

😊 Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich K kompakt ist und der Integrand in $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ stetig differenzierbar (D3C).

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie (für $n = 1$) die Funktion

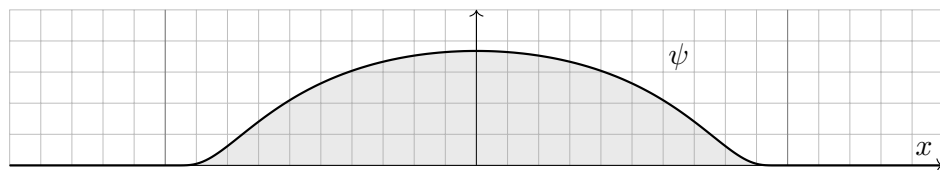
$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(2) Warum ist das Integral $c := \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx$ strikt positiv? Schätzen Sie diesen Wert graphisch-numerisch aus Ihrer Skizze (in Dimension $n = 1$).

(3) Ist ψ glatt, also $\psi \in C^\infty$? Was ist ihr Träger? Ist er kompakt?

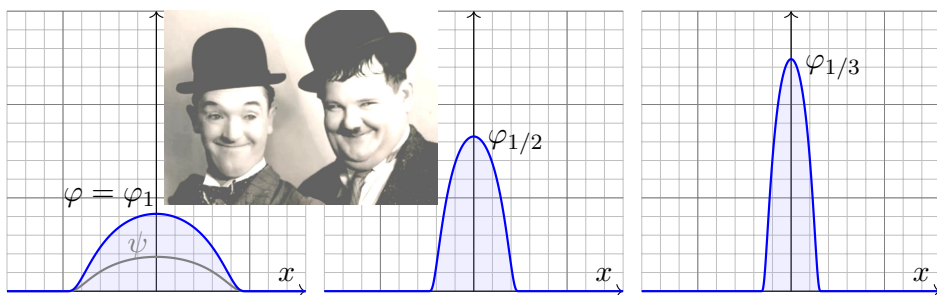
(4) Das Vielfache $\varphi := \psi/c$ hat die Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$. Skizzieren Sie die skalierte Funktion $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist φ_ε ebenfalls glatt? Gilt weiterhin $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$?

Lösung: (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild:



(4) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Die skalierte Funktion $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ist glatt, erfüllt $\varphi_\varepsilon \geq 0$ und $\text{supp } \varphi_\varepsilon = \bar{B}(0, \varepsilon)$ sowie $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

😊 Dies ist ein besonders anschaulicher Spezialfall des Transformationsatzes für n -dimensionale Integrale (C2B).



😊 Anschaulich: Für $\varepsilon \searrow 0$ konzentriert sich φ_ε immer mehr um den Nullpunkt. Die korrekt gewählte Skalierung erhält die Gesamtmasse!

😊 Der Grenzwert für $\varepsilon \searrow 0$ ergibt die ominöse **Dirac-Funktion** D553. Unter dem Integral hingegen erhalten wir das **Dirac-Funktional** D5L.

(2) Das Integral entspricht der Fläche, hier gerundet etwa 44 Quadrate. Wir schätzen so $c = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \approx 0.44$. Es gibt für dieses Integral keine geschlossene Formel als elementaren Ausdruck. Eine noch genauere Näherung $c \approx 0.4439938 \dots$ erhält man durch numerische Integration.

Allgemein in Dimension $n \geq 1$ ist die Funktion ψ rotations-symmetrisch. Das Volumen $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx$ lässt sich ebenso nur numerisch berechnen. Auf den genauen Wert kommt es uns im Folgenden nicht weiter an.

(3) Die Funktion ψ ist offensichtlich glatt im Gebiet $|x| > 1$ und ebenso für $|x| < 1$. Entlang der Sphäre $|x| = 1$ müssen wir genauer hinschauen!

Von Seite [B438](#) wiedererkennen wir die bemerkenswerte Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Dort haben wir sorgfältig nachgerechnet, dass f glatt ist. Somit ist auch $\psi(x) = f(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$ glatt, da Komposition glatter Funktionen.

Der Träger $\text{supp } \psi = \bar{B}(0, 1)$ ist der abgeschlossene Einheitsball, also kompakt. Die Skizze zeigt den eindimensionalen Fall $\bar{B}(0, 1) = [-1, 1]$.

Und die Moral von der Geschichte? Was nützen uns Hutfunktionen?

In Kapitel B dienten sie zunächst als Werkstück zur Fingerübung, um daran unsere bisherigen Techniken zu testen und zu schärfen: Integration, Taylor-Reihen, glatte und analytische Funktionen, etc. . .

Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitsatz: Haben zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 dieselben Ableitungen $\partial^\alpha \varphi(x_0) = \partial^\alpha \psi(x_0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Ebenso: Stimmen zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer (beliebig kleinen) offenen Menge $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ überein, also $\varphi|_U = \psi|_U$, so gilt $\varphi = \psi$ auf \mathbb{R}^n . Analytisch und kompakt getragen bedeutet Null!

Glatte Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hingegen sind bemerkenswert flexibel:

Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass der Vektorraum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist.

Insbesondere dienen glatte Hutfunktionen als Testfunktionen wie in B4G. In diesem Kapitel nutzen wir sie nun zur Konstruktion von Distributionen. Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik!

In diesem Kapitel geht es um **Integrale und Grenzwerte**. Eine wichtige und häufige Anwendung sind Mittelwerte durch gewichtete Integrale, etwa eine lokale Masseverteilung. Anschaulich-physikalisch entspricht dies einer Messung, etwa lokal in einem kleinen Ball um a mit Radius r . Uns interessiert der Grenzübergang $r \searrow 0$. Hierzu dient der folgende Mittelwertsatz; den eindimensionalen Fall B4B kennen Sie bereits.

Satz D5A: Mittelwertsatz der mehrdim. Integralrechnung

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i \leq b_i$ in \mathbb{R} oder ein Ball $K = \bar{B}(a, r)$ um den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g \geq 0$ (oder $g \leq 0$). Dann existiert ein Punkt $\xi \in K$ mit der Mittelwerteigenschaft

$$\int_K f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_K g(x) dx.$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir $\int_K f(x) dx = f(\xi) \cdot \text{vol}_n(K)$.

Im Falle $\int_K g(x) dx = 1$ erhalten wir $\int_K f(x) g(x) dx = f(\xi)$.

Aufgabe: Wiederholen Sie den eindimensionalen Mittelwertsatz B4B. Beweisen Sie nach diesem Vorbild den mehrdimensionalen Satz D5A.

Lösung: Die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend und kompakt. Hierauf nimmt die stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Minimum $m = f(x_m)$ und ihr Maximum $M = f(x_M)$ an, also $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in K$.

Wegen $g \geq 0$ folgt daraus $m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$ für alle $x \in K$. Das Integral ist monoton und linear, also folgt $m \int g \leq \int f g \leq M \int g$. Demnach existiert ein Faktor $\mu \in [m, M]$, sodass $\int f g = \mu \int g$ gilt.

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f : Es existiert ein Punkt $\xi \in K$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt $\int f g = f(\xi) \int g$.

Genauer: Wir betrachten den Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow K: t \mapsto (1-t)x_m + tx_M$ von $\gamma(0) = x_m$ nach $\gamma(1) = x_M$. Die Komposition $\varphi = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ verläuft stetig von $\varphi(0) = m$ nach $\varphi(1) = M$. Also existiert ein $\tau \in [0, 1]$ mit $\varphi(\tau) = \mu$. Der Punkt $\xi = \gamma(\tau) \in K$ leistet demnach das Gewünschte.

😊 Statt Quader oder Ball genügt es, dass der Definitionsbereich K kompakt und wegzusammenhängend ist. Beides wird wirklich benötigt.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Wir definieren den **Mittelwert** von f auf Ω durch das normierte Integral

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \frac{1}{\text{vol}_n(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Satz D5B: Jeder Stetigkeitspunkt ist ein Lebesgue-Punkt.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, d.h. integrierbar auf jedem Ball $\bar{B}(a, r)$. Ist f in a stetig, so gelten für $r \rightarrow 0$ die beiden Mittelwerteigenschaften

$$(1) \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) dx \rightarrow f(a) \quad \text{und} \quad (2) \int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx \rightarrow 0.$$

Allgemein gilt die Implikation (2) \Rightarrow (1), aber nicht umgekehrt (1) \Rightarrow (2). Meist nutzen bzw. fordern wir deshalb die stärkere Bedingung (2). Wir nennen a einen **Lebesgue-Punkt**, wenn (2) gilt; damit folgt (1).

Aufgabe: Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach! In welchen Punkten erfüllt $f = \text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Eigenschaft (1) bzw. (2)?

Lösung: Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ bedeutet: Zu jedem noch so kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein Radius $r_\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - a| \leq r_\varepsilon$ stets $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ gilt. Für $r \leq r_\varepsilon$ folgt:

$$\int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx \leq \int_{\bar{B}(a,r)} \varepsilon dx = \varepsilon$$

Stetigkeit in a impliziert demnach (2). Allgemein folgt (1) aus (2):

$$\left| \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) dx - f(a) \right| = \left| \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) - f(a) dx \right| \leq \int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx$$

Für $r \rightarrow 0$ geht die rechte Seite gegen Null (2), also auch die linke (1).

⚠ Die umgekehrte Implikation „(1) \Rightarrow (2)“ gilt im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f = \text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a = 0$:

$$\int_{\bar{B}(0,r)} f(x) dx = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \text{sign}(x) dx = 0 \rightarrow f(0) = 0,$$

$$\int_{\bar{B}(0,r)} |f(x) - f(0)| dx = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |\text{sign}(x)| dx = 1 \not\rightarrow 0.$$

In jedem Punkt $a \neq 0$ ist f stetig, also gilt (2) und somit auch (1).

Aufgabe: Skizzieren Sie für $\varepsilon \searrow 0$ die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{[0,\varepsilon]}, \quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x), \quad k_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

- (1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x)$.
- (2) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ für $\varepsilon \searrow 0$? Wo liegt hier das Problem?
- (3) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ für jede Funktion $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$?
- (4) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ im Distributionensinne?
- (5) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$.
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$.
Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ im Distributionensinne?

Lösung: (1) Wir finden $f(0) = \infty$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. (2) Daher gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald φ stetig ist (im Punkt 0).
😊 Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! [B122](#)
Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen [D205](#) und Glockenfunktionen [D409](#). Allgemein zu (5) gilt folgender Grenzwertsatz.

Je nach Anwendung wird nicht über $\bar{B}(a, r)$ gleichverteilt gemittelt, sondern gewichtet. Auch hierfür benötigen wir geeignete Werkzeuge:

Satz D5c: Grenzwertsatz für gewichtete Mittelwerte

- (1) Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$ und Träger $\text{supp}(f_\varepsilon) \subseteq \bar{B}(0, r_\varepsilon)$, wobei $r_\varepsilon \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Hierzu genügt bereits, dass $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt 0 stetig ist.
- (2) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$. Damit gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Hierzu genügt φ stetig in 0 und essentiell beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

⚠ In vielen Anwendungen ist der Träger $\text{supp}(f_\varepsilon)$ nicht kompakt; dann können wir (1) nicht nutzen, sondern benötigen den Fall (2).

😊 In beiden Fällen (1) und (2) gilt $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ im Distributionensinne D5i. Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik.

Aufgabe: Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1a) Zur Vereinfachung sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf ganz \mathbb{R}^n . Der Mittelwertsatz D5A der Integralrechnung garantiert dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\bar{B}(0, r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(\xi_\varepsilon).$$

Genauer: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein geeignetes $\xi_\varepsilon \in \bar{B}(0, r_\varepsilon)$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt $r_\varepsilon \rightarrow 0$, also auch $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$ und somit $\varphi(\xi_\varepsilon) \rightarrow \varphi(0)$.

(1b) Wir setzen nun nur noch voraus, dass φ stetig im Punkt 0 ist. Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - 0| \leq r$ stets $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \delta$ gilt. Insbesondere ist φ auf $\bar{B}(0, r_\varepsilon)$ beschränkt und somit absolut integrierbar. Dank $r_\varepsilon \rightarrow 0$ existiert ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für ε mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ stets $r_\varepsilon \leq r$ gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\bar{B}(0, r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \\ &\leq \int_{\bar{B}(0, r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \int_{\bar{B}(0, r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) \delta dx = \delta \end{aligned}$$

😊 Die erste Rechnung (1a) gelingt leicht dank Mittelwertsatz D5A. Der allgemeinere Fall (1b) ist mühsamer, gelingt aber letztlich genauso. Im Fall (2) hingegen ist der Träger $\text{supp}(f_\varepsilon)$ nicht notwendig kompakt:

(2a) Zur Vereinfachung des Integrals nutzen wir die Substitution $x = \varepsilon y$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy$$

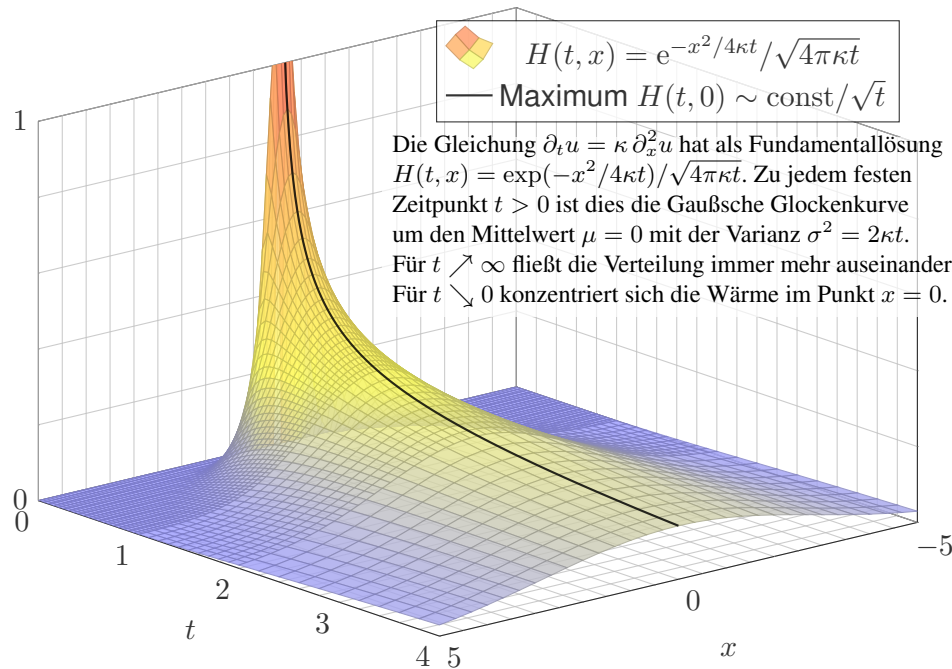
Für den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ nutzen wir die majorisierte Konvergenz D2D: Die Majorante $|f(y) \varphi(\varepsilon y)| \leq |f(y)| \cdot M$ mit $M := \sup|\varphi|$ ist integrierbar. Für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(y) \varphi(\varepsilon y) = f(y) \varphi(0)$. Also folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \searrow 0} [f(y) \varphi(\varepsilon y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(0) dy = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \varphi(0) \end{aligned}$$

(2b) Wir nutzen in (2a) nur $M = \text{ess sup}|\varphi| < \infty$ und Stetigkeit in 0.

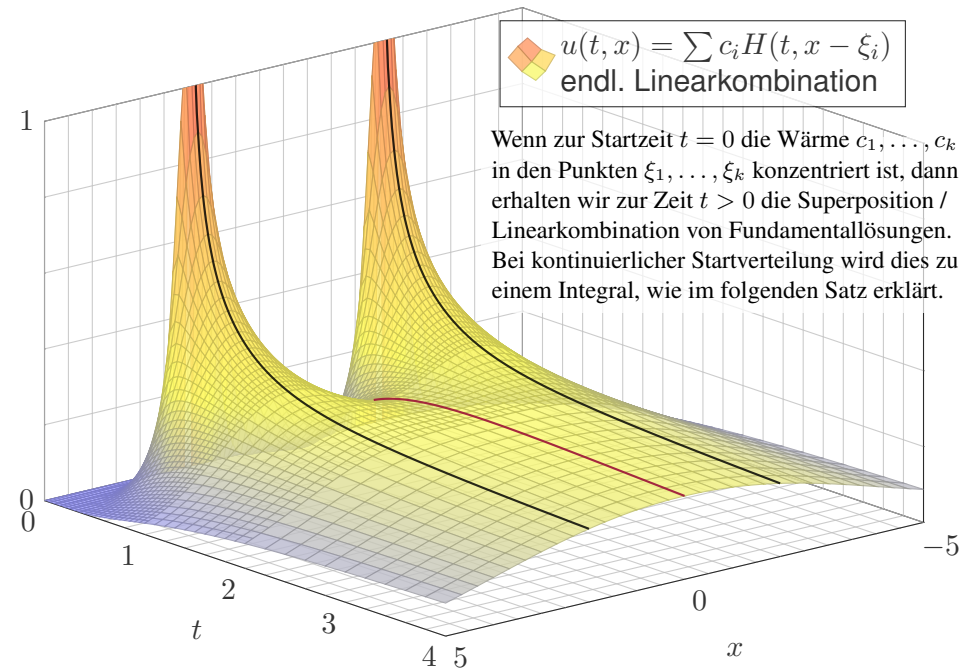
Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

D513
Ergänzung



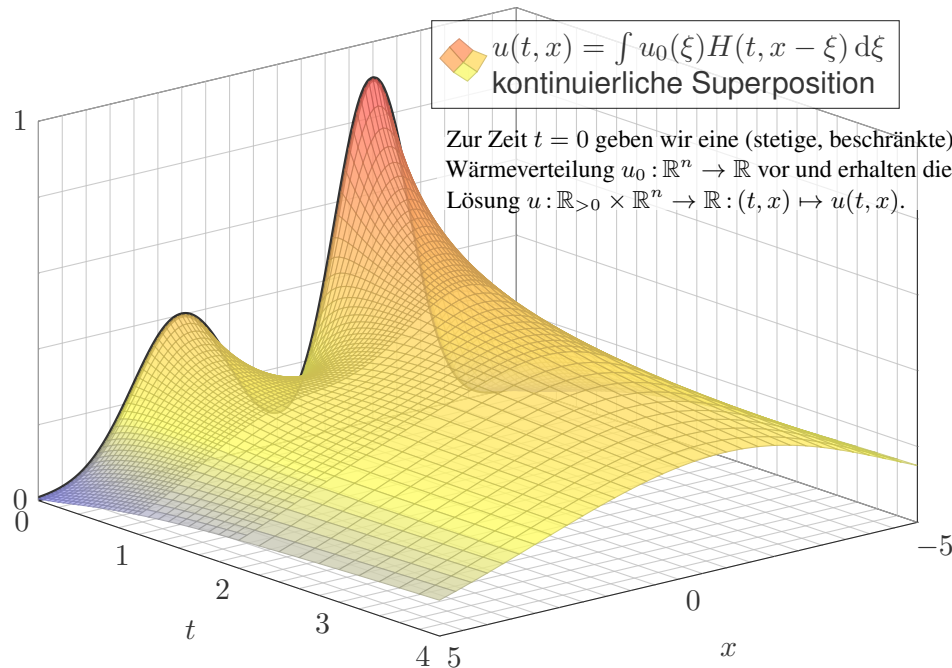
Superposition von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

D514
Ergänzung



Superposition von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

D515
Ergänzung



Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

D516
Ergänzung

Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$.

(3) Aus $u(0, x) = \sin(kx)$ für $t = 0$ folgt $u(t, x) = e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$. Aus $u(0, x) = \sum_k c_k \sin(kx)$ folgt $u(t, x) = \sum_k c_k e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$. Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Aufgabe: (1a) Berechnen Sie die Ableitungen $\partial H/\partial t$ und $\partial^2 H/\partial x_i^2$. Prüfen Sie so nach, dass H tatsächlich die Gleichung $\partial_t H = \kappa \Delta H$ löst.

Lösung: (1a) Wir untersuchen die Funktion $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H(t, x_1, \dots, x_n) = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{4\kappa t}\right)$$

Wir leiten zweimal nach x_1, \dots, x_n und einmal nach t ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{-x_i}{2\kappa t} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} &= (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{x_i^2}{4\kappa^2 t^2} - 2\pi(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{|x|^2}{4\kappa t^2} - 2\pi\kappa n(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \end{aligned}$$

Die Summe ergibt das erhoffte Ergebnis $\partial_t H = \kappa \Delta H$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \right)$$

(1d) Jede Verschiebung $H(t, x - \xi)$ nach $\xi \in \mathbb{R}^n$ löst obige PDE, also auch jede Linearkombination $u(t, x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x - \xi_j)$: Da unsere PDE linear ist, erhalten wir mühelos $(\partial_t - \kappa \Delta)u = 0$. Diese Lösung beginnt mit Wärmemenge c_j im Punkt ξ_j für $j = 1, \dots, N$. Damit können wir jede **diskrete Anfangsverteilung** lösen! Beispiel:

(1e) Die zweite Graphik [D514](#) zeigt die Diffusion der Wärmemenge 2, die zur Zeit $t = 0$ in den Punkten $x = \pm 2$ konzentriert ist. Für $t > 0$ ist dies die Überlagerung von zwei Glockenkurven mit $\mu = \pm 2$ und $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Im Punkt $x = 0$ steigt die Wärmemenge für $0 \leq t \leq t_0$ und fällt für $t \geq t_0$ gegen 0. Die expliziten Werte berechnet man durch Kurvendiskussion.

Eine **kontinuierliche Anfangsverteilung** $u_0(x)$ führt entsprechend zu

$$u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition von Fundamentallösungen. Auch diese Lösung $u(t, x)$ wollen wir schließlich nachrechnen.

☺ Unsere Fundamentallösung H erfüllt $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$. Diese schöne Funktion ist vollkommen explizit und sehr nützlich! Wir wollen uns mit ihr vertraut machen und hieraus weitere, gar alle Lösungen konstruieren.

Aufgabe: (1b) Skizzieren Sie $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n = 1$ und $\kappa = 1$.

(1c) Für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $H(t, x) \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$. Für $t \searrow 0$ ist die Verteilung $H(t, x)$ beliebig eng um $x = 0$ konzentriert.

(1d) Löst auch $u(t, x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x - \xi_j)$ die Gleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$? Welche Startverteilung erhalten wir hier für $t \searrow 0$?

(1e) Zu $t = 0$ konzentrieren wir jeweils die Wärmemenge 1 in $x = \pm 2$. Wie fließt die Wärme? Welche Wärmedichte wird in $x = 0$ erreicht?

Lösung: (1b) Unsere erste Graphik [D513](#) zeigt die Diffusion der Wärmemenge 1, die zur Zeit $t = 0$ im Punkt $x = 0$ konzentriert ist.

(1c) Für festes $t > 0$ ist $H(t, x)$ eine Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert $\mu = 0$ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. [C231](#) Für $t \searrow 0$ gilt $\sigma \searrow 0$: Anschaulich konzentriert sich die Verteilung beliebig eng um $x = 0$.

Aufgabe: (2) Rechnen Sie für jede Startverteilung $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nach, dass die angegebene Funktion $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Lösung: (2a) Wir ziehen die **Ableitung unters Integral** und erhalten:

$$(\partial_t - \kappa \Delta)u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi) \underbrace{(\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi)}_{= 0, \text{ Fundamentallösung!}} d\xi = 0$$

Ist dies gerechtfertigt? Ja, denn die partiellen Ableitungen aus (1) sind majorisiert integrierbar! Dies prüft man geduldig nach, siehe [D419](#).

(2b) Dank **Transformationssatz** gilt für $\zeta = x - \xi$ und $\xi = x - \zeta$:

$$u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi) H(t, x - \xi) d\xi = \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x - \zeta) H(t, \zeta) d\zeta$$

Damit prüfen wir schließlich die **Anfangswerte** für $t = 0$ nach:

$$\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = \lim_{t \searrow 0} \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x - \zeta) H(t, \zeta) d\zeta = u_0(x)$$

Die Verteilung $\zeta \mapsto H(t, \zeta)$ hat Gesamtmasse 1, für $t \searrow 0$ beliebig eng um $\zeta = 0$ konzentriert, das Integral geht daher gegen $u_0(x)$. Satz D5c: Hierzu sei u_0 stetig (zumindest im Punkt x) und (essentiell) beschränkt.

Die **Wärmeleitungsgleichung** $\partial_t u = \kappa \Delta u$ hat die Fundamentallösung $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wie oben erklärt. Zur Startverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir die zugehörige Lösung u durch **Superposition** (Faltung)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Das **Newton-Potential** einer Masse m im Nullpunkt ist $F(x) = m/|x|$. Dies ist die Fundamentallösung der Potentialgleichung $\Delta F = 0$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. (Etwaige Konstanten und Vorzeichen lasse ich weg.)

Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$. Außerhalb von K ist das Potential dann die **Superposition** (Faltung)

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = \int_{\xi \in K} \frac{\varrho(\xi)}{|\xi - x|} d\xi.$$

Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie. Solche Integrale treten in vielen physikalisch-technischen Anwendungen auf, daher auch in der Mathematik. Damit wollen wir nun rechnen lernen.

Definition D5E: Faltung von Funktionen

Zu Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir ihre **Faltung** $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Hierzu verlangen wir jeweils, dass der Integrand absolut integrierbar ist, zumindest für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, also alle bis auf eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$.

Die folgenden hilfreichen Sätze geben Auskunft, wann diese wesentliche Voraussetzung erfüllt ist, und welche Eigenschaften wir erwarten dürfen.

Satz D5F: Faltung von L^1 -Funktionen

(0) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, dann auch $a, b, c : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a(x, y) = f(x) g(y)$, $b(x, y) = f(y) g(x - y)$, $c(x, y) = f(x - y) g(y)$, denn für die L^1 -Normen gilt $\|a\|_{L^1} = \|b\|_{L^1} = \|c\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$.

(1) Das **Faltungsprodukt** $*$: $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n) : (f, g) \mapsto f * g$ erfüllt $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$, ist bilinear, kommutativ und assoziativ.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!

Lösung: (0a) Wir nutzen unmittelbar den Satz C1E von Fubini:

$$\int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}} |f(x) \cdot g(y)| d(x, y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |g(y)| dy dx$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy dx \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| dx \cdot \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

Ebenso können wir umgekehrt erst über x und dann über y integrieren.

(0b) Für $b(x, y) = f(y) g(x - y) = a(y, x - y) = a \circ \Phi(x, y)$ nutzen wir den Transformationssatz C2B mit $\Phi(x, y) = (y, x - y)$ und $|\det \Phi'| = 1$.

(0c) Für $c(x, y) = f(x - y) g(y) = a(x - y, y) = a \circ \Psi(x, y)$ nutzen wir den Transformationssatz C2B mit $\Psi(x, y) = (x - y, y)$ und $|\det \Psi'| = 1$.

(1a) Dank (0) sind die beiden Integranden b und c absolut integrierbar. Dank Fubini C1E existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ das Integral über $y \in \mathbb{R}^n$. Die Ausnahmemenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist vom Volumen Null, also $\text{vol}_n(N) = 0$.

(1b) Beide Integrale sind gleich dank Transformation C2B $y = x - y'$.

(1c) Für die L^1 -Norm der Faltung $f * g$ gilt, wie bereits in (0) gesehen:

$$\|f * g\|_{L^1} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx$$

$$\leq \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dy dx$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| dy \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| dx = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

(1d) Linearität: Das Integral $L^1 \rightarrow \mathbb{C} : h \mapsto \int h(x) dx$ ist linear. Es folgt: Zu jedem festen g ist die Zuordnung $f \mapsto f * g$ linear. Ebenso $g \mapsto f * g$.
 Kommutativität: Dank (1b) gilt $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$.
 😊 Hierfür genügt bereits die absolute Integrierbarkeit von b bzw. c .
 (1e) Assoziativität: Wir setzen die Definition ein und rechnen geduldig:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \overbrace{\int_{z \in \mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z) dz}^{(f * g)(y)} \cdot h(x-y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z) \cdot h(x-y) dz dy \\ (f * (g * h))(x) &= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot \overbrace{\int_{z \in \mathbb{R}^n} g(z) \cdot h(y'-z) dz}^{(g * h)(y')} dy' \\ &= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot g(z) \cdot h(y'-z) dz dy' \end{aligned}$$

Beide Integrale sind gleich: Dank Fubini können wir die Integration über y, y' nach innen ziehen und so die Substitution $y' = x - y + z$ anwenden.

Satz D5G: Faltung: Beschränktheit, Stetigkeit und Ableitung

- (0) Für $(f, g) \in L^\infty \times L^1$ ist $f * g$ definiert und $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$.
- (1) Für $(f, g) \in C_b \times L^1$ gilt $f * g \in C_b$ und $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \leq |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$.
- (2) Für $(f, g) \in C_b^1 \times L^1$ bzw. $L^1 \times C_b^1$ gilt $f * g \in C_b^1$ und

$$\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g \quad \text{bzw.} \quad \partial_i(f * g) = f * (\partial_i g).$$

Aufgabe: Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!

Lösung: (0) Es gilt $|f(x)| \leq M := \|f\|_{L^\infty}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $\text{vol}_n(N) = 0$.

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| \leq \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| dy \\ &\leq \int_{y \in \mathbb{R}^n} M \cdot |g(y)| dy = M \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy = M \cdot \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

Dies zeigt die absolute Integrierbarkeit, also existiert die Faltung $f * g$. Das essentielle Supremum über $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$. Genauso zeigen wir $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty}$, etwa dank $f * g = g * f$.

(1) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und beschränkt, kurz $f \in C_b$. Wir wollen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0}$ unter das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x-y) g(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - y) g(y) dy = (f * g)(x_0) \end{aligned}$$

Ist das gerechtfertigt? Wir nutzen Satz D3D: Der Integrand $f(x-y) g(y)$ ist in x stetig und in y integrierbar mit Majorante $h(y) = |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot |g(y)|$.

Somit ist $f * g$ stetig und nach (0) beschränkt: $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \leq |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$. Ebenso für $f \in L^1$ und $g \in C_b$ gilt $f * g \in C_b$ und $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{L^1} \cdot |g|_{\mathbb{R}^n}$. Hierzu können wir auch die Kommutativität $f * g = g * f$ nutzen.

😊 Ist einer der Faktoren f oder g stetig und beschränkt, so auch $f * g$. Das ist eine einfache Stetigkeitsregel, die sich häufig nutzen lässt.

😊 Slogan: Die Faltung $f * g$ erbt die besten Eigenschaften von f und g , etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

(2) Die Funktionen f und $\partial_i f$ seien stetig und beschränkt. Wir wollen die Ableitung ∂_i unter das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \partial_i(f * g)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f(x-y) g(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f)(x-y) g(y) dy = ((\partial_i f) * g)(x) \end{aligned}$$

Wir nutzen hierzu Satz D3E: Der Integrand $(\partial_i f)(x-y) g(y)$ ist in x stetig und in y integrierbar mit Majorante $h(y) = |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot |g(y)|$.

😊 Wir erhalten $\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g$ und $|\partial_i(f * g)|_{\mathbb{R}^n} \leq |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$. Analog gilt $\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g)$ und $|\partial_i(f * g)|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\partial_i f\|_{L^1} \cdot |g|_{\mathbb{R}^n}$.

😊 Das sind hilfreiche Ableitungsregeln, die oft auftreten und nützen.

😊 Ist einer der beiden Faktoren f, g glatt, sagen wir $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und jede Ableitung $\partial^\alpha f$ beschränkt, so gilt dies auch für $f * g$.

😊 Slogan: Die Faltung $f * g$ erbt die besten Eigenschaften von f und g , etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

Der Kalkül der Distributionen vereinfacht viele Rechnungen, manchen gibt er überhaupt erst einen wohldefinierten Sinn, oft stützt und präzisiert er wunderbar unsere physikalische Anschauung und die Anwendungen. Wir können damit jeder stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ableitung zuordnen, selbst wenn f klassisch nicht differenzierbar ist (wie B4A). Hierzu verallgemeinern wir den Funktionsbegriff zu **Distributionen**, die man daher auch als **verallgemeinerte Funktionen** bezeichnet. Die Idee ist einfach: Wir messen f durch **Testfunktionen** φ gemäß

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

Wir begreifen f also als lineare Abbildung $\Lambda_f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$. Ist φ glatt mit kompaktem Träger, so existiert dieses Integral immer. Ist zudem auch f stetig differenzierbar, so gilt dank partieller Integration

$$\Lambda_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Die Randterme $[f\varphi]_{-r}^{+r}$ verschwinden für jede Testfunktion φ und $r \rightarrow \infty$. Die rechte Seite betrifft nur f , nicht f' , und gilt für alle Testfunktionen φ .

Dies legt nahe, die **Distributionsableitung** von f zu definieren durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) := - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Ist f stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$, wie oben gesehen, und die Distributionsableitung stimmt mit der klassischen Ableitung überein.

Dieser Ableitungsprozess lässt sich nun beliebig wiederholen: Die k -te Distributionsableitung von f ist demnach

$$(\Lambda_f)^{(k)}(\varphi) := (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$$

Wir können so jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen als eine verallgemeinerte Funktion Λ_f (Distribution). Im Distributionensinne ist Λ_f beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen $(\Lambda_f)^{(k)}$ sind Distributionen, im Allgemeinen sind sie jedoch keine klassischen Funktionen mehr.

Wir verlangen C^∞ -Glattheit nur für die Testfunktionen φ . Für unsere Funktion f hingegen genügt lokale Integrierbarkeit [C444]; wir fordern keinerlei Glattheit. Diese Sichtweise ist ebenso einfach wie genial! Sie erfordert lediglich den Mut, Funktionen allgemeiner zu begreifen.

Damit erreichen wir folgende drastische Vereinfachungen:

- Jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Distribution, allgemeiner sogar jede lokal integrierbare Funktion (D5J).
- Jede Distribution ist differenzierbar im Distributionensinne, und ihre Ableitung ist selbst wiederum eine Distribution (D5N).
- Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$: Klassische und Distributionsableitung sind dann identisch (D5N).
- Die klassischen Ableitungsregeln gelten weiterhin (D5o).
- Grenzübergänge und Ableitungen / Integrale vertauschen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (D5N).

Insbesondere bei **partiellen Differentialgleichungen** treten peinliche Schwierigkeiten auf, die erst mit Distributionen gelöst werden können. Zum Beispiel erfüllt die klassische Ableitung die Vertauschungsregel $\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$ nur für hinreichend glatte Funktionen (C^2 , siehe D4A). Für Distributionen hingegen gilt sie immer! Sie erahnen hieran bereits, dass Distributionen wirklich das Leben vereinfachen. Genauer gesagt: Distributionen vervollständigen die Differential- und Integralrechnung.

Der **Kalkül der Distributionen** entspringt praktischen Bedürfnissen und entstand seit etwa 1900 in der Physik und den Ingenieurwissenschaften zunächst als nützliche Rechentechnik ohne theoretische Grundlage: Dort treten partielle Differentialgleichungen auf, die keine klassischen Lösungen haben, sehr wohl aber Lösungen im Distributionensinne. (Heaviside in den 1880er Jahren, Dirac und Sobolev in den 1930ern).

Aus diesem Grund sind Distributionen sehr natürlich und unumgänglich. In Physik und Elektrotechnik treten häufig das Dirac-Funktional δ_0 [D553] und die Heaviside-Funktion $u = \mathbf{I}_{[0, \infty[}$ [D570] auf. Hier drängen sich die beliebten Rechenregeln $\int_{-\infty}^x \delta_0(t) dt = u(x)$ und $u'(x) = \delta_0(x)$ geradezu auf, sie haben aber klassisch überhaupt keinen Sinn. Erst Distributionen klären dieses Mysterium und lösen so alle Sorgen in Wohlgefallen auf.

Die **Theorie der Distributionen**, die den Kalkül begründet, rechtfertigt und vollendet, wurde erst in den 1940er Jahren von Laurent Schwartz entwickelt; sie dient bis heute als Grundstein und bewährt sich täglich. Hierfür erhielt er auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1950 die Fields-Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen der Mathematik.

Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der eindim. **Wellengleichung**:

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$$

Diese fundamentale Gleichung beschreibt lineare Wellen aller Art, zum Beispiel eine schwingende Saite eines Musikinstruments. R301

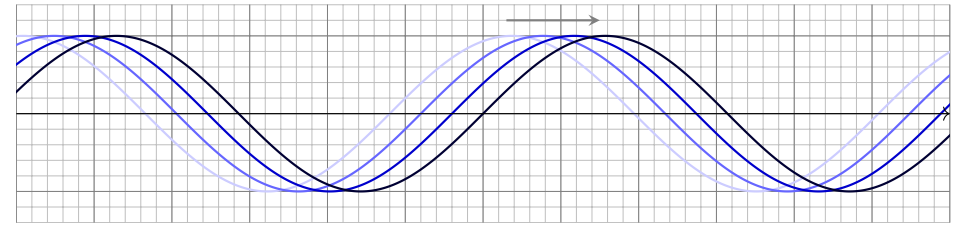
Wir wünschen uns hierzu eine allgemeine mathematische Theorie, die der physikalischen Anschauung und dem Experiment entspricht.

Aufgabe: (1) Ist $u(t, x) = \sin(x - ct)$ eine Lösung? und $\sin(x + ct)$? Was bedeuten diese Lösungen intuitiv / anschaulich / graphisch?

(2) Ist auch $u(t, x) = f(x \pm ct)$ für $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Lösung? Etwa für die gaußsche Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2/2}$?

(3) Ist $u(t, x) = f(x \pm ct)$ für jede stetige Funktion $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Lösung? Etwa für die Dreiecksfunktion $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$?

Ist aus physikalischer Sicht $f \in C^2$ notwendig oder genügt $f \in C^0$? Wie bringen Distributionen hier Theorie und Anwendung in Einklang?



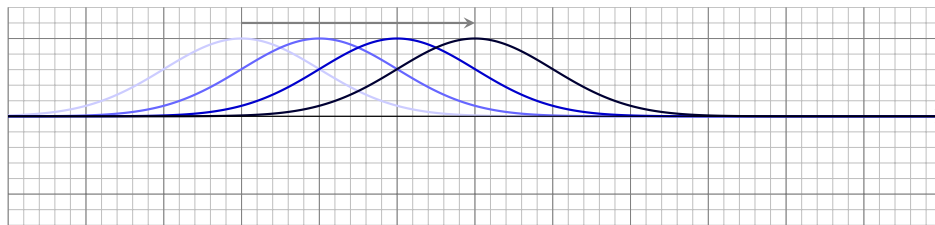
Lösung: (1) Zunächst untersuchen wir die Funktion $u(t, x) = \sin(x - ct)$. Wir leiten zweimal ab und prüfen, ob die Wellengleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= -c \cos(x - ct), & \partial_x u(t, x) &= + \cos(x - ct), \\ \partial_t^2 u(t, x) &= -c^2 \sin(x - ct), & \partial_x^2 u(t, x) &= - \sin(x - ct). \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$, wie gefordert.

😊 Anschaulich ist $u(t, x) = \sin(x - ct)$ eine sinusförmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts bewegt.

Entsprechend ist auch $v(t, x) = \sin(x + ct)$ eine Lösung: Dies ist eine sinusförmige Welle, die sich mit Geschwindigkeit c nach links bewegt.



(2) Sodann untersuchen wir allgemein die Funktion $u(t, x) = f(x - ct)$. Wir leiten ab und prüfen, ob die ersehnte Wellengleichung erfüllt ist:

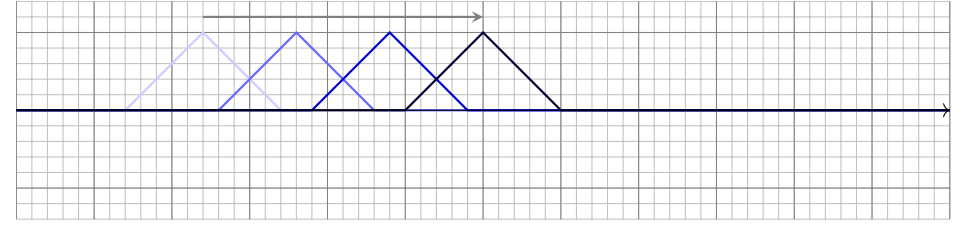
$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= -cf'(x - ct), & \partial_x u(t, x) &= f'(x - ct), \\ \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 f''(x - ct), & \partial_x^2 u(t, x) &= f''(x - ct). \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt dann $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$, wie gefordert.

Anschaulich ist diese Lösung $u(t, x) = f(x \mp ct)$ eine f -förmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts / links bewegt.

😊 Man spricht ganz anschaulich von einem **Wellenpaket** der Form f .

⚠ Wir setzen vorsorglich f als zweimal stetig differenzierbar voraus.



(3) Die vorige Rechnung gilt für alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; wir müssen allerdings f als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen, damit wir die benötigten Ableitungen f' und f'' definieren und nutzen können.

Die Dreiecksfunktion $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$ ist zwar stetig, aber nicht differenzierbar (in 0 und ± 1). Dennoch ist $u(t, x) = f(x \pm ct)$ physikalisch durchaus sinnvoll. Unsere Theorie verlangt unnötige Einschränkungen!

😊 Die Theorie der Distributionen erlaubt, zu jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die (Distributions-)Ableitungen f' und f'' etc. zu definieren. In diesem Sinne löst $u(t, x) = f(x \pm ct)$ tatsächlich die Wellengleichung!

😊 Dies vervollständigt die Lösungsmenge, wie physikalisch erwünscht! Wieder einmal liefert abstrakte Mathematik konkret nutzbare Werkzeuge.

Der erste Schritt ist die Festlegung geeigneter **Testfunktionen**:
 Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **glatt** (kurz C^∞), wenn sie **beliebig oft differenzierbar** ist, also alle Ableitungen $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ existieren.
 Sind f und g glatt, so auch λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $f + g$ und $f \cdot g$.
 Die Menge $C^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller glatten Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bildet somit einen **\mathbb{R} -Vektorraum** und sogar eine **\mathbb{R} -Algebra** mit Eins.
 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf Ω ist

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(\varphi) \Subset \Omega \}.$$

Der **Träger** (engl. *support*) der Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0 \}$, wo φ nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0 \}}.$$

Wir schreiben $K \subseteq \Omega$, wenn K eine Teilmenge von Ω ist, und $K \Subset \Omega$, wenn K zudem kompakt ist, also beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{R}^n .

Übung: Ist auch $\mathcal{D}(\Omega)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum? eine \mathbb{R} -Algebra? mit Eins? Können Sie Beispiele $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ konstruieren? Siehe B4E und B4F!

Der zweite Schritt ist die Klärung des passenden **Konvergenzbegriffs**:
 Für $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $K \Subset \Omega$ nutzen wir die **Maximumsnorm**

$$|\varphi|_K := \max\{ |\varphi(x)| \mid x \in K \}.$$

Wir nennen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ eine **Nullfolge**, kurz $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, wenn gilt:

- 1 $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$,
- 2 $|\partial^\nu \varphi_k|_K \rightarrow 0$ für jeden Multiindex $\nu \in \mathbb{N}^n$ und $k \rightarrow \infty$.

(1) Alle Träger $\text{supp}(\varphi_k)$ liegen in einem *gemeinsamen* Kompaktum $K \Subset \Omega$; sie dürfen Ω nicht ausschöpfen oder nach Unendlich entkommen. (2) Die Bedingung $|\varphi_k|_K \rightarrow 0$ bedeutet, dass φ_k *gleichmäßig* gegen die Nullfunktion 0 konvergiert. Dies fordern wir zudem für alle Ableitungen $(\partial^\nu \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Mit dieser strengen Forderung erreichen wir, dass der Ableitungsoperator stetig ist:

Lemma D5H: Auf Testfunktionen ist die Ableitung stetig!

Der Ableitungsoperator $\partial^\alpha: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ist linear und zudem stetig, denn für jede Nullfolge $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ gilt insbesondere $\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

Eine Abbildung $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ nennen wir **Funktional**. Ein lineares Funktional Λ ist **stetig**, wenn Λ jede Nullfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ abbildet in eine Nullfolge $(\Lambda(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} : Aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt $\Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0$ in \mathbb{R} . Solche Abbildungen heißen **Distributionen**.

Unsere Motivation und Vorbereitung führen zu folgender Präzisierung:

Definition D5I: Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf Ω ist

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(\varphi) \Subset \Omega \}.$$

Eine **Distribution** auf Ω ist, dual hierzu, ein stetiges lineares Funktional $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Stetigkeit von Λ bedeutet dabei, wie oben erklärt:

$$\text{Aus } \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \text{ folgt } \Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Den Vektorraum aller Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{ \Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid \Lambda \text{ ist linear und stetig} \}.$$

Eine Folge $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ **konvergiert** gegen $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ **im Distributionensinne**, kurz $\Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda$, wenn gilt:

$$\Lambda_k(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für jede Testfunktion } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Diese Definition fasst unsere mathematischen Vorüberlegungen zusammen und präzisiert sie — als Fundament für alles Folgende. Sie entspricht zudem sehr intuitiv dem physikalischen Messvorgang: Angenommen, eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ beschreibt eine physikalische Größe $f(x)$ als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, etwa die Temperatur, die Massendichte oder die elektrische Ladungsdichte. Kein Messvorgang ist so präzise, dass er den Wert $f(x)$ genau im Punkt x ermitteln könnte. Vielmehr liefert die Messung einen gemittelten Wert $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$, wobei φ dem Messverfahren entspricht. Zur Illustration stellen wir uns $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ vor. Je stärker φ um den Punkt x konzentriert ist, desto genauer entspricht die Messung dem Wert $f(x)$. Wir messen also f , indem wir mit Funktionen φ testen, und dies ist unser einziger Zugang zur Funktion f : Sie äußert sich allein durch ihr Wirkung auf Testfunktionen φ , nur darin besteht f , siehe D5k. Mit D5I erheben wir diese Sichtweise zur Definition: Eine Distribution Λ ordnet jeder Testfunktion φ eine reelle Zahl $\Lambda(\varphi)$ zu, als Ergebnis der Messung. Diese Zuordnung $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ soll linear und stetig in φ sein.

Satz D5J: Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Distribution $\Lambda_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ durch das Integral

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Die Zuordnung $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f$ ist linear und stetig, jedoch nicht injektiv: Der Kern sind die Nullfunktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, also genau diejenigen Funktionen, die fast überall gleich Null sind. Für $f, g \in C(\Omega)$ hingegen gilt $\Lambda_f = \Lambda_g$ genau dann, wenn $f = g$ gilt. Jede Distribution $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, die sich als $\Lambda = \Lambda_f$ durch eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ darstellen lässt, heißt **regulär**, andernfalls heißt Λ **singulär**.

😊 Mittels $f \mapsto \Lambda_f$ betrachten wir jede lokal integrierbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Distribution und sagen hierzu „ f im Distributionensinne“. Genau dann gilt $\Lambda_f = \Lambda_g$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, wenn fast überall $f = g$ gilt (D5K).

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!

(1) Jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $K := \text{supp}(\varphi) \Subset \Omega$. Unsere gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar, demnach gilt $\int_K |f(x)| dx < \infty$. Wir erhalten hieraus die folgende Schranke bezüglich L^1 -Norm:

$$\int_{\Omega} |f(x) \varphi(x)| dx = \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \int_K |f(x)| dx \cdot |\varphi|_K < \infty$$

Insbesondere ist das Integral $\Lambda_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ wohldefiniert.

(2) Damit Λ_f eine Distribution ist, haben wir zweierlei sicherzustellen: Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist (a) linear in φ und zudem (b) stetig in φ .

(2a) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist linear in φ dank Linearität des Integrals: Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \Lambda_f(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \int_{\Omega} f(x) [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)] dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx = \lambda \Lambda_f(\varphi) + \mu \Lambda_f(\psi) \end{aligned}$$

(2b) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist stetig in φ dank obiger Abschätzung:

Zu jeder Nullfolge $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ existiert ein gemeinsames Kompaktum $K \Subset \Omega$ mit $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und hierauf gilt gleichmäßige Konvergenz $|\partial^{\alpha} \varphi_k|_K \rightarrow 0$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $k \rightarrow \infty$.

Hieraus folgt dank der oben erklärten Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(\varphi_k)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) \varphi_k(x)| dx \\ &\leq \int_K |f(x)| dx \cdot |\varphi_k|_K \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dies beweist die Stetigkeit: Aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt $\Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0$ in \mathbb{R} . Somit ist $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ linear und stetig, also eine Distribution $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(3a) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist linear in f dank Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda f + \mu g}(\varphi) &= \int_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)] \varphi(x) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = \lambda \Lambda_f(\varphi) + \mu \Lambda_g(\varphi) \end{aligned}$$

(3b) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist stetig in f dank der obigen Abschätzung:

Seien $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ gelte L^1 -Konvergenz $f_k \rightarrow 0$, also $\int_K |f_k| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann folgt $\Lambda_{f_k} \rightarrow \Lambda_0$, denn $|\Lambda_{f_k}(\varphi)| \leq \int_K |f_k(x)| dx \cdot |\varphi|_K \rightarrow 0$.

(3c) Wir zeigen schließlich (wie in B4G) die Injektivität der Zuordnung

$$C(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f.$$

Dank Linearität (3a) genügt zu zeigen: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Lambda_f = 0$ gilt $f = 0$. Äquivalent hierzu beweisen wir die Kontraposition: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \neq 0$ gilt $\Lambda_f \neq 0$.

Angenommen $f \neq 0$, das heißt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Für $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f .) Da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, existiert um a ein Ball $B(a, 2\varepsilon) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in B(a, 2\varepsilon)$ gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\text{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$. Wir erhalten $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$: Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt $\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} f \varphi \geq \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} b \varphi = b \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} \varphi > 0$.

Satz D5K: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sind äquivalent:

- 0 $f = 0$ fast überall, das heißt $\text{vol}_n(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}) = 0$.
- 1 $\int_{\Omega} |f(x)| dx = 0$, das heißt die L^1 -Norm verschwindet.
- 2 $\Lambda_f = 0$, also $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- 3 $\int_A f(x) dx = 0$ für jeden kompakten Quader $A \subseteq \Omega$.
- 4 $\int_A f(x) dx = 0$ für jede beschränkte messbare Menge $A \subseteq \Omega$.

Für je zwei Funktionen $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ sind demnach äquivalent:

- 0 $f = g$ fast überall, das heißt $\text{vol}_n(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.
- 1 $\int_{\Omega} |f(x) - g(x)| dx = 0$, das heißt der L^1 -Abstand verschwindet.
- 2 $\Lambda_f = \Lambda_g$, also $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- 3 $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$ für jeden kompakten Quader $A \subseteq \Omega$.
- 4 $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$ für alle $A \subseteq \Omega$ beschränkt und messbar.

In (2) genügen bereits $\varphi \in \mathcal{D}_{\otimes}(\Omega)$, das sind Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ in Produktform $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$, wobei $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

Aufgabe: Zeigen Sie die Implikationen $(1) \Leftrightarrow (0) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

Lösung: Die Implikationen „(0) \Rightarrow (1, 2, 3, 4)“ sind offensichtlich (A4G): Jeder Integrand ist fast überall Null, somit verschwindet das Integral.

„(1) \Rightarrow (0)“: Diese Umkehrung garantiert der Verschwindungssatz A4G.

„(2) \Rightarrow (3)“: Sei $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \Omega$ ein kompakter Quader. Wäre die Indikatorfunktion $\varphi := \mathbf{I}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hier als Testfunktion zulässig, so könnten wir (2) direkt auf $\int_A f(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ anwenden.

Leider gilt $\mathbf{I}_A \notin \mathcal{D}(\Omega)$, doch wir können $\varphi_k \searrow \mathbf{I}_A$ durch Testfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ approximieren und erhalten dank Grenzwertsatz D2D:

$$\int_A f(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x) \varphi_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

Ausführlich [B441]: Zum gegebenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ konstruieren wir eine glatte Hutfunktion $\psi = \psi_k^{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = 1$ für $a \leq x \leq b$ und $\psi(x) = 0$ für $x \leq a - 1/k$ und für $x \geq b + 1/k$ sowie monoton wachsend auf $[a - 1/k, a]$ und monoton fallend auf $[b, b + 1/k]$. Wir definieren $\varphi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch das Produkt $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \psi_k^{a_1, b_1}(x_1) \cdots \psi_k^{a_n, b_n}(x_n)$.

„(3) \Rightarrow (4)“: Nach Voraussetzung (3) gilt $\int_A f(x) dx = 0$ für alle kompakten Quader $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$. Daraus folgt es für Vereinigungen:

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx - \int_{A_1 \cap A_2} f(x) dx = 0$$

Per Induktion folgt dasselbe für jede k -fache Vereinigung:

$$\int_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k} f(x) dx = \int_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}} f(x) dx + \int_{A_k} f(x) dx - \int_{(A_1 \cap A_k) \cup \dots \cup (A_{k-1} \cap A_k)} f(x) dx = 0$$

Dank Grenzwertsatz D2D gilt dies für jede abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ von Quadern $A_k \subseteq K$ in einem Kompaktum $K \subseteq \Omega$:

$$\int_A f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_1 \cup \dots \cup A_k} f(x) dx = 0$$

Ebenso folgt $\int_A f(x) dx = 0$ für jede beschränkte Borel-Menge $A \subseteq \Omega$.

Wir setzen hier die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nur als lokal integrierbar voraus. Die Beschränktheit von A ist daher technisch notwendig: Sie garantiert, dass A in einem geeigneten Kompaktum $K \subseteq \Omega$ liegt; nur so können wir die Voraussetzung $\int_K |f| < \infty$ und majorisierte Konvergenz D2D nutzen. Auch $\int_A f(x) dx$ ist zunächst nur definiert für A beschränkt und messbar.

„(4) \Rightarrow (1)“: Wir zerlegen Ω in die drei messbaren Teilmengen

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}, \\ A_- &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}, \\ A_0 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Dank Voraussetzung (4) und monotoner Konvergenz folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0,r)} |f(x)| dx &= \int_{A_+ \cap \bar{B}(0,r)} f(x) dx - \int_{A_- \cap \bar{B}(0,r)} f(x) dx = 0, \\ \int_{\Omega} |f(x)| dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0,r)} |f(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

☺ Wir können $f = 0$ durch jedes dieser vier Kriterien (1–4) testen. Ebenso $f = g$, indem wir den Satz auf die Differenz $f - g$ anwenden.

Definition D5L: Dirac-Funktional

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und hierin sei $p \in \Omega$ ein Punkt. Wie zuvor ist $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ der Vektorraum der Testfunktionen. Das **Dirac-Funktional** δ_p ist die Auswertung im Punkt p , also

$$\delta_p : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(p).$$

Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definieren wir allgemeiner

$$\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p).$$

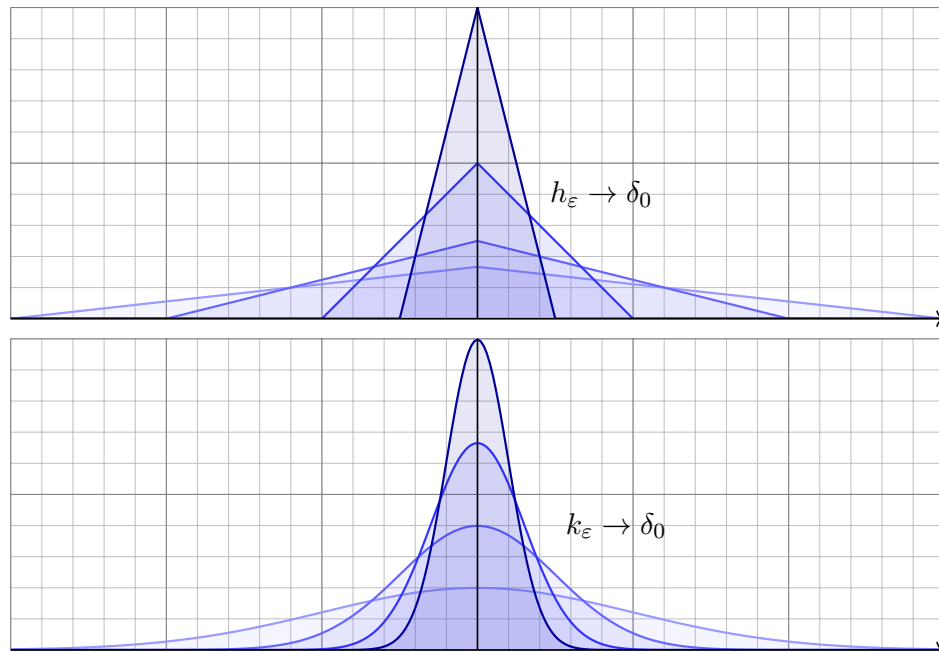
Aufgabe: Sind dies Distributionen? Was ist hierfür zu prüfen?

Lösung: Nach Definition D5I müssen wir Linearität und Stetigkeit der Zuordnung $\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p)$ prüfen. Beides ist klar!

Linearität: Für je zwei Testfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und reelle Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt dank Linearität der Ableitung $\delta_p^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)(p) = \lambda\delta_p^\alpha(\varphi) + \mu\delta_p^\alpha(\psi)$.

Stetigkeit: Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ eine Nullfolge. Das heißt, es gibt ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ mit $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $|\partial^\alpha \varphi_k|_K \rightarrow 0$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $k \rightarrow \infty$. Hieraus folgt insbesondere $|\delta_p^\alpha(\varphi_k)| = |\partial^\alpha \varphi_k(p)| \leq |\partial^\alpha \varphi_k|_K \rightarrow 0$, also $\delta_p^\alpha(\varphi_k) \rightarrow 0$.

Approximationen des Dirac-Funktional



! Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die das Funktional δ_p darstellt, also $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(p)$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ erfüllt. Eine Massenverteilung mit Dichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat die Gesamtmasse

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Wie beschreiben wir eine punktförmige Masse m im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$? In diesem Punkt herrscht dann wohl eine „unendlich große“ Dichte; naiv denken wir an $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq p$ und $f(p) = \infty$.

! Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ergibt immer Null, selbst wenn der Wert $f(p)$ noch so unendlich ist, denn der Träger $\{p\}$ ist eine Nullmenge. **A405** Was wir jedoch wollen, ist eine Punktmasse δ_p , sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_p(x) \varphi(x) dx = \varphi(p).$$

! Keine Funktion kann das leisten: Hierzu benötigen wir Distributionen! Hingegen können wir δ_p durch Funktionen $f_\varepsilon \rightarrow \delta_p$ approximieren, indem wir die Masse 1 immer dichter um den Punkt p konzentrieren. Die folgenden Beispiele und Satz D5c präzisieren diese Anschauung.

Approximationen des Dirac-Funktional

Aufgabe: Skizzieren Sie für $\varepsilon \searrow 0$ die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{[0, \varepsilon]}, \quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{I}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} \mathbf{I}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x), \quad k_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

- (1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x)$.
- (2) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ für $\varepsilon \searrow 0$? Wo liegt hier das Problem?
- (3) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ jede Funktion $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$?
- (4) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ im Distributionensinne?
- (5) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$. Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ im Distributionensinne?

Lösung: (1) Wir finden $f(0) = \infty$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. (2) Daher gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald φ stetig ist (im Punkt 0). 😊 Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! **B122** Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen **D205** und Glockenfunktionen **D409**. Allgemein zu (5) gilt der Grenzwertsatz D5c!

😊 Unsere Definition D5L ist einfach und klar: Das **Dirac–Funktional**

$$\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(0).$$

ordnet jeder Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ihre Auswertung $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ zu.

⚠ Manche sprechen stattdessen lieber von der **Dirac–Funktion**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zudem wird die Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ gefordert / vereinbart und die Rechenregel $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ eingeführt / behauptet.

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Die Funktion f hat die ersehnten Eigenschaften nicht! Das lässt sich nicht retten, es hilft kein Jammern, Behaupten, Verhandeln.

⚠ Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = 0$ für alle Funktionen φ .

😊 Wir wollen $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$, also ist Definition D5L der richtige Weg! Alles andere ist naives Wunschdenken, falsch und/oder unnützlich.

Die oben vorgeschlagene Dirac–Funktion f hat nicht die richtigen Eigenschaften. Gelingt uns dies mit irgendeiner anderen Funktion g ?

⚠ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \Omega$. Nehmen wir optimistisch an, es gäbe eine lokal integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Wie müsste solch ein g aussehen?

Aufgabe: (1) Es gilt $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$, das heißt, g ist eine Nullfunktion. Hinweis: Nutzen Sie den Verschwindungssatz D5k.

(2) Daraus folgt $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, ganz im Widerspruch zu unserer Annahme! Es ist aussichtslos.

Lösung: (1) Auf der offenen Menge $U = \Omega \setminus \{p\}$ verschwindet δ_p : Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq U$ gilt $\delta_p(\varphi) = \varphi(p) = 0$. Gilt $\delta_p = \Lambda_g$ wie angenommen, so besagt der Verschwindungssatz D5k: Es gilt $g(x) = 0$ für fast alle $x \in U$, somit für fast alle $x \in \Omega = U \cup \{p\}$.

(2) Aus $g = 0$ fast überall folgt $\Lambda_g = 0$, also insbesondere $\Lambda_g \neq \delta_0$.

😊 Wir nutzen und erproben hier unsere Integrations-Werkzeuge: Die Dirac–Distribution δ_p ist tatsächlich nicht regulär, sondern singulär.

Die obige Dirac–Funktion f soll ein punktförmiges Teilchen modellieren, mit Masse 1 konzentriert im Nullpunkt, insbesondere $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

⚠ Demnach entspräche $5f$ einem Teilchen mit Masse 5 im Nullpunkt.

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Wir multiplizieren punktweise: $5 \cdot 0 = 0$ und $5 \cdot \infty = \infty$.

Demnach gilt $5f = f$ und $\int_{\mathbb{R}} 5f(x) dx = 1$, aber $5 \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 5$. Das widerspricht grundlegend der Linearität des Integrals!

Nochmal: Die Funktion f hat die ersehnten Eigenschaften nicht!

😊 Auch hier ist Definition D5L der richtige Weg! Distributionen sind Funktionale, stetige lineare Abbildungen $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Sie bilden selbst einen Vektorraum, indem wir sie punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren. Im Beispiel erhalten wir $5\delta_0 : \varphi \mapsto 5\varphi(0)$, wie gewünscht.

⚠ Anschauung, Intuition, Heuristik können helfen, wenn sie den Fakten entsprechen; sonst hindern sie das Verständnis mehr als sie nützen.

😊 Letztlich ist es egal, wie wir eine Distribution Λ veranschaulichen. Es zählt allein, was sie *tut*, also ihr Verhalten $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ wie in D5L.

😊 Eine Distribution Λ ist ein **Funktional** $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$.

⚠ Manche schreiben diese Zuordnung traditionell als **Integral**:

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\Omega} \Lambda(x) \varphi(x) dx$$

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Jede Distribution ist ein *Funktional* $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$: Wir müssen sie mit Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ füttern. Sie ist keine *Funktion* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: Wir können Λ nicht auf Punkten $x \in \Omega$ auswerten! Das frisst sie nicht.

Der Integrand hat also keinen Sinn. Manche wollen das Integral dennoch beibehalten, und *definieren* es kurzerhand durch die linke Seite. Na gut.

Etwas besser sieht es bei einer *regulären* Distribution $\Lambda = \Lambda_f$ aus, gegeben durch $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$: Hier wird Λ konkret durch die (lokal integrierbare) Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Doch selbst hier hat ein einzelner Funktionswert $f(x)$ keine Bedeutung, denn wir dürfen f beliebig abändern auf jeder Menge vom Volumen 0 (siehe Satz D5J). Erst bei stetigen Funktionen ist f eindeutig festgelegt, siehe Satz D5J.

Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$; sie ordnet jeder Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ihren Wert $\Lambda(\varphi) \in \mathbb{R}$ zu. Es hat keinerlei Sinn, $\Lambda(x)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ auszuwerten! Immerhin können wir Λ auf jede offene Menge $U \subseteq \Omega$ einschränken: Dank $\mathcal{D}(U) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ erhalten wir $\Lambda|_U := \Lambda|_{\mathcal{D}(U)} : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$.

Definition D5M: Träger einer Distribution

Sei $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Distribution. Sie **verschwindet** auf einer offenen Menge $U \subseteq \Omega$, kurz $\Lambda|_U = 0$, wenn $\Lambda(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt.

Sei $V = \bigcup \{ U \subseteq \Omega \mid U \text{ offen und } \Lambda|_U = 0 \}$ die Vereinigung all dieser offenen Mengen. Dann ist auch V offen, und Λ verschwindet auf V . Somit ist V die größte offene Menge, auf der Λ verschwindet.

Den **Träger** $\text{supp } \Lambda := \Omega \setminus V$ definieren wir als das Komplement.

Beispiele: In den folgenden Aufgaben rechnen wir sorgfältig nach:

- 1 Das Dirac-Funktional $\delta_p^\alpha : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p)$ hat den Träger $\{p\}$.
- 2 Für jede stetige Funktion $f \in C(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ hat die zugehörige Distribution $\Lambda_f : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx$ den Träger $\text{supp}(f)$.

Aufgabe: Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \Omega$ untersuchen wir die Distributionen

$$\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p).$$

- (1) Konstruieren Sie zu jedem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ eine Testfunktion $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$ und $\delta_p^\nu(\varphi_\alpha) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^n \setminus \{\alpha\}$.
- (2) Ist die Familie $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ linear unabhängig?
- (3) Auf welchen offenen Mengen $U \subseteq \Omega$ verschwindet δ_p^α ? Was ist die größte? Was bleibt als Träger $\text{supp}(\delta_p^\alpha)$?

Wir untersuchen ebenso zu $f \in C(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die reguläre Distribution

$$\Lambda_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx.$$

- (4) Für $U \subseteq \Omega$ offen gilt $\Lambda_f|_U = 0$ genau dann, wenn $f|_U = 0$ gilt.
- (5) Vereinigung dieser Mengen ist $V = \Omega \setminus \text{supp}(f)$.
- (6) Als Träger bleibt $\text{supp}(\Lambda_f) = \text{supp}(f)$.

Lösung: (1) Nach Verschiebung dürfen wir $p = 0 \in \Omega$ annehmen. Für $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ finden wir $\partial^\alpha x^\alpha = \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Die Funktion $g_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha / \alpha!$ erfüllt $\delta_0^\alpha(g_\alpha) = 1$ und $\delta_0^\nu(g_\alpha) = 0$ für alle $\nu \neq \alpha$. Sie ist glatt, $g_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, aber ihr Träger $\text{supp}(g_\alpha) = \mathbb{R}^n$ nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\psi = 1$ auf $\bar{B}(0, \varepsilon) \Subset \Omega$. Dann ist $\varphi_\alpha := g_\alpha \cdot \psi$ glatt mit kompaktem Träger $\text{supp } \varphi_\alpha = \text{supp } \psi$. Auf $\bar{B}(0, \varepsilon)$ gilt $\varphi_\alpha = g_\alpha$, also $\delta_0^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$ und $\delta_0^\nu(\varphi_\alpha) = 0$ für alle $\nu \neq \alpha$.

(2) Ja, dank (1) ist die Familie $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ linear unabhängig! Angenommen, in \mathcal{D}' gäbe es eine Linearkombination $\sum_\nu \lambda_\nu \delta_p^\nu = 0$ mit Koeffizienten $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$, von denen nur endlich viele ungleich Null sind. Wir haben zu zeigen, dass alle Koeffizienten λ_ν gleich Null sind. Angewendet auf die Testfunktion φ_α erhalten wir sofort $\lambda_\alpha = 0$.

(3) Gilt $p \in U$ so verschwindet δ_p^α nicht auf U , denn dank (1) existiert eine Testfunktion $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(U)$ mit $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1 \neq 0$. Gilt hingegen $p \notin U$, so gilt $\delta_p^\alpha(\varphi) = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, denn $p \notin \text{supp } \varphi$. Die größte offene Menge, auf der δ_p^α verschwindet, ist also $V = \Omega \setminus \{p\}$. Als Träger von δ_p^α bleibt folglich nur noch $\text{supp}(\delta_p^\alpha) = \Omega \setminus V = \{p\}$.

(4) Wir überlegen uns zunächst $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|_U}$: Für $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt nämlich:

$$\Lambda_f|_U(\varphi) = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = \int_U f(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{f|_U}(\varphi)$$

Dank Satz D5J wissen wir: $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|_U} = 0$ bedeutet $f|_U = 0$.

Wir wiederholen dieses einfache aber zentrale Argument. Wir beweisen die Kontraposition: Angenommen, es gälte $f|_U \neq 0$, das heißt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in U$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Im entgegengesetzten Fall $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f .) Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, existiert um a ein Ball $B(a, 2\varepsilon) \subseteq U$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in B(a, 2\varepsilon)$ gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit dem Träger $\text{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$. Wir erhalten $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ mit $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$: Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt $\int_\Omega f \varphi = \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} f \varphi \geq \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} b \varphi = b \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} \varphi > 0$. Das zeigt $\Lambda_f|_U \neq 0$.

In Worten: Die Distribution Λ_f verschwindet auf der offenen Menge $U \subseteq \Omega$ genau dann, wenn die Funktion $f \in C(\Omega)$ auf U verschwindet. Die anschließenden Aussagen (5) und (6) sind dann klar aufgrund der Definition des Trägers der Funktion f als Abschluss

$$\text{supp}(f) := \overline{\{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \}}.$$

☺ Damit können wir den Träger in den folgenden Beispielen ablesen.

Aufgabe: Welche der folgenden Zuordnungen $A, B, C, \dots : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Distribution? Was ist ihr Träger? Ist sie regulär oder singular? Falls möglich, stellen Sie sie durch eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dar.

$$\begin{aligned} A: \varphi &\mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(k), & B: \varphi &\mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(0)^k, & C: \varphi &\mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(k)^0, \\ D: \varphi &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k), & E: \varphi &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi^{(k)}(0), & F: \varphi &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi^{(k)}(k), \\ G: \varphi &\mapsto \int_a^b \varphi(x) dx, & H: \varphi &\mapsto \int_0^\infty e^x \varphi(x) dx, & I: \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \\ J: \varphi &\mapsto \int_a^b \varphi'(x) dx, & K: \varphi &\mapsto \int_0^\infty e^x \varphi'(x) dx, & L: \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) dx, \\ M: \varphi &\mapsto \int_0^\infty x^a \varphi(x) dx, & N: \varphi &\mapsto \int_0^\infty x^a \varphi'(x) dx, & O: \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx \end{aligned}$$

$A = \sum_{k=1}^n \delta_k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $\{1, 2, \dots, n\}$.

B ist für $n \geq 2$ nicht linear in φ , also keine Distribution.

$C = n$ ist für $n \geq 1$ nicht linear, also keine Distribution.

$D = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge \mathbb{Z} . Jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.

E ist nicht einmal wohldefiniert, da die Reihe divergieren kann.

Beispiel: Sei $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Testfunktion mit $\psi(x) = 1$ für $x \in [-1, 1]$.

Für $\varphi(x) = e^x \psi(x)$ gilt $\varphi^{(k)}(x) = e^x$ für alle $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}$.

$F = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k^k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge \mathbb{N} . Jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.

$G = \Lambda_f$ mit $f = \mathbf{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Distribution, getragen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$.

$H = \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) e^x$ ist eine reguläre Distribution, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, getragen auf $[0, \infty[$. Für jede Testfunktion φ ist das Integral endlich.

$I = \Lambda_f$ mit $f = 1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Distribution, getragen auf \mathbb{R} .

$J = \delta_b - \delta_a$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $\{a, b\}$.

Für K nutzen wir partielle Integration. Für $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^x \varphi'(x) dx &= \int_0^r e^x \varphi'(x) dx = \left[e^x \varphi(x) \right]_0^r - \int_0^r e^x \varphi(x) dx \\ &= -\varphi(0) - \int_0^\infty e^x \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$K = -\delta_0 - \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) e^x$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$. Sie hat einen singulären und einen regulären Teil.

$L = 0$ ist die triviale Distribution, denn für $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi'(x) dx = \int_{-r}^r \varphi'(x) dx = \left[\varphi(x) \right]_{-r}^r = 0$$

Für Exponenten $a > -1$ ist x^a lokal integrierbar [B208]; also ist $M = \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) x^a$ eine reguläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$.

Für $a \leq -1$ hingegen ist M nicht einmal wohldefiniert, denn es gilt $\int_0^\varepsilon x^a dx = \infty$ [B208] und ebenso $\int_0^\varepsilon x^a \varphi(x) dx = \pm \infty$ für $\varphi(0) \neq 0$.

Für $a = 0$ gilt $N = -\delta_0$. Für $a > 0$ und $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^a \varphi'(x) dx &= \int_0^r x^a \varphi'(x) dx = \left[x^a \varphi(x) \right]_0^r - \int_0^r a x^{a-1} \varphi(x) dx \\ &= -a \int_0^\infty x^{a-1} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Für jeden Exponenten $a > 0$ ist demnach $N = -a \Lambda_f$ mit

$f(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) x^{a-1}$ eine reguläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$.

Für $-1 < a \leq 0$ ist N eine wohldefinierte Distribution, aber singular.

Für $a \leq -1$ ist N nicht wohldefiniert, genauso wie oben für M erklärt.

$O = 2\delta_0$ ist eine singuläre Distribution getragen auf $\{0\}$.

Für $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$ zerlegen wir $\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx$ in zwei Integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^r (+x) \varphi''(x) dx &= + \left[x \varphi'(x) \right]_0^r - \int_0^r \varphi'(x) dx = \left[\varphi(x) \right]_0^r = \varphi(0) \\ \int_{-r}^0 (-x) \varphi''(x) dx &= - \left[x \varphi'(x) \right]_{-r}^0 + \int_{-r}^0 \varphi'(x) dx = \left[\varphi(x) \right]_{-r}^0 = \varphi(0) \end{aligned}$$

Satz D5N: Distributionsableitung

Sei $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Distribution und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex.

(1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch die Ableitung

$$\partial^\alpha \Lambda := \Lambda \circ (-\partial)^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\partial^\alpha \varphi).$$

(2) Hat $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Ableitung $\partial^\alpha f$, so gilt $\partial^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{\partial^\alpha f}$. Distributions- und klassische Ableitung stimmen hier also überein.

(3) Konvergenz $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$ impliziert $\partial^\alpha \Lambda_n \rightarrow \partial^\alpha \Lambda$. Das bedeutet: Auf Distributionen ist die Ableitung $\Lambda \mapsto \partial^\alpha \Lambda$ stetig!

Aufgabe: Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1) Die Ableitung $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ist linear und stetig (D5H), ebenso $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, also auch ihre Komposition $\partial^\alpha \Lambda = \Lambda \circ (-\partial)^\alpha$.

(2) Umwälzen wie in D5P mit partieller Integration ergibt wie erwartet $(\partial^\alpha \Lambda_f)(\varphi) = \int_\Omega f(x) (-\partial)^\alpha \varphi(x) dx = \int_\Omega (\partial^\alpha f)(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{\partial^\alpha f}(\varphi)$.

(3) Wir haben $\Lambda_n(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi)$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nach D5I, insbesondere $[\partial^\alpha \Lambda_n](\varphi) = \Lambda_n [(-\partial)^\alpha \varphi] \rightarrow \Lambda [(-\partial)^\alpha \varphi] = [\partial^\alpha \Lambda_n](\varphi)$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die reellen Funktionen $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)/n$ und $g_n(x) = \cos(nx)$ und $h_n(x) = -\sin(nx) \cdot n$.

(1) Gilt gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightarrow 0$? und $g_n \rightarrow 0$? und $h_n \rightarrow 0$?

(2) Konvergieren die zugehörigen Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen Null?

Lösung: (1) Für die Supremumsnorm finden wir $|f_n|_{\mathbb{R}} = 1/n \searrow 0$, also $f_n \rightarrow 0$ gleichmäßig. Hingegen gilt $|g_n|_{\mathbb{R}} = 1 \not\rightarrow 0$ und $|h_n|_{\mathbb{R}} = n \nearrow \infty$.

(2) In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt $\Lambda_{f_n} \rightarrow 0$: Jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ hat kompakten Träger $K := \text{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}$ und erfüllt somit $|\varphi|_K < \infty$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned} |\Lambda_{f_n}(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \\ &\leq \text{vol}_1(K) \cdot |f_n|_K \cdot |\varphi|_K = \text{vol}_1(K) \cdot \frac{1}{n} \cdot |\varphi|_K \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dank Satz D5N folgt $\Lambda_{g_n} = \Lambda_{f'_n} = \Lambda'_{f_n} \rightarrow 0$ und $\Lambda_{h_n} = \Lambda_{f''_n} = \Lambda''_{f_n} \rightarrow 0$.

☺ Die Funktionen h_n oszillieren immer schneller und stärker, doch der Mittelwert $\int_{\mathbb{R}} h_n(x) \varphi(x) dx$ schluckt Oszillationen und geht gegen Null.

☺ Sie können es direkt nachrechnen: zweimal partiell integrieren!

⚠ Das Produkt von zwei Distributionen ergibt keine Distribution: Die Zuordnung $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 : \varphi \mapsto \Lambda_1(\varphi) \cdot \Lambda_2(\varphi)$ ist nicht linear in φ . Immerhin gelingt das Produkt von Distribution und glatter Funktion:

Satz D5O: Produkt von Distribution und glatter Funktion

Sei $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Distribution und $g \in C^\infty(\Omega)$ eine glatte Funktion.

(1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch ihr Produkt

$$\Lambda \cdot g : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$$

(2) Konsistenz: Für jede reguläre Distribution gilt $(\Lambda_f) \cdot g = \Lambda_{(f \cdot g)}$.

(3) Das so definierte Produkt $\cdot : \mathcal{D}'(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ ist bilinear, es gilt $\Lambda \cdot 1 = \Lambda$ und $(\Lambda \cdot g) \cdot h = \Lambda \cdot (g \cdot h)$ sowie die Leibniz-Regel

$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = (\partial_i \Lambda) \cdot g + \Lambda \cdot (\partial_i g).$$

☺ Wie $\mathcal{D}(\Omega)$ ist auch $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein Vektorraum über dem Grundkörper \mathbb{R} .

☺ Wie $\mathcal{D}(\Omega)$ wird nun auch $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein Modul über der Algebra $C^\infty(\Omega)$.

Aufgabe: Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1) Für $g \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Hierauf können wir $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auswerten, somit ist $\Lambda \cdot g$ wohldefiniert.

Die Zuordnung $\varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$ ist linear und stetig, also eine Distribution.

(2) Es gilt $(\Lambda_f \cdot g)(\varphi) = \Lambda_f(g \cdot \varphi) = \int_\Omega f(x) g(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{f \cdot g}(\varphi)$.

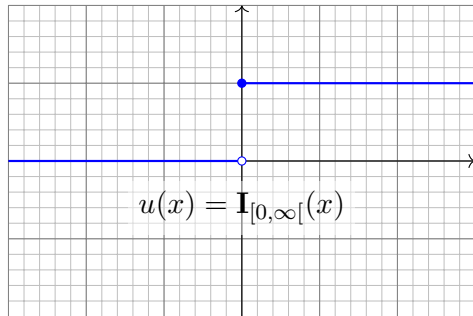
(3) Die behaupteten Rechenregeln werden offensichtlich, sobald man sie ausschreibt; wir rechnen hier exemplarisch nur die Leibniz-Regel nach.

Für $g \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, wie gesehen, und die übliche Leibniz-Regel $\partial_i(g \cdot \varphi) = (\partial_i g) \cdot \varphi + g \cdot (\partial_i \varphi)$. Daraus folgt:

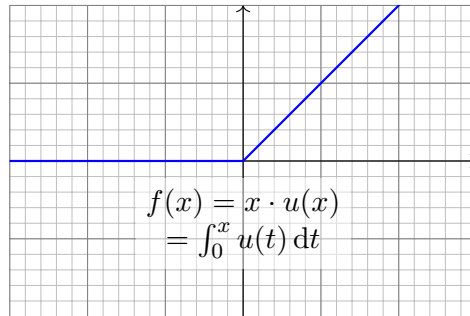
$$\begin{aligned} [\partial_i(\Lambda \cdot g)](\varphi) &= [\Lambda \cdot g](-\partial_i \varphi) \\ &= \Lambda[g \cdot (-\partial_i \varphi)] &= \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi - \partial_i(g \cdot \varphi)] \\ &= \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi] - \Lambda[\partial_i(g \cdot \varphi)] &= \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi] + (\partial_i \Lambda)(g \cdot \varphi) \\ &= [\Lambda \cdot (\partial_i g)](\varphi) + [(\partial_i \Lambda) \cdot g](\varphi) &= [\Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g](\varphi) \end{aligned}$$

Da dies für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, schließen wir

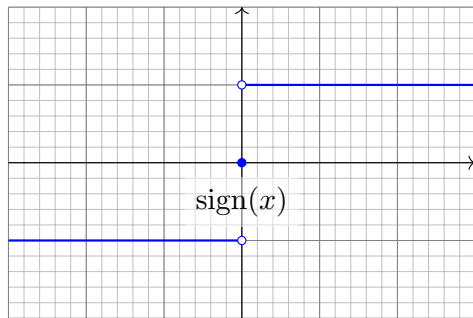
$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = \Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g.$$



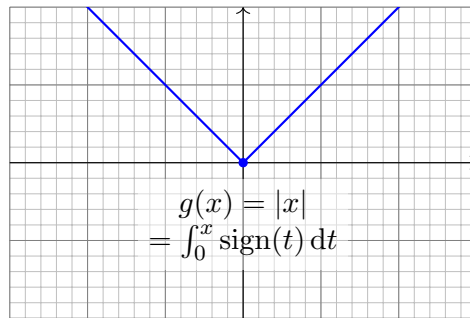
$$u(x) = \mathbf{I}_{[0, \infty[}(x)$$



$$f(x) = x \cdot u(x) = \int_0^x u(t) dt$$



$$\text{sign}(x)$$



$$g(x) = |x| = \int_0^x \text{sign}(t) dt$$

- Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x \cdot u(x)$.
 (1) In welchen Punkten ist f stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?
 (2) Berechnen Sie $f' = u$ und $f'' = \delta_0$ im Distributionensinne.

Lösung: (1) Die Funktion f ist stetig, das heißt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. In jedem Punkt $x \neq 0$ ist f differenzierbar, und dort gilt $f'(x) = u(x)$. Die Ableitung von f im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig $f'(0+) = 1$ und linksseitig $f'(0-) = 0$, also ist hier die Ableitung $f'(0)$ nicht definiert.

(2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial \Lambda_f := -\Lambda_f \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger. Sei also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank partieller Integration finden wir:

$$\begin{aligned} (\partial \Lambda_f)(\varphi) &= - \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial \varphi(x) dx = - \int_{x=0}^r x \varphi'(x) dx \\ &= - [x \varphi(x)]_{x=0}^r + \int_{x=0}^r \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

☺ Somit sind $\partial \Lambda_f = \Lambda_u: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D51).
 Physikalische Anschauung: ruckartige Beschleunigung / Stoß.
 Geometrische Anschauung: Krümmung konzentriert in einer Ecke.

Eine schlagartige Impulsübertragung oder das instantane Anschalten eines Stromes beschreiben wir durch die Heaviside-Sprungfunktion

$$u = \mathbf{I}_{[0, \infty[}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

⚠ In jedem Punkt $x \neq 0$ ist u differenzierbar, und dort gilt $u'(x) = 0$. Dennoch ist u nicht differenzierbar: Die Ableitung im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig Null und linksseitig „unendlich“, also $u'(0)$ nicht definiert.

Aufgabe: Es gilt $u' = \delta_0$ im Distributionensinne (aber $\partial \Lambda_u \neq \Lambda_{\partial u}$).

Lösung: Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial \Lambda_u := -\Lambda_u \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger. Sei $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$, also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank HDI finden wir:

$$(\partial \Lambda_u)(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \partial \varphi(x) dx = - \int_{x=0}^r \varphi'(x) dx = \varphi(0) - \varphi(r) = \varphi(0)$$

☺ Somit sind $\partial \Lambda_u = \delta_0: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D51).

- Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie die Betragsfunktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$.
 (1) In welchen Punkten ist g stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?
 (2) Berechnen Sie $g' = \text{sign}$ und $g'' = 2\delta_0$ im Distributionensinne.

Lösung: (1) Die Funktion g ist stetig, das heißt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. In jedem Punkt $x \neq 0$ ist g differenzierbar, und dort gilt $g'(x) = \text{sign}(x)$. Die Ableitung von g im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig $g'(0+) = +1$ und linksseitig $g'(0-) = -1$, also ist hier die Ableitung $g'(0)$ nicht definiert.

(2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial \Lambda_g := -\Lambda_g \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger. Sei also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank partieller Integration finden wir:

$$\begin{aligned} (\partial \Lambda_g)(\varphi) &= - \int_{-r}^r |x| \varphi'(x) dx = \int_{-r}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^r x \varphi'(x) dx \\ &= [x \varphi(x)]_{-r}^0 - \int_{-r}^0 \varphi(x) dx - [x \varphi(x)]_0^r + \int_0^r \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

☺ Somit sind $\partial \Lambda_g = \Lambda_{\text{sign}}: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D51).
 Im Distributionensinne gilt $\text{sign} = 2u - 1$ und somit $\text{sign}' = 2\delta_0$.

Lemma D5P: Umwälzen der Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $g = \partial_i f$. Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ gilt dann:

$$\int_{\Omega} \partial_i f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx$$

Beweis: Wir nutzen Fubini C1E und partielle Integration B1J:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx &\stackrel{\text{Null}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x) \varphi(x) dx_1 d(x_2, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_1 \varphi(x) dx_1 d(x_2, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_1 \varphi(x) dx \stackrel{\text{Null}}{=} - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Die rechte Seite betrifft nur f , nicht f' , und gilt für alle Testfunktionen φ . Wir erheben die Gleichung nun zur Definition der schwachen Ableitung.

Definition D5Q: schwache Ableitung

Seien $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir nennen g eine **schwache Ableitung** von f nach x_i , wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ obige Gleichung gilt:

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx$$

Das bedeutet $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $\partial_i \Lambda_f = \Lambda_g$ im Distributionensinne. In diesem Falle schreiben wir kurz $g = \partial_i f$ **im schwachen Sinne** und nennen die Funktion f **schwach ableitbar** (differenzierbar) nach x_i .

Aufgabe: Es gelten einige grundsätzliche Regeln der Vorsicht:

- (1) Nennen Sie Funktionen $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus Ihrem Beispielfundus, die keine schwache Ableitung $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erlauben.
- (2) Falls eine schwache Ableitung g existiert, ist $g(x)$ dann eindeutig bestimmt in jedem Punkt $x \in \Omega$? zumindest in fast allen Punkten $x \in \Omega$? Warum hat es daher keinen Sinn, vom Funktionswert $g(x)$ zu sprechen? 😊 Die schwache Ableitung hat keinen Wert... und ist dennoch nützlich!

Lösung: (1) Die Antwort ist leicht, da wir genügend Beispiele kennen: Die Heaviside-Funktion $u = \mathbf{I}_{[0, \infty[}$ ist lokal integrierbar, $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ihre Distributionsableitung $\partial \Lambda_u = \delta_0$ ist das Dirac-Funktional. [D570](#)
Die Distribution δ_0 ist jedoch nicht regulär, wie wir bereits wissen: Keine Funktion $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erfüllt $\Lambda_g = \delta_0$! [D555](#)

Auch die Signumfunktion $f = \text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar, besitzt aber wegen $\partial \Lambda_f = 2\delta_0$ keine schwache Ableitung. [D572](#)

(2) Falls eine schwache Ableitung g existiert, so ist g nicht eindeutig, denn wir können $g(x)$ in einem beliebigen Punkt $x \in \Omega$ ändern.

Genauer: Wir dürfen die Funktion $g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ auf jeder Nullmenge $N \subseteq \Omega$, $\text{vol}_n(N) = 0$, beliebig ändern. Gilt $\tilde{g} = g$ auf $\Omega \setminus N$, so folgt $\tilde{g} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{R})$, und mit g ist auch \tilde{g} eine schwache Ableitung von f . Immerhin ist das auch schon das Schlimmste, was passieren kann: Sind $g, \tilde{g} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ schwache Ableitungen zu f , so gilt $g(x) = \tilde{g}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$, dank $\partial_i \Lambda_f = \Lambda_g = \Lambda_{\tilde{g}}$ und Vergleichssatz D5K. Einzelne Funktionswerte $g(x)$ haben leider keine Bedeutung! [D556](#)

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die reellen Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x \mathbf{I}_{[0, \infty[}(x)$ und $f_2(x) = |x|$. Ist f_i differenzierbar? Genauer: In welchen Punkten ist die Funktion f_i differenzierbar, in welchen nicht?
- (2) Sei $U_i \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Differenzierbarkeitsstellen von f_i . Bestimmen Sie hierauf die Ableitung $f'_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Ist sie stetig?
- (3) Geben Sie schwache Ableitungen $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, falls möglich, oder erklären Sie, warum es keine schwache Ableitung geben kann.
- (4) Sind die schwachen Ableitungen eindeutig? Geben Sie Varianten an!

Lösung: (1) Die Skizzen sehen Sie auf Seite D569. Beide Funktionen f_1, f_2 sind in 0 nicht differenzierbar, überall sonst hingegen schon.

(2) Auf $U_1 = U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $f'_1 = \mathbf{I}_{]0, \infty[}$ und $f'_2 = \text{sign}$ stetig!

(3) Wir setzen $g_i(x) = f'_i(x)$ für $x \neq 0$ willkürlich fort durch $g_i(0) = 42$. Dann ist g_i eine schwache Ableitung von f_i , siehe Seite D571 / D572.

(4) Der Wert $g_i(0)$ ist willkürlich. Wir können g_i auch in jedem anderen Punkt ändern. Soll die schwache Ableitung g_i zudem stetig sein auf $U_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gibt es auf U_i nur die angegebene Lösung (D5J).

Jede reguläre Distribution $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch eine lokal integrierbare Funktion f dargestellt, also $\Lambda : \varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$.
Wir wissen also recht konkret, wie eine solche Distribution aussieht.
Wir wollen auch singuläre Distributionen ähnlich konkret darstellen.
Obige Liste zeigt konkrete Beispiele. Gibt es eine allgemeine Formel?
Genau dies leisten schrittweise die folgenden drei Darstellungssätze.
Die Konstruktionen sind länglich und werden hier nicht ausgeführt.

Satz D5R: Darstellung punktuell getragener Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $c_{\alpha} \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Zuordnung $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\alpha \leq N} c_{\alpha} \partial^{\alpha} \varphi(p)$$

ist eine Distribution mit Träger $\text{supp } \Lambda = \{p\}$. Umgekehrt gilt:

Jede Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit Träger $\text{supp } \Lambda = \{p\}$ hat die obige Form mit eindeutigen Konstanten $c_{\alpha} \in \mathbb{R}$ und einem geeigneten Grad $N \in \mathbb{N}$.

Satz D5s: Darstellung kompakt getragener Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $f_{\alpha} \in C_c(\Omega)$ gegeben. Die Zuordnung $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\alpha \leq N} \int_{\Omega} f_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \varphi(x) dx$$

ist eine Distribution mit kompaktem Träger $\text{supp } \Lambda \Subset \Omega$. Umgekehrt gilt: Jede Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger hat die obige Form mit geeigneten Funktionen $f_{\alpha} \in C_c(\Omega)$ und endlichem Grad $N \in \mathbb{N}$.

☺ Für jede kompakt getragene Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt also

$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\alpha \leq N} (-\partial)^{\alpha} f_{\alpha} \quad \text{mit } f_{\alpha} \in C_c(\Omega).$$

Aufgabe: Vergleichen Sie Satz D5s mit bisherigen Darstellungen:

- (1) Stellen Sie die Distribution $\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(0)$ wie in D5s dar.
- (2) Stellen Sie reguläre Distributionen Λ_f mit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ebenso dar!

Lösung: (1) Aus vorigen Aufgaben wissen wir $\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx = 2\varphi(0)$. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig, aber ihr Träger ist nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2\varepsilon$, also $\text{supp } \psi \subseteq [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Damit erreichen wir:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (\psi \cdot \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x| (\psi \cdot \varphi)''(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{2}|x| \psi''(x)}_{=: f_0(x)} \varphi(x) + \underbrace{|x| \psi'(x)}_{=: f_1(x)} \varphi'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}|x| \psi(x)}_{=: f_2(x)} \varphi''(x) dx \end{aligned}$$

Somit gilt $\delta_0 = \Lambda_{f_0} + \partial \Lambda_{f_1} + \partial^2 \Lambda_{f_2}$, oder kurz $\delta_0 = f_0 + \partial f_1 + \partial^2 f_2$. Notgedrungen ragen die Funktionen f_{α} etwas über $\text{supp } \varphi = \{0\}$ hinaus, und ihre Konstruktion ist nicht eindeutig im Gegensatz zu Satz D5R.

(2) Die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ist absolut stetig (B2E), und fast überall gilt $F' = f$. Dank partieller Integration (B2G) gilt auch hier:

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} F'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx = (\partial \Lambda_F)(\varphi)$$

Hat Λ_f kompakten Träger, so können wir F wie in (1) abschneiden.

Satz D5T: Darstellung beliebiger Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $f_{\alpha} \in C(\Omega)$ gegeben, und die Familie sei lokal endlich: Jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ schneidet $\text{supp } f_{\alpha}$ nur für endlich viele α . Dann ist die Zuordnung $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

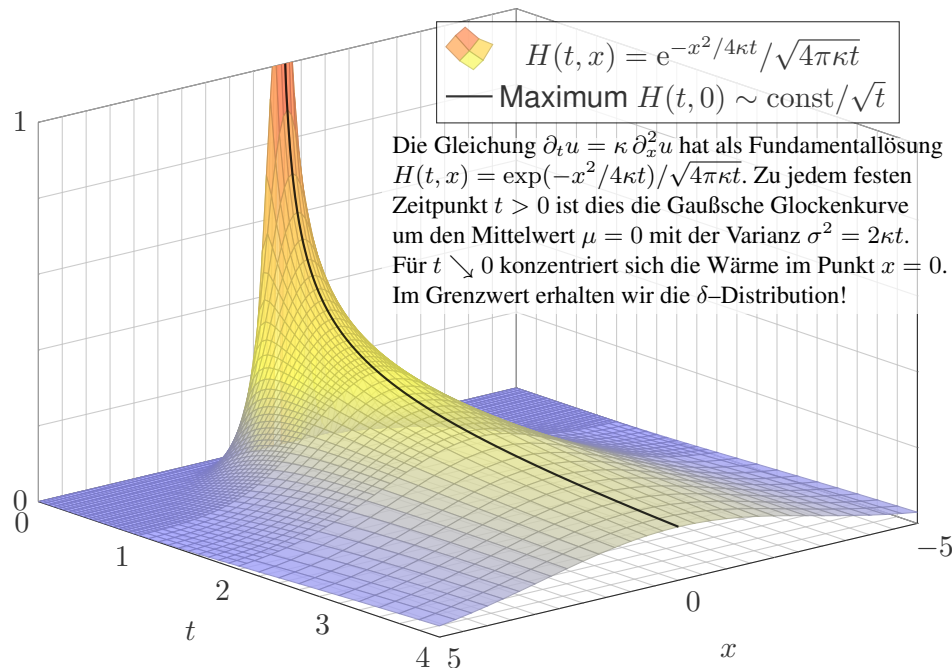
$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \int_{\Omega} f_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \varphi(x) dx$$

eine Distribution. Die Reihe konvergiert, denn jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, und somit ist die Summe in jedem Einzelfall endlich. Umgekehrt gilt: Jede Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ hat die obige Form mit einer geeigneten, lokal endlichen Familie stetiger Funktionen $f_{\alpha} \in C(\Omega)$.

☺ In diesem Sinne entstehen alle Distributionen bereits aus stetigen Funktionen und ihren (Distributions-)Ableitungen. Kurz und knapp:

$$\Lambda = \sum_{\alpha} (-\partial)^{\alpha} f_{\alpha} \quad \text{mit } f_{\alpha} \in C(\Omega) \text{ lokal endlich}$$

☺ Distributionen wirken so nicht mehr abstrakt, sondern ganz konkret.



Die Entwicklung der Mathematik steht in enger Wechselwirkung mit der ihrer Anwendungsgebiete. Ein Paradebeispiel ist die Entstehung der Differential- und Integralrechnung: Sie ist Teil der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts und beantwortete dringende Fragen aus Astronomie, Mechanik und Optik (Galilei, Kepler, Newton, Leibniz).

Umgekehrt hat die Analysis in den Ingenieur- und Naturwissenschaften neue Wege eröffnet und viele Anwendungen überhaupt erst ermöglicht: Ihre Methoden prägen bis heute das wissenschaftliche Denken wie kein anderes mathematisches Gebiet. Seit dem 18. Jahrhundert bis heute werden Naturgesetze meist als Differentialgleichungen beschrieben, auch in Ihrem Studium und später in Ihrem Beruf als Ingenieur:in. (Wir führen Differentialgleichungen in den Kapiteln M bis S aus.)

Seit jeher entwickelt die Analysis dabei eine erstaunliche Dynamik: Neue (physikalische) Probleme treten auf, neue (mathematische) Methoden werden entwickelt. Hierzu zählen insbesondere auch die Distributionen: Die mathematische Theorie beantwortet praktische Bedürfnisse aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften.

Distributionen begegnen Ingenieur:innen meist dort, wo die klassischen Methoden an ihre Grenzen stoßen. Wenn eine bewährte Technik dort nicht mehr anwendbar ist, dann sollten wir sie ehrlicherweise auch nicht naiv einsetzen, sondern durch eine besser passende Technik ergänzen. Dieses Problem ist bei partiellen Differentialgleichungen unvermeidlich. Von den vielen Anwendungen möchte ich die Wärmeleitungsgleichung und ihre Fundamentallösung hervorheben und exemplarisch diskutieren. Fourier beschäftigte sich Anfang des 19. Jahrhunderts mit Fragen der Wärmeleitung und beschrieb dies als Differentialgleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$. (Wir entwickeln hierzu in den Kapitel E bis H die nötigen Integralsätze.) Zur Berechnung konkreter Anwendungsbeispiele entwickelte Fourier seine Theorie der Fourier-Reihen, mit überwältigendem Erfolg! Sie werden bis heute als Allzweckwerkzeug überall genutzt.

Allein schon die Grundlegung dieser Theorie war für die Analysis des 19. Jahrhunderts eine enorme Herausforderung und führte zur Klärung wichtiger Fragen: Was sind Mengen und Funktionen? Wie integriert man sie? Was bedeutet Konvergenz? (Wir führen dies in Kapitel I bis L aus.)

Physiker:innen und Ingenieur:innen nutzen Distributionen seit ca. 1900, um ganz naiv-konkret-anschauliche Phänomene zu formulieren, etwa eine „punktförmige Masse“ oder eine „schlagartige Impulsübertragung“. Das scheint anschaulich klar, doch wie Sie wissen, genügt das nicht: Sie sollen nicht nur fühlen, sondern zudem auch rechnen können!

Der Wärmeleitungskern $H(t, x)$ hat in $(0, 0)$ eine Polstelle. Anschaulich konzentriert sich zur Zeit $t = 0$ die gesamte Wärme im Punkt $x = 0$. Hier herrscht „unendliche Wärmedichte“. Wie sollen wir damit rechnen? Für $t \searrow 0$ nähert sich die Wärmeverteilung der Dirac-Funktion (D553). Diese beschreibt die physikalische Situation leider überhaupt nicht, ihre naive Verwendung stiftet Verwirrung und provoziert Fehlentscheidungen.

Der Distributionenkalkül ist maßgeschneidert für solche Extremfälle. Dank der soliden Vorbereitung in diesem Kapitel können wir nun zum Abschluss den Wärmeleitungskern vollständig erklären und einfach nachrechnen! Ähnliche Anwendungen werden uns in den folgenden Kapiteln öfters begegnen. Für eine vertiefte Behandlung von partiellen Differentialgleichungen sind Distributionen ein zentrales Werkzeug.

Satz D5U: Wärmeleitungskern

(0) Sei $\kappa > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Den **Wärmeleitungskern** definieren wir durch

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

für $t > 0$ und $H(t, x) = 0$ für $t \leq 0$. Außerhalb der Polstelle $(0, 0)$ ist H glatt (C^∞), für $t \leq 0$ konstant und für $t > 0$ analytisch (C^ω).

(1) Im Distributionensinne ist H eine **Fundamentallösung** gemäß

$$(\partial_t - \kappa\Delta)H = \delta_{(0,0)}.$$

(2) Ist für $t = 0$ die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$, so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie H ; wiederholen Sie bisherige Ergebnisse.

- (1) In welchen Punkten $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist H stetig? glatt? analytisch?
- (2) Sei $L = \partial_t - \kappa\Delta$. In welchen Punkten (t, x) gilt $LH(t, x) = 0$?
- (3) Ist H auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ absolut integrierbar? wenigstens lokal integrierbar?
- (4) Wann dürfen wir den Operator L zu $L^* = -\partial_t - \kappa\Delta$ umwälzen:

$$\int [LH(t, x)] \varphi(t, x) d(t, x) = \int H(t, x) [L^*\varphi(t, x)] d(t, x)?$$

- (5) Wo verschwindet demnach die Distribution $(\partial_t - \kappa\Delta)\Lambda_H$?
- (6) Berechnen Sie schließlich $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} H(t, x) [L^*\varphi(t, x)] d(t, x)$.

Lösung: (0) Seite D513: Für festes $t > 0$ ist $x \mapsto H(t, x)$ die Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert $\mu = 0$ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Für $t \nearrow \infty$ fließt sie auseinander, für $t \searrow 0$ konzentriert sie sich um den Nullpunkt.

- (1) Für $t < 0$ und $t > 0$ ist H analytisch (C^ω), also lokal als konvergente Potenzreihe darstellbar, da Komposition analytischer Funktionen. Auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$ ist H beliebig oft differenzierbar (C^∞); dies beweist man genauso wie für die Funktion $f(t) = e^{-1/t}$. [B438]
- Im Punkt $(0, 0)$ liegt eine Polstelle vor wegen $H(t, 0) = (4\pi\kappa t)^{-n/2}$.

(2) Außerhalb der Polstelle, also auf ganz $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$, gilt $(\partial_t - \kappa\Delta)H = 0$, wie wir bereits nachgerechnet haben (D5D).

(3) Es gilt $H \geq 0$, wir können also den Absolutbetrag weglassen. Für jedes $t > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$: Gaußsches Integral (C2G).

Sei $-\infty \leq a < 0 < b$. Wir nutzen den Satz von Fubini (C1E):

$$\int_{]a,b[\times \mathbb{R}^n} H(t, x) d(t, x) = \int_{t=a}^b \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx dt = \int_{t=0}^b 1 dt = b$$

Somit ist H überall auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lokal integrierbar, aber nicht global.

(4) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion: glatt mit kompaktem Träger. Auf U ist H glatt, dort können wir die Ableitung umwälzen (D5N): Die Formel gilt demnach falls $\text{supp } \varphi \Subset U$, also $(0, 0) \notin \text{supp } \varphi$.

⚠ Sonst gilt sie nicht. Links steht 0, rechts erwarten wir $\varphi(0, 0)$!

(5) Auf U finden wir die Ableitung $L\Lambda_H = \Lambda_{LH} = \Lambda_0 = 0$.

⚠ Die Ableitung $h = LH$ ist nur auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$ definiert; dort ist sie gleich Null. Das ist vergleichbar mit der Dirac-Funktion! Egal, wie wir $h(0, 0)$ setzen, immer gilt $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} h(t, x) \varphi(t, x) d(t, x) = 0$, also $\Lambda_{LH} = \Lambda_h = 0$. Wir sehen jedoch gleich $\Lambda_{LH} \neq L\Lambda_H = \delta_{(0,0)}$.

(6) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Für den Träger gelte $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-T, T] \times \mathbb{R}^n$. Wir integrieren über $V =]\tau, T[\times \mathbb{R}^n$ für $\tau > 0$ und untersuchen $\tau \searrow 0$:

$$\int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) [\kappa\Delta\varphi(t, x)] dx dt \stackrel{(a)}{=} \int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} [\kappa\Delta H(t, x)] \varphi(t, x) dx dt$$

$$\stackrel{(b)}{=} \int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} [\partial_t H(t, x)] \varphi(t, x) dx dt$$

$$\int_{[\tau, T] \times \mathbb{R}^n} H(t, x) [L^*\varphi(t, x)] d(t, x) \stackrel{(c)}{=} - \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{t=\tau}^T \partial_t [H(t, x) \varphi(t, x)] dt dx$$

$$\stackrel{(d)}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \stackrel{(e)}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x|^2/4\kappa\tau}}{(\sqrt{4\pi\kappa\tau})^n} \varphi(\tau, x) dx$$

$$\stackrel{(f)}{=} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \varphi(\tau, \xi\sqrt{2\tau}) dx \stackrel{(g)}{\rightarrow} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \varphi(0, 0) dx = \varphi(0, 0)$$

- (a) Zu festem t dürfen wir $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ umwälzen. (b) Auf V gilt $\kappa\Delta H = \partial_t H$. (c) Wir nutzen erneut den Satz von Fubini. Für $L^* = -\partial_t - \kappa\Delta$ wälzen wir $-\kappa\Delta u$ und nutzen $\partial_t [H\varphi] = [\partial_t H]\varphi + H[\partial_t \varphi]$ und HDI (d). (f) Wir substituieren $\xi = x/\sqrt{2\kappa\tau}$ und nutzen den Transformationssatz. (g) Wir nutzen majorisierte Konvergenz. Alles wird gut!