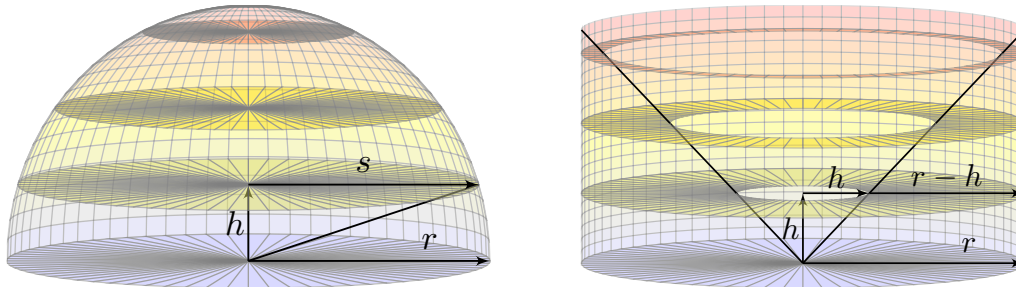


Kapitel C

Mehrdimensionale Integration



*Wie machen wir's, daß alles frisch und neu
Und mit Bedeutung auch gefällig sei? [...]
Ein jeder sucht sich endlich selbst was aus.*

*Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen;
Und jeder geht zufrieden aus dem Haus.*

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Vollversion

michael-eisermann.de/lehre/HM3

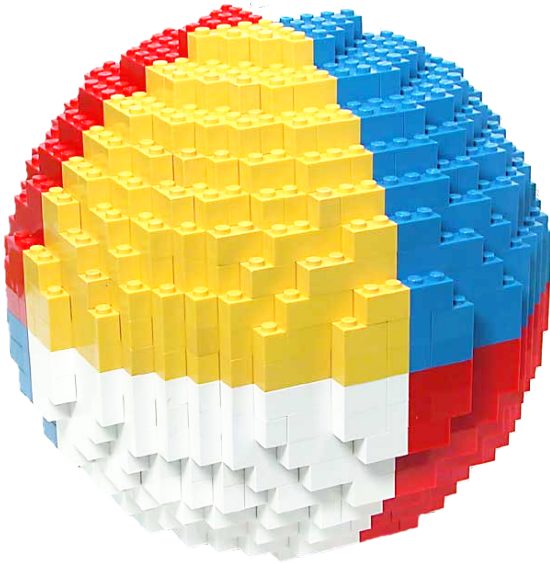
26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels C

C002

- 1 Der Satz von Fubini
 - Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
 - Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
 - Integration über Normalbereiche
- 2 Der Transformationssatz
 - Neue Variablen als geschickte Koordinaten
 - Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
 - Zylinder- und Kugelkoordinaten
- 3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
 - Zusammenfassung
 - Verständnisfragen
 - Normalbereiche
- 4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
 - Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
 - Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Das Integral misst das Volumen. Die Grundidee ist denkbar einfach: Jedem Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir unmittelbar sein Volumen zuordnen, nämlich das Produkt seiner Seitenlängen (A3B).



Wir wollen jedoch nicht nur das Volumen von Quadern messen, sondern von beliebigen Mengen:

Der disjunkten Vereinigung mehrerer Quader ordnen wir die Summe ihrer Volumina zu.

(Bei einer beliebigen Vereinigung ist zur Korrektur das Volumen der Überschneidungen abzuziehen.)

Damit können wir das Volumen beliebiger Mengen approximieren, und schließlich durch Grenzübergang sogar exakt bestimmen.

Mehrdimensionale Integration

In Kapitel A haben wir grundlegend erklärt, was Integrale $\int_{\Omega} f$ bedeuten. In Kapitel B haben wir eindimensionale Integrale $\int_a^b f(x) dx$ berechnet, insb. dank des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (B1I). Für mehrdimensionale Integrale folgen nun zwei wichtige Techniken:

- Der Satz von Fubini C1E führt die n -dimensionale Integration zurück auf n -fach iterierte eindimensionale Integration. Das hilft.
- Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution und ermöglicht, geschickte Koordinaten zu wählen.

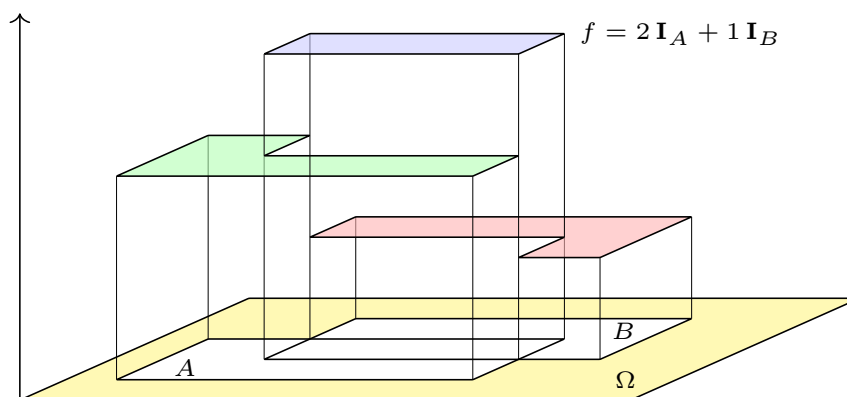
Mit diesen drei Grundtechniken lassen sich bereits sehr viele Integrale effizient berechnen. Hierauf aufbauend kommen in den folgenden Kapiteln weitere bewährte und nützliche Rechentechniken hinzu:

- Vertauschung von Integralen und Grenzwerten (Kapitel D)
- Integralsätze von Gauß / Green / Stokes (Kapitel E, G, H)
- Wegintegrale holomorpher Funktionen und Residuen (Kapitel F)

Damit haben Sie einen umfangreichen Werkzeugkasten zur Integration, der Ihnen als Grundlage für die meisten Anwendungen ausreichen wird.

Zu Quadern $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c_k \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}.$$



All diese Treppenfunktionen bilden den \mathbb{R} -Vektorraum $T_n = T(\mathbb{R}^n)$. Das Integral $T_n \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, also $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_Q(x) dx = \text{vol}_n(Q)$ und linear fortgesetzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$

Treppenfunktionen sind ein nützliches Werkzeug zur Approximation weiterer Funktionen; ihr Integral ist dazu ein erster wichtiger Schritt.

Wir führen die n -dimensionale Konstruktion nun sorgfältig aus.

Satz C1A: Existenz und Eindeutigkeit des Integrals

(0) Es existiert genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Normierung $I_n(\mathbf{I}_Q) = \text{vol}_n(Q)$ für jeden endlichen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diese Abbildung I_n ist zudem monoton: Aus $f \leq g$ folgt $I_n(f) \leq I_n(g)$.

(1) Das eindimensionale Integral $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$ kennen wir bereits (Satz B1A). Hieraus gewinnen wir $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$ iterativ gemäß

$$I_n(f) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \dots \int_{x_n \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

Diese Konstruktion integriert n -fach eindimensionale Treppenfunktionen.

😊 Wir nutzen fortan die übliche Schreibweise $\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx := I_n(f)$.

😊 Linearität und Normierung garantieren genau die ersehnte Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx \stackrel{\text{Norm}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$


Was genau ist hier zu beweisen? Ist die Aussage nicht trivial? Nein!
Warum genügt nicht einfach die letzte Formel als Definition? Ich nenne drei Gegenbeispiele, um Sie vor naiver Formelgläubigkeit zu schützen!
Wir wollen jeder Treppenfunktion $f \in T_n$ eine Zahl zuordnen gemäß


$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} M(f) &:= \max\{c_1, \dots, c_{\ell}\}, \\ N(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k^2 \operatorname{vol}(Q_k), \\ Q(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{vol}(Q_k)^2. \end{aligned}$$


Aufgabe: Was ist hieran gefährlich falsch? Sind M , N , Q wohldefiniert? Versuchen Sie, diese Werte für folgende Funktionen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} &= (+1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} + (-1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} \\ f &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} + 5 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \\ g &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \end{aligned}$$


Lösung: Die Zuordnungen M , N , Q sind überhaupt nicht wohldefiniert!


 Verschiedene Darstellungen / Schreibweisen derselben Funktion liefern verschiedene Ergebnisse: Das ergibt überhaupt keinen Sinn!

 Treppenfunktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen \mathbf{I}_Q endlicher Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen \mathbf{I}_Q sind ein Erzeugendensystem von T_n .

 Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ ist keineswegs eindeutig! Wir können jede Treppenfunktion f auf unendlich viele Weisen als Summe $f = \sum_{k=1}^s c'_k \mathbf{I}_{Q'_k}$ schreiben.

 Die Werte M , N , Q hängen nicht von der Funktion f ab, sondern von der (willkürlich gewählten!) Darstellung als Linearkombination.

 Glücklicherweise ist das obige Integral $I_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert, und genau das ist die Aussage des zu beweisenden Satzes C1A: Aus $\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{\ell=1}^s c'_\ell \mathbf{I}_{Q'_\ell}$ folgt $\sum_{k=1}^r c_k \operatorname{vol}_n(Q_k) = \sum_{\ell=1}^s c'_\ell \operatorname{vol}_n(Q'_\ell)$.

 Bemerkung: Die Quader Q_k dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. In diesem Falle gilt $M(f) = \max f$ und $N(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$. (Warum?) Auf *disjunkten* Linearkombinationen sind somit M und N wohldefiniert. Auch disjunkte Darstellungen sind jedoch noch keineswegs eindeutig. Das Beispiel Q ist selbst durch Disjunktheit nicht zu retten, da es sich bei Verfeinerung ändert.

Aufgabe: Beweisen Sie Satz C1A! *Hinweis:* Sie müssen hierzu nichts neu erfinden, denn die Formulierung ist bereits vollkommen explizit; es genügt, alle Schritte geduldig und sorgsam nachzurechnen.

Lösung: Wir suchen eine Abbildung $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$ mit den genannten Eigenschaften; sie soll linear und normiert und monoton sein.

Der Satz macht hierzu zwei Aussagen: Existenz und Eindeutigkeit. Das heißt, es gibt eine korrekte Lösung I_n , und zwar genau eine.

Andernfalls wäre zu befürchten, dass es mehrere Lösungen gibt... oder auch gar keine! Hierzu verschaffen wir uns nun Klarheit.

(1) Die **Eindeutigkeit** ist hier besonders leicht: Gegeben seien zwei Abbildungen $I_n, I'_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$, beide seien (a) linear und (b) normiert. Für jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ folgt $I_n(f) = I'_n(f)$, denn

$$\begin{aligned} I_n(f) &= I_n\left(\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^r c_k I_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k) \\ I'_n(f) &= I'_n\left(\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^r c_k I'_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k) \end{aligned}$$

😊 Das beweist $I_n = I'_n$: Es kann höchstens eine Lösung geben!

(2) Wesentlich kniffliger ist es, die **Existenz** einer Lösung zu beweisen. Hierzu müssen wir tatsächlich eine Abbildung $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$ **konstruieren**, die linear, normiert und monoton ist. Satz C1A erklärt, wie das gelingt:

(2a) Das eindimensionale Integral $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$ kennen wir bereits aus Satz B1A: Unsere dortige Sorgfalt war gut investiert!

Wir bilden damit das n -fach iterierte Integral wie in C1A angegeben:

(2b) Für jede n -dimensionale Treppenfunktion $f \in T_n$ und $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto f(u_1, \dots, u_{n-1}, v)$ eine eindim. Treppenfunktion:

Für jeden Quader $Q = Q^* \times [a, b]$ gilt $\mathbf{I}_Q(u, v) = \mathbf{I}_{Q^*}(u) \cdot \mathbf{I}_{[a, b]}(v)$.

Aus $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$ folgt $f_u = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k^*}(u) \mathbf{I}_{[a_k, b_k]} \in T_1$.

(2c) Zur leichteren Schreibweise definieren wir hilfsweise die Abbildung $J_n : T_n \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ als Integration über die letzte Variable, also:

$$\begin{aligned} J_n : f \mapsto f^*, \quad f^*(x_1, \dots, x_{n-1}) &:= I_1 [x_n \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)] \\ &= \int_{x_n \in \mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n \end{aligned}$$

Wir wenden hier (2a) an, und dank (2b) dürfen wir dies auch.

(2d) Die Abbildung I_1 ist linear und monoton, also auch J_n .

(2e) Speziell für $f = c \mathbf{I}_Q$ mit $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ gilt $f^* = c^* \mathbf{I}_{Q^*}$ mit $c^* = (b_n - a_n) c$ und $Q^* = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Für jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$ ist dank Linearität demnach $J_n(f) = f^* = \sum_{k=1}^r c_k^* \mathbf{I}_{Q_k^*} \in T_{n-1}$ eine Treppenfunktion.

Die einfache Integration liefert uns somit die Abbildung $J_n : T_n \rightarrow T_{n-1}$.

(2f) Dies können wir iterieren und erhalten so die n -fache Integration:

$$I_n : T_n \xrightarrow{J_n} T_{n-1} \xrightarrow{J_{n-1}} \cdots \xrightarrow{J_2} T_1 \xrightarrow{J_1=I_1} \mathbb{R}$$

Jede der Abbildungen $J_n, J_{n-1}, \dots, J_2, J_1 = I_1$ ist linear und monoton, also auch ihre Komposition $I_n = I_1 \circ J_2 \circ \cdots \circ J_{n-1} \circ J_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$.

(2g) Für jeden Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ gilt schließlich $I_n(\mathbf{I}_Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot (b_n - a_n) = \text{vol}_n(Q)$.

😊 Damit haben wir aus $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}$ explizit eine Abbildung $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, die alle Anforderungen erfüllt. Das beweist die Existenz!

Aussagen zu **Existenz und Eindeutig** von Lösungen sind eine typisch mathematische Vorgehensweise und zur Grundlegung unentbehrlich. Muss die Ingenieur:in das wissen? Was genau kann sie hierbei lernen?

😊 Diese ausführliche Übung zeigt exemplarisch, wieviel Umsicht und Sorgfalt nötig sind, um eine nicht-triviale Konstruktionsaufgabe zu lösen. Das gilt selbst für die (scheinbar simple) lineare Abbildung $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Aus der Linearen Algebra wissen Sie: Wenn Sie eine Basis $(b_i)_{i \in I}$ von T_n haben, so genügt es, den Wert $I_n(b_i)$ für jedes $i \in I$ vorzuschreiben. Da sich jeder Vektor $f \in T_n$ eindeutig als $f = \sum_i \lambda_i b_i$ linearkombiniert, folgt hieraus $I_n(f) = \sum_i \lambda_i I_n(b_i)$, und dies konstruiert die Abbildung I_n .

⚠ Dieses einfache Argument steht uns hier leider nicht zur Verfügung: Das Erzeugendensystem $(\mathbf{I}_Q)_{Q \subseteq \mathbb{R}^n}$ von $T_n = T(\mathbb{R}^n)$ ist keine Basis; Darstellungen $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ sind keineswegs eindeutig! C103

Die Konstruktion muss daher den Relationen zwischen den Erzeugern \mathbf{I}_Q Rechnung tragen. Genau dies ist der Inhalt der Sätze B1A und C1A. Diese Überlegungen bauen wir nun zum Satz von Fubini aus.

Wir untersuchen für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Fubini-Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, aber nicht für alle! C117 C414

Aufgabe: (0) Gilt $\mathbf{I}_{[a,b] \times [c,d]}(x, y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

(1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_Q$ eines Rechtecks $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$.

(2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{I}_{Q_k}$?
Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$?

(3) Bleibt die Gleichung erhalten bei monotoner Konvergenz $f_k \nearrow f$?

Notation: Bei doppelten oder mehrfachen Integralen lassen wir im Folgenden meist die Klammern weg und vereinbaren, dass zum ersten Integralzeichen $\int_{x \in X}$ immer die letzte Integrationsvariable dx gehört.

😊 Das Symbolpaar $\int_{x \in X} \dots dx$ wirkt somit immer als Klammer.

(0) Ja. Unterscheiden Sie die vier Fälle $x \notin [a, b]$ und $y \notin [c, d]$.

(1) Damit können wir die iterierten Integrale leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x, y) dy \right] dx &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \right] dx \\ \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \right] dx &\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \end{aligned}$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x, y) dx \right] dy &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dx \right] dy \\ \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \right] \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy &\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \end{aligned}$$

Schließlich ist das Flächenintegral auf Rechtecken normiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_Q(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \text{vol}_2(Q) = (b - a)(d - c)$$

😊 Fubini gilt für $f = \mathbf{I}_Q$ und jedes Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d]$.

(2) Für jede Linearkombination $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$ finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) dy \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) dx \right] dy \stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

Schließlich ist auch das Flächenintegral linear:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x, y) d(x, y)$$

😊 Gilt Fubini für f_1, f_2, \dots, f_n , so auch für jede Linearkombination f .

(3) Für $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und monotone Konvergenz $f_k \nearrow f$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) dy \right] dx$$

$$\stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx \stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) dx \right] dy$$

$$\stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy \stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

Auch für das Flächenintegral gilt bei monotoner Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x, y) d(x, y)$$

😊 Gilt Fubini für $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, so auch für ihre Grenzfunktion f .

Fubini für nicht-negative Funktionen

Die Rechnungen zu dieser Konstruktion beweisen die Formel von Fubini für alle Treppenfunktionen, und per Grenzübergang für alle messbaren Funktionen $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$. Allein die Einschachtelung ist mühsam, diese rechnen wir hier nicht nach. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz C1B: Fubini für nicht-negative Funktionen

Seien $X_1, \dots, X_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, also $X_1 \times \dots \times X_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader.

Für jede messbare Funktion $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\int_{X_1 \times \dots \times X_n} f(x) \, dx = \int_{X_1} \dots \int_{X_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \dots dx_1.$$

Dasselbe Ergebnis gilt bei beliebiger Integrationsreihenfolge.

- 😊 Eindimensionale Integrale beherrschen wir recht gut dank HDI.
- 😊 Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
- 😊 Wir dürfen uns jeweils die bequemste Reihenfolge aussuchen.
- 😊 Der Satz gilt allgemein für $X_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, \dots, X_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$ messbar.

Fubini für nicht-negative Funktionen

Für manche Anwendungen ist folgende Zusammenfassung flexibler:
Wir gruppieren $X = X_1 \times \dots \times X_p$ und $Y = X_{p+1} \times \dots \times X_{p+q}$.

Satz C1c: Fubini für nicht-negative Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbar und $\Omega = X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$.

Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) \, dy \, dx = \int_Y \int_X f(x, y) \, dx \, dy.$$

Erläuterung: Das zweite Integral bedeutet: Zu festem $x \in X$ integrieren wir die Funktion $f_x : Y \rightarrow [0, \infty] : y \mapsto f(x, y)$ und erhalten $F : X \rightarrow [0, \infty] : x \mapsto F(x) := \int_Y f(x, y) \, dy$; deren Integral ist $\int_X \int_Y f(x, y) \, dy \, dx := \int_X F(x) \, dx$. Entsprechend für das dritte Integral.

Wenn das Integral $\int_Y f(x, y) \, dy$ für jedes $x \in X$ existiert, dann gilt die erste Gleichung wie angegeben. Es kann jedoch vorkommen, dass die Funktion $f_x : Y \rightarrow [0, \infty]$ für einige wenige $x \in X$ gar nicht messbar ist. Glücklicherweise ist f_x für fast jedes $x \in X$ messbar, eventuell mit Ausnahme einer vernachlässigbaren Menge $N \subseteq X$ vom Volumen Null. Wir definieren dann $F : X \rightarrow [0, \infty]$ durch $F(x) := \int_Y f(x, y) \, dy$ für $x \in X \setminus N$, sowie $F(x) = 0$ für $x \in N$. Dann besagt der Satz, dass F messbar ist und $\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_X F(x) \, dx$ gilt.

Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{[0,1] \times [1,2]} 36xy^2 d(x, y)$ mit Fubini.

Lösung: Erste Rechnung, erst über y integrieren, dann über x :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [1,2]} 36xy^2 d(x, y) &\stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{ClB}}}{=} \int_{x=0}^1 \left[\int_{y=1}^2 36xy^2 dy \right] dx \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{BlI}}}{=} \int_{x=0}^1 \left[12xy^3 \right]_{y=1}^2 dx = \int_{x=0}^1 84x dx \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{BlI}}}{=} \left[42x^2 \right]_{x=0}^1 = 42 \end{aligned}$$

Andersrum geht es auch, erst über x integrieren, dann über y :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [1,2]} 36xy^2 d(x, y) &\stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{ClB}}}{=} \int_{y=1}^2 \left[\int_{x=0}^1 36xy^2 dx \right] dy \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{BlI}}}{=} \int_{y=1}^2 \left[18x^2y^2 \right]_{x=0}^1 dy = \int_{y=1}^2 18y^2 dy \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{BlI}}}{=} \left[6y^3 \right]_{y=1}^2 = 42 \end{aligned}$$

Notation: Insbesondere bei iterierten Integralen kann es hilfreich sein, die jeweilige Variable zusätzlich auch unter dem Integralzeichen zu notieren, wie in obigen Rechnungen geschehen. Dies dient der Betonung und hat den Vorteil, dass wir beim Lesen von links nach rechts schon am Anfang wissen, was uns am Ende erwartet. Diese ausführliche Notation ist zwar etwas redundant, aber gerade deshalb in handschriftlichen Rechnungen weniger fehleranfällig. Möge es nützen!

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x) = x_1(x_2^2 + x_3)$ über $[0, 1] \times [1, 2] \times [0, 2]$. Wie viele Reihenfolgen sind möglich? Liefern alle dasselbe Ergebnis?

Lösung: Das Integral berechnen wir mit Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [1,2] \times [0,2]} f(x) dx &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=1}^2 \int_{x_3=0}^2 x_1(x_2^2 + x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=1}^2 \left[x_1(x_2^2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2) \right]_{x_3=0}^2 dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=1}^2 x_1(2x_2^2 + 2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 x_1 \left[\frac{2}{3}x_2^3 + 2x_2 \right]_{x_2=1}^2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 x_1 \frac{20}{3} dx_1 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

😊 Wir dürfen hier die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen: Alle sechs Reihenfolgen liefern dasselbe Ergebnis: Probieren Sie es!

Ist es in Tabellen egal, ob Sie erst Zeilen oder erst Spalten summieren?
Klar, bei endlichen Tabellen! Für unendliche gibt es Überraschungen:
Sei $a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(i, i) = +1$ und $a(i + 1, i) = -1$ und sonst $= 0$.

\vdots	j				\ddots
0				+1	\ddots
0			+1	-1	
0			+1	-1	
0		+1	-1		
0	+1	-1			
					i
	+1	0	0	0	\dots


Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i, j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i, j) = +1$$

 Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

 Das ist ja fürchterlich! Kann das auch bei Integralen passieren? Ja!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz A2P:


Satz C1D: Cauchy–Umordnungssatz


(1) Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} gilt

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

 Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

 Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

Kann das auch bei Integration über $[0, 1] \times [0, 1]$ passieren? Ja! C409

Aufgabe: (0) Man skizziere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{I}_{[k, k+1[\times [k, k+1[} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2[\times [k, k+1[} \right).$$

(1) Man berechne und vergleiche und bestaune die Doppelintegrale

$$\int_{y \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{?}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

(2) Widerspricht das Fubini? Was erhält man für f^+ und f^- sowie $|f|$?

Lösung: (1a) Zeilen, erst nach x und dann nach y integrieren:

$$\int_{y \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y \in \mathbb{R}} 0 \, dy = 0$$

(1b) Spalten, erst nach y und dann nach x integrieren:

$$\int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{x \in \mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0, 1[}(x) \, dx = +1$$

⚠ Das zeigt, dass wir nicht blind drauflos rechnen dürfen!

(2) Für den Positivteil $f^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k, k+1[\times [k, k+1[}$ gilt dank Fubini C1B:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^+(x, y) \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^+(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^+(x, y) \, dy \, dx = +\infty$$

Für den Negativteil $f^- = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k+1, k+2[\times [k, k+1[}$ gilt dank Fubini C1B:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^-(x, y) \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^-(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^-(x, y) \, dy \, dx = +\infty$$

⚠ Die Differenz $\int f^+ - \int f^-$ hat nur Sinn, wenn beide endlich sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|f| = f^+ + f^-$ integrierbar ist.

Das Problem ist hier offensichtlich, f ist nicht absolut integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f^+(x, y) \, d(x, y) + \int_{\mathbb{R}^2} f^-(x, y) \, d(x, y) = +\infty$$

⚠ Dieses grundlegende Problem müssen wir kennen und vermeiden, wenn wir Doppelintegrale und den Satz von Fubini anwenden wollen.

😊 Die gute Nachricht: Diese Vorsichtsmaßnahme ist schon alles!

Fubini für absolut integrierbare Funktionen

Bislang haben wir Fubini (Satz C1B) nur für nicht-negative Funktionen! Dank Zerlegung in Positiv- und Negativteil (A3K) folgt daraus allgemein:

Satz C1E: Fubini 1907

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen.

(1) Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ gilt

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| \, d(x, y) = \int_X \int_Y |f(x, y)| \, dy \, dx = \int_Y \int_X |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) \, dy \, dx = \int_Y \int_X f(x, y) \, dx \, dy.$$

- 😊 Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
- 😊 Wir brauchen absolute Integrierbarkeit: genau die, mehr nicht.
- 😊 Wir dürfen uns dann die bequemste Reihenfolge aussuchen.

Wann gilt Vertauschbarkeit?

😊 Fubini und die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge gilt

- für alle nicht-negativen Funktionen $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$,
- für alle absolut integrierbaren Funktionen $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,
- zum Beispiel, wenn X, Y und f beschränkt sind,
- insbesondere für X, Y kompakt und f stetig.

⚠ Für die ersehnte Gleichheit sind diese Voraussetzungen wesentlich! Aufgaben am Kapitelende zeigen lehrreiche Gegenbeispiele. [C409](#) [C413](#)
Zur korrekten Anwendung müssen Sie dieses Problem beherrschen.

Der Satz von Fubini ist ungemein praktisch, wie wir bereits gesehen haben, denn er erlaubt uns, die mehrdimensionale Integration auf die leichtere eindimensionale Integration zurückzuführen.

Der erste Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion $g_x : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : y \mapsto |f(x, y)|$ ist für fast jedes $x \in X$ messbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subseteq X$.

Wir definieren $G : X \rightarrow [0, \infty]$ durch $G(x) := \int_Y |f(x, y)| \, dy$ für $x \in X \setminus N$, sowie $G(x) = 0$ für $x \in N$. Dann ist G messbar, und es gilt $\int_{X \times Y} |f(x, y)| \, d(x, y) = \int_X G(x) \, dx$.

Der zweite Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion $f_x : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : y \mapsto f(x, y)$ ist für fast jedes $x \in X$ integrierbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subseteq X$. Die Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_Y f(x, y) \, dy$ für alle $x \in X \setminus N$, sowie $F(x) = 0$ für $x \in N$, ist integrierbar und erfüllt $\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_X F(x) \, dx$. Ebenso für das zweite Integral.

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt der **Kreisscheibe**

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \}.$$

Lösung: Dank Fubini genügt eindimensionale Integration:

$$\text{vol}_2(D) \stackrel{\substack{\text{Def} \\ \text{A3J}}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_D(x, y) \, d(x, y) \qquad \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} \mathbf{I}_D(x, y) \, dy \, dx$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=-r}^r \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \, dx \qquad \stackrel{\substack{\text{Def} \\ \text{HDI}}}{=} \int_{x=-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

Substitution $x = -r \cos(u)$ und $dx = r \sin(u) \, du$ mit $u \in [0, \pi]$:

$$\stackrel{\substack{\text{Subs} \\ \text{B1K}}}{=} \int_{u=0}^{\pi} 2\sqrt{r^2 - r^2 \cos(u)^2} \cdot r \sin(u) \, du \stackrel{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 2 \sin(u)^2 \, du$$

$$\stackrel{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 1 - \cos(2u) \, du \qquad \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} r^2 \left[u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{u=0}^{\pi} = \pi r^2$$

😊 Das Ergebnis kannten Sie bereits. Nun können Sie es ausrechnen!

Rauminhalt einer Kugel

Aufgabe: Berechnen Sie den Rauminhalt einer **Kugel** vom Radius r :

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -r \leq z \leq r, x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \}$$

Lösung: Dank Fubini und der vorigen Aufgabe finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_K(x, y, z) \, d(x, y, z) \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{z=-r}^r \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \mathbf{I}_K(x, y, z) \, d(x, y) \, dz$$

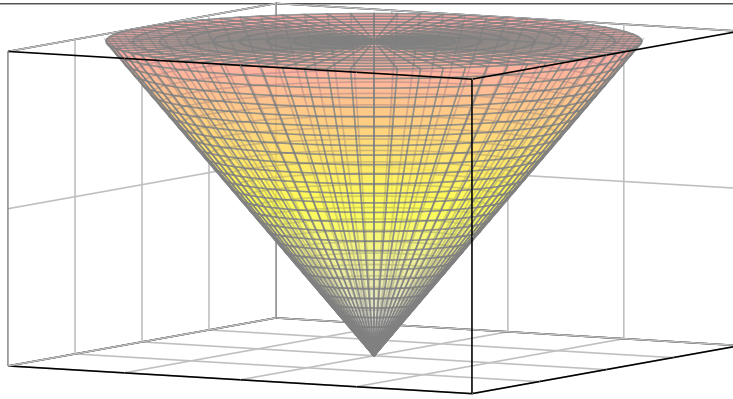
$$\stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{z=-r}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \pi \left[zr^2 - \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

😊 Die Rechnung fällt hier sogar noch einfacher aus als für die Kreisscheibe.

😊 Der Term r^3 ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu r . Die Konstante $\frac{4}{3}\pi$ hingegen kann man nicht raten. Wir gewinnen sie aus der Integration!

😊 Rekursiv können Sie mit derselben Rechnung in jeder Dimension $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ das Volumen der Kugel $D_r^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}$ bestimmen: C425

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$\text{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$...



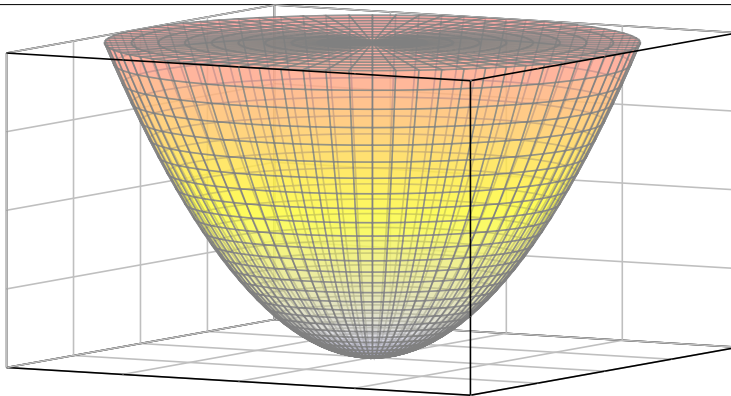
Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des **Kegels**

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z^2 \}.$$

Lösung: Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_K(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_{z=0}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_K(x, y, z) \, d(x, y) \, dz \\ &= \int_0^h \pi z^2 \, dz = \left[\frac{\pi}{3} z^3 \right]_{z=0}^h = \frac{\pi}{3} h^3. \end{aligned}$$

😊 Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie achtmal soviel Flüssigkeit. Der Term h^3 ist plausibel, denn der Kegel wächst in jede Richtung proportional zu h . Allgemein ist das Volumen eines dreidimensionalen Kegels $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe.



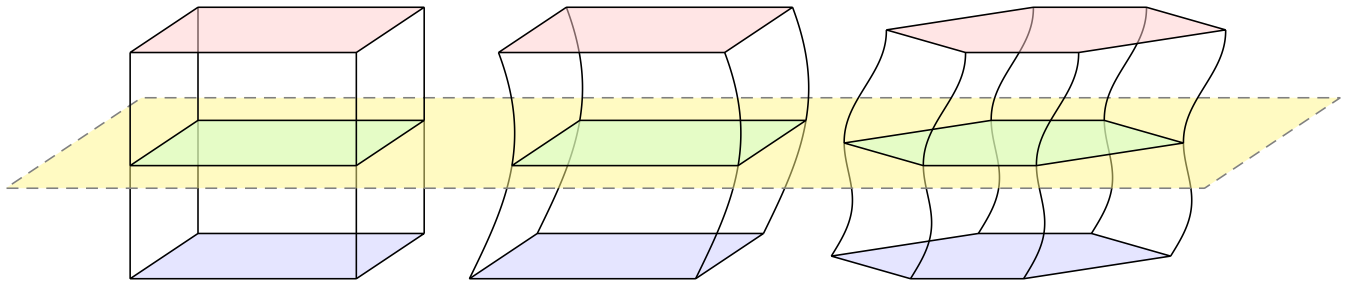
Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des **Rotationsparaboloids**

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z \}.$$

Lösung: Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_P(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_{z=0}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_P(x, y, z) \, d(x, y) \, dz \\ &= \int_{z=0}^h \pi z \, dz = \left[\frac{\pi}{2} z^2 \right]_{z=0}^h = \frac{\pi}{2} h^2. \end{aligned}$$

😊 Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie viermal soviel Flüssigkeit. Der Term h^2 ist kein Tippfehler, auch wenn man hier naiv vielleicht h^3 erwarten würde! Anders als im vorigen Beispiel des Kegels wächst hier das Volumen tatsächlich nur mit h^2 .



Korollar C1F: Cavalieri 1635 / Spezialfall des Satzes von Fubini

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ bezeichne A_t die Schnittmenge

$$A_t = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in A \}.$$

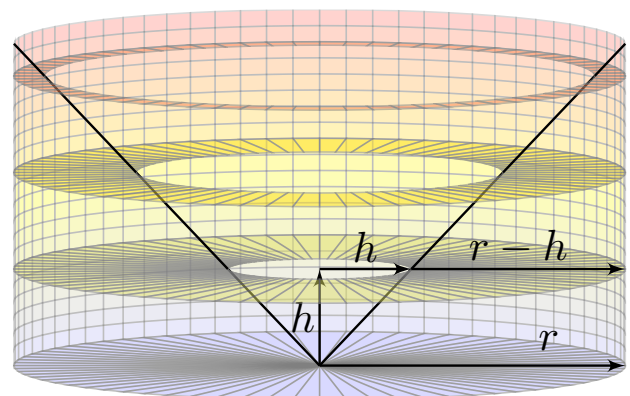
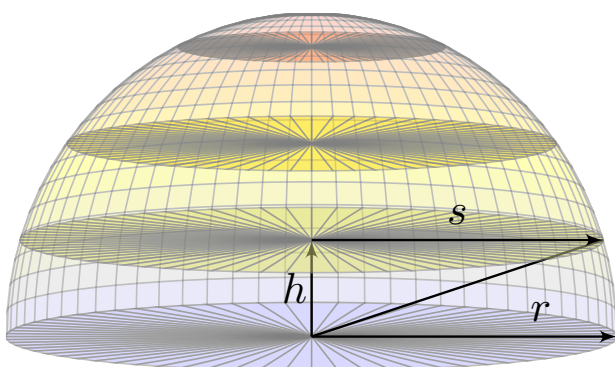
Dann gilt

$$\text{vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \text{vol}_{n-1}(A_t) dt.$$

Dies erlaubt einfache Vergleiche wie skizziert: Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Mengen mit $\text{vol}_{n-1}(A_t) = \text{vol}_{n-1}(B_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(B)$.

Kugelvolumen nach Archimedes

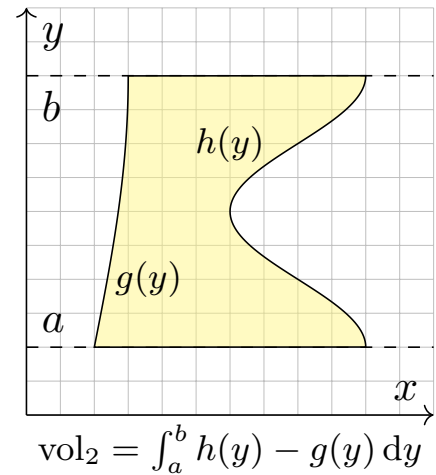
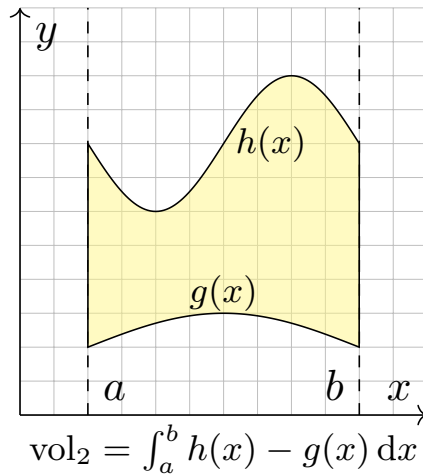
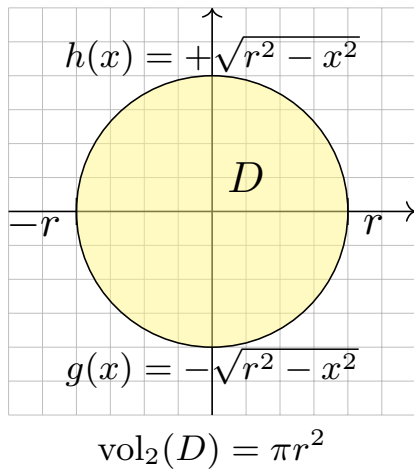
Das Prinzip von Cavalieri ist recht intuitiv. Manche nennen es den „Satz vom geschnittenen Brot“. Wir haben dieses Prinzip bereits bei den vorigen Volumenberechnungen angewendet. Manchmal können wir durch einen geschickten Vergleich das Volumen (fast) ohne Integralrechnung bestimmen. Das Kugelvolumen können wir dank Cavalieri geometrisch verstehen:



$$\begin{aligned} \text{Volumen der Halbkugel} &= \text{Volumen des Zylinders minus Kegel} \\ &= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Links: Auf der Höhe h ist der Kreisradius s gegeben durch $s^2 = r^2 - h^2$, die Kreisscheibe hat also den Flächeninhalt $\pi s^2 = \pi r^2 - \pi h^2$. Rechts: In Höhe h hat der Kreisring den Flächeninhalt $\pi r^2 - \pi h^2$. Nach dem Prinzip von Cavalieri haben somit beide Körper denselben Rauminhalt!

Normalbereiche (aka schlichte Bereiche)



Definition C1G: ebener Normalbereich

Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich in y -Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}.$$

mit $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g \leq h$. Entsprechend **in x -Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

Gilt beides, so nennen wir $B \subseteq \mathbb{R}^2$ einen **Binormalbereich**.

Integration über ebene Normalbereiche

Satz C1H: Fubini für ebene Normalbereiche

Jeder Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt, somit messbar, $\text{vol}_2(B) < \infty$.

Sei $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig.

Für $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}$ gilt dank Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Für $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}$ gilt dank Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{y=a}^b \int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy.$$

⚠ Zur Anwendung müssen Sie die Grenzen a, b, g, h des Bereichs B korrekt bestimmen. A423
 Manche Bereiche sind Normalbereiche sowohl in x - als auch in y -Richtung: Sie haben dann die Wahl und können sich den leichtesten Rechenweg aussuchen. Unsere Konstruktion des Integrals stellt sicher, dass das Ergebnis wohldefiniert ist, also unabhängig ist vom gewählten Rechenweg!

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x, y) = x^2 + y^2$ über die Kreisscheibe

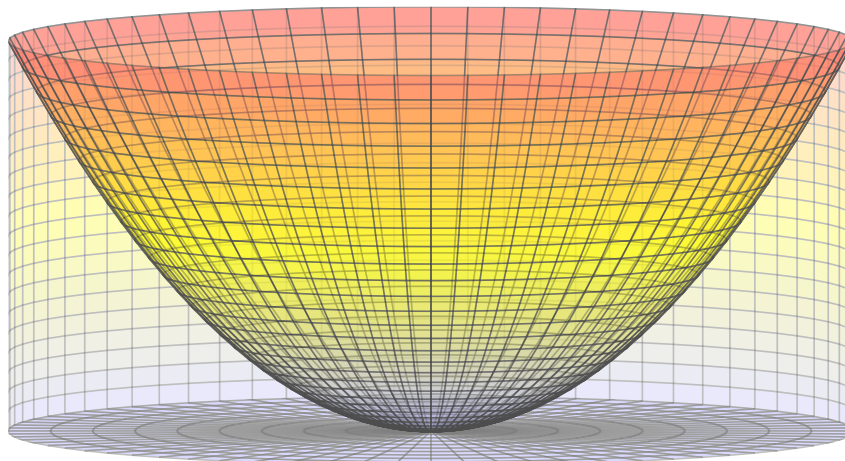
$$\begin{aligned} D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq y \leq r, -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \} \end{aligned}$$

Lösung: Wir wählen eine Beschreibung als Normalbereich:

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{x^2+y^2 \leq r} (x^2 + y^2) \, d(x, y) \\ &= \int_{x=-r}^r \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_{x=-r}^r \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \, dx \\ &= \int_{x=-r}^r \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - x^2} (2x^2 + r^2) \, dx = \dots \img alt="pencil icon" data-bbox="575 375 615 405" \dots = \frac{\pi}{2} r^4 \end{aligned}$$

Wenn Sie Herausforderungen mögen, versuchen Sie doch mal, das letzte Integral auszurechnen. Wenn Sie es lieber bequem mögen: Später gelingt die Rechnung spürbar leichter mit dem Transformationssatz. [C402](#) Die Wahl eines geschickten Rechenweges erfordert Übung!

Dieses Integral entspricht dem Trägheitsmoment eines Zylinders. [C402](#)
Anschaulich misst $\int_D (x^2 + y^2) \, d(x, y)$ das Volumen der Menge Q zwischen der Kreisscheibe $D \times \{0\}$ und der Fläche $z = x^2 + y^2$.



Das ist der Zylinder $Z = D \times [0, r^2]$ ohne das Rotationsparaboloid [C126](#)

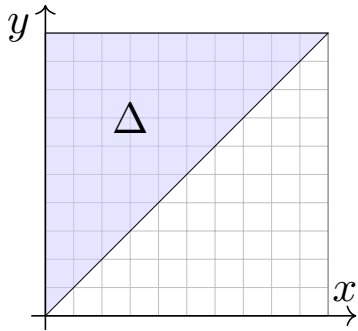
$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq r^2 \}.$$

Hier gilt $Z = Q \cup P$ mit $\text{vol}_3(Q \cap P) = 0$. Dank Additivität [A320](#) folgt

$$\text{vol}_3(Q) = \text{vol}_3(Z) - \text{vol}_3(P) = \pi r^4 - \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} r^4.$$

Die Qual der Wahl... der Integrationsreihenfolge

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x, y) = e^{-y^2/2}, \sin(y^2), \frac{e^{-y}}{y}, \frac{\sin(y)}{y}, \dots$ über



$$\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1 \}.$$

Lösung: Normalbereich in y - und x -Richtung:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}. \end{aligned}$$

☹ Der erste Anlauf ist nicht elementar integrierbar: Holzweg!

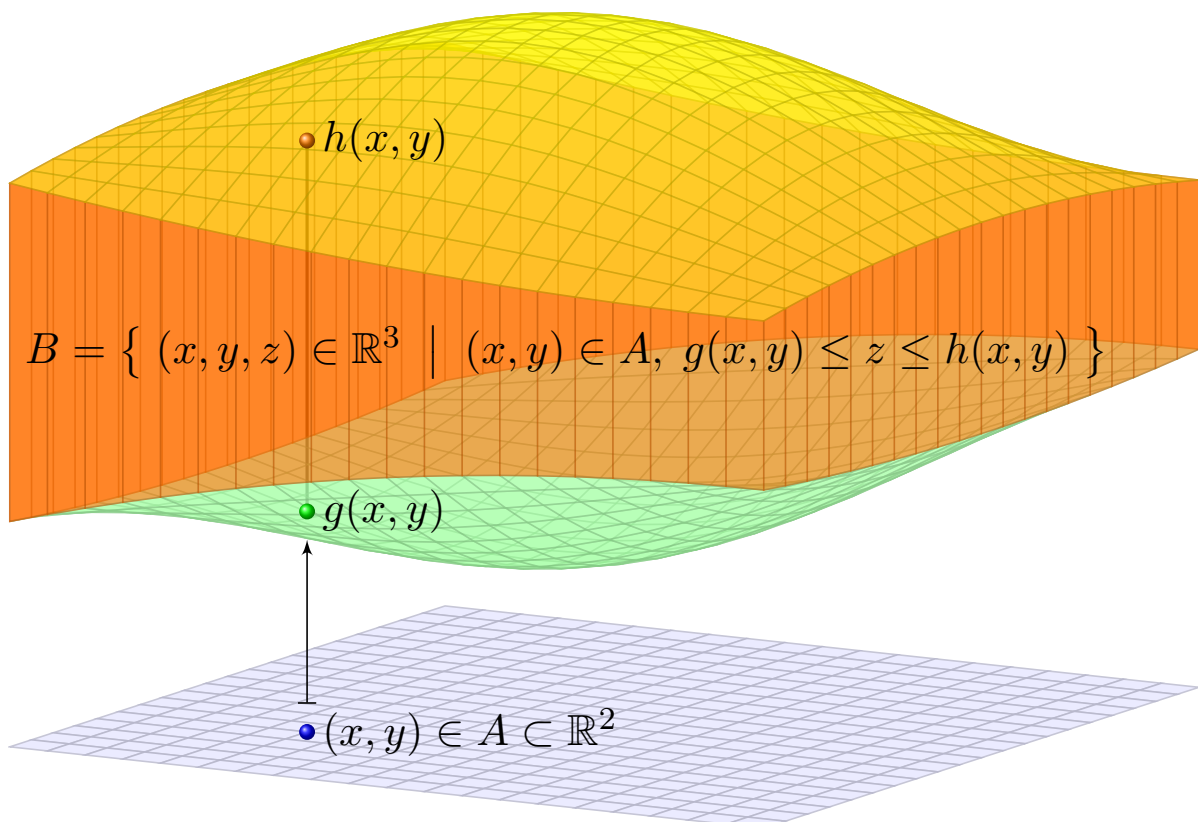
$$\int_{\Delta} f(x, y) d(x, y) \stackrel[\text{ClE}]{\text{Fub}} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 e^{-y^2/2} dy dx$$

😊 Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge gelingt es jedoch leicht:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} f(x, y) d(x, y) &\stackrel[\text{ClE}]{\text{Fub}} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y e^{-y^2/2} dx dy \stackrel[\text{BlI}]{\text{HDI}} \int_{y=0}^1 \left[x e^{-y^2/2} \right]_{x=0}^y dy \\ &= \int_{y=0}^1 y e^{-y^2/2} dy \stackrel[\text{BlI}]{\text{HDI}} \left[-e^{-y^2/2} \right]_{y=0}^1 = 1 - e^{-1/2} \approx 0.39347 \end{aligned}$$

Normalbereiche in höherer Dimension

Der Begriff der Normalbereiche überträgt sich in naheliegender Weise von ebenen Bereichen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$ in beliebiger Dimension:



Definition C1I: Normalbereich

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Normalbereich** in k -ter Richtung, wenn

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A, \right. \\ \left. g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq x_k \leq h(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \right\}$$

mit $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und stetigen Randfunktionen $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$.

In Worten: Die Grenzen für x_k hängen von den anderen Variablen ab.

Satz C1J: Fubini für Normalbereiche

Jeder Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und somit auch messbar.

Ist $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig, dann

$$\int_B f(x) dx = \int_{u \in A} \int_{v=g(u)}^{h(u)} f(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n) dv du$$

Ist auch A ein Normalbereich, so können wir das Verfahren iterieren. . .

Die Grenzen jeder Variable x_k hängen von den vorigen x_1, \dots, x_{k-1} ab.

Satz C1K: Fubini für iterierte Normalbereiche

Das Integral jeder absolut integrierbaren Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ über

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \right\}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) dx = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

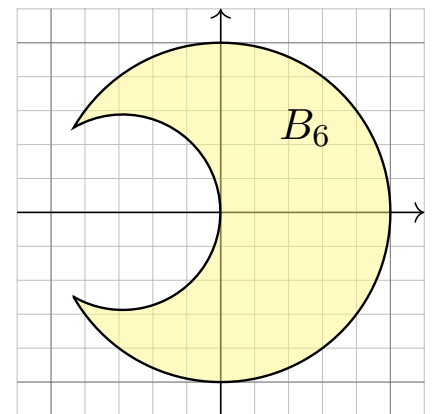
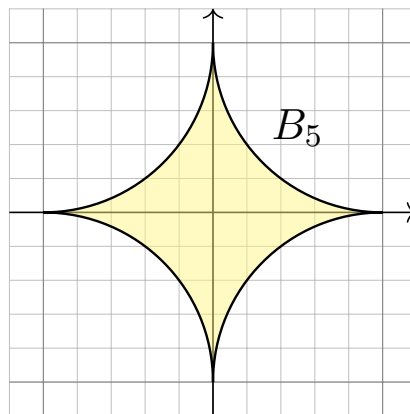
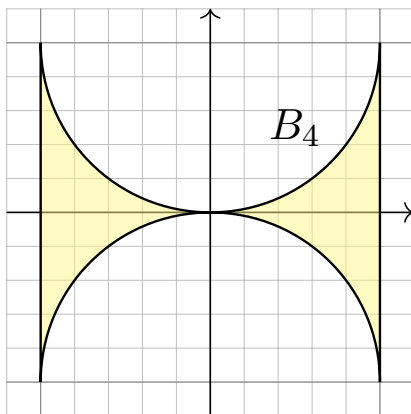
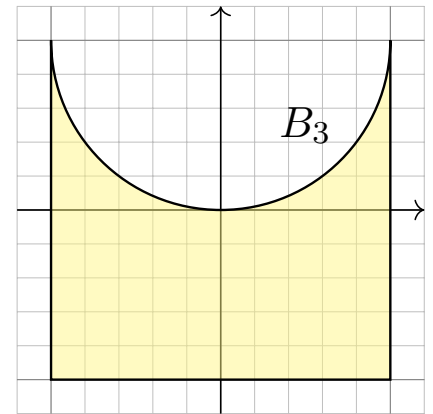
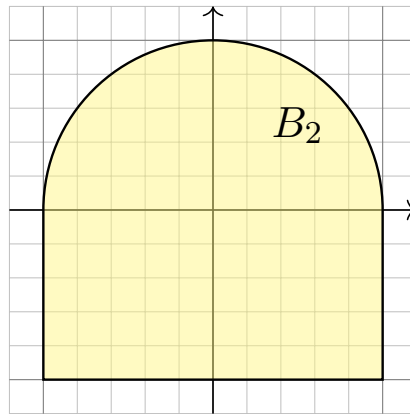
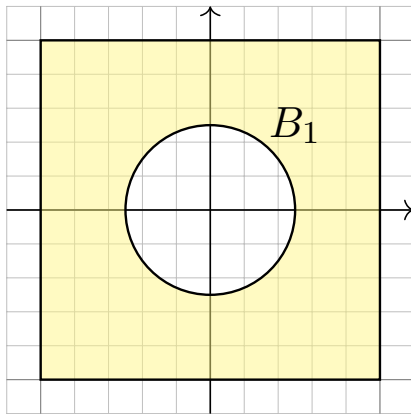
Übung: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den n -dimensionalen Simplex

$$\Delta_r^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq r \right\}.$$

Skizzieren Sie $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$ und berechnen Sie rekursiv das Volumen

$$\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n.$$

Lösung: Siehe Seite C425. Es gibt einige schöne Überraschungen!



Sehr oft müssen Sie zwischen Bild und Formel übersetzen, zwischen geometrischer und analytischer Beschreibung der Problemstellung. Die Analytische Geometrie gibt Ihnen hierzu Werkzeuge: Koordinaten! Diese nutzen Sie überall, zum Beispiel in der Konstruktionslehre bei der Bemessung und rechnerischen Auslegung der genutzten Bauteile. In Koordinaten sind Normalbereiche hierzu ein vielseitiges Werkzeug. Zur Illustration zeige ich einige Beispiele, von einfach bis knifflig:

Aufgabe: Die oben gezeigten kompakten Bereiche $B_1, B_2, \dots, B_6 \subseteq \mathbb{R}^2$ entstehen durch Vereinigung und Differenz aus Rechtecken $[a, b] \times [c, d]$ und Kreisscheiben, abgeschlossen $\bar{B}((p, q), r)$ bzw. offen $B((p, q), r)$.

- Beschreiben Sie die Menge B_i als Vereinigung bzw. Differenz.
- Ist B_i ein Normalbereich in y -Richtung? oder in x -Richtung?
Wenn ja, mit welchen Grenzen a, b, g, h ? *Explicit is beautiful!*
- Schreiben Sie $\int_{B_i} f(x, y) d(x, y)$ soweit möglich als Doppelintegral. (Die konkrete Rechnung zu gegebenem f führen wir hier nicht aus; die Techniken zur eindimensionalen Integration kennen Sie bereits.)

Lösung: (1a) Die Skizze zeigt $B_1 = [-1, 1]^2 \setminus B((0, 0), 1/2)$.

(1b) Dies ist kein Normalbereich in y -Richtung: Der Schnitt von B_1 mit der Geraden $\{x = 0\}$ besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist B_1 kein Normalbereich in x -Richtung: Symmetrie!

(1c) Hierzu müsste man B_1 in Normalbereiche zerlegen, etwa so:

$$\begin{aligned} &+ \int_{x=-1}^{x=-1/2} \int_{y=-1}^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=-1}^{-\sqrt{1/4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx \\ &+ \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=\sqrt{1/4-x^2}}^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=1/2}^1 \int_{y=-1}^1 f(x, y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

Genauso gelingt es in x -Richtung: Symmetrie! Eine Alternative wäre:

$$\int_{B_1} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{[-1, 1]^2} f(x, y) \, d(x, y) - \int_{B((0, 0), 1/2)} f(x, y) \, d(x, y)$$

Hierzu muss f auf $[-1, 1]^2$ gegeben und zudem absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.) Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

(2a) Die Skizze zeigt $B_2 = ([-1, 1] \times [-1, 0]) \cup \bar{B}((0, 0), 1)$.

(2b) Dies ist ein Normalbereich in y -Richtung:

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{-1}_{a} \leq x \leq \underbrace{+1}_{b}, \underbrace{-1}_{g(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{h(x)} \right\}$$

Es ist zudem ein Normalbereich in x -Richtung:

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq +1, g(y) \leq x \leq h(y) \right\}$$

Für $-1 \leq y \leq 0$ gilt hierbei $g(y) = -1$ und $h(y) = +1$;
für $0 \leq y \leq 1$ gilt $g(y) = -\sqrt{1-y^2}$ und $h(y) = \sqrt{1-y^2}$.

(2c) Integrale über B_2 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{B_2} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_{y=-1}^0 \int_{x=-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy + \int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Vorteil: Das erste Doppelintegral ist etwas leichter auszuschreiben. Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

(3a) Die Skizze zeigt $B_3 = [-1, 1]^2 \setminus B((0, 1), 1)$.

(3b) Dies ist ein Normalbereich in y -Richtung:

$$B_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{-1 \leq x \leq +1}_a, \underbrace{-1 \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - x^2}}_{\substack{g(x) \\ h(x)}} \right\}$$

Hingegen ist B_3 kein Normalbereich in x -Richtung: Für jedes $c \in]0, 1[$ besteht der Schnitt $B_3 \cap \{y = c\}$ aus zwei Intervallen, nicht aus einem!

(Falls nötig oder gewünscht können wir B_3 geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in x -Richtung entstehen.)

(3c) Integrale über B_3 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_3} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

(4a) Die Skizze zeigt $B_4 = [-1, 1]^2 \setminus [B((0, 1), 1) \cup B((0, -1), 1)]$.

(4b) Dies ist ein Normalbereich in y -Richtung:

$$B_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{-1 \leq x \leq +1}_a, \underbrace{\sqrt{1 - x^2} - 1 \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - x^2}}_{\substack{g(x) \\ h(x)}} \right\}$$

Hingegen ist B_4 kein Normalbereich in x -Richtung: Für $c \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ besteht der Schnitt $B_4 \cap \{y = c\}$ aus zwei Intervallen, nicht aus einem!

(Falls nötig oder gewünscht können wir B_4 geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in x -Richtung entstehen.)

(4c) Integrale über B_4 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_4} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=\sqrt{1-x^2}-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

(5a) Die Skizze zeigt $B_5 = [-1, 1]^2 \setminus \bigcup B((\pm 1, \pm 1), 1)$.

(5b) Dies ist ein Normalbereich in y -Richtung:

$$B_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

Wie finden wir $g(x)$ und $h(x)$? Die Kreisgleichung $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ liefert den Viertelbogen oben rechts: $y = 1 - \sqrt{1 - (1-x)^2}$. Demnach:

$$g(x) = \sqrt{1 - (1 - |x|)^2} - 1, \quad h(x) = 1 - \sqrt{1 - (1 - |x|)^2}$$

Genauso gelingt es in x -Richtung: Nutzen Sie die Symmetrie!

(5c) Integrale über B_5 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{B_5} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=\sqrt{1-(1-|x|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|x|)^2}} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_{y=-1}^1 \int_{x=\sqrt{1-(1-|y|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|y|)^2}} f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

(6a) Die Skizze zeigt $B_6 = \bar{B}((0, 0), 1) \setminus B((-r, 0), r)$ für $r \approx 0.58$.

(6b) Dies ist kein Normalbereich in y -Richtung: Der Schnitt von B_6 mit der Geraden $\{x = -0.5\}$ besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist B_6 kein Normalbereich in x -Richtung: Der Schnitt von B_6 mit der Geraden $\{y = 0.5\}$ besteht aus einem Intervall und einem Punkt.

(6c) Wenn der Integrationsbereich B_6 schon so mühsam ist, dann wohl auch das Integral $\int_{B_6} f(x, y) \, d(x, y)$. Oft hilft der folgende einfache Trick:

$$\int_{B_6} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\bar{B}((0,0),1)} f(x, y) \, d(x, y) - \int_A f(x, y) \, d(x, y)$$

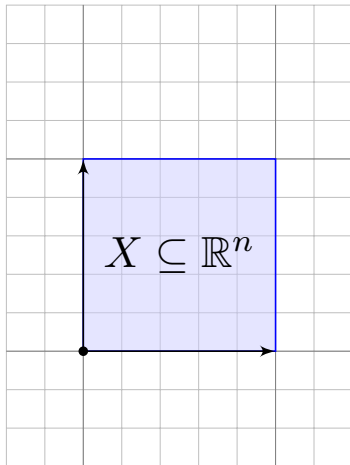
Hierzu nehmen wir an, dass unser Integrand f bereits auf der großen Kreisscheibe $\bar{B}((0, 0), 1)$ gegeben ist und dort absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.)

Das letzte Integral geht nicht über die ganze Kreisscheibe $B((-r, 0), r)$, das wäre zuviel, sondern nur über $A = \bar{B}((0, 0), 1) \cap B((-r, 0), r)$; dies kann man als y -Normalbereich darstellen, nach genauerer Rechnung.

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Transformation von Volumina

Wie verhält sich das Volumen von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ unter Transformationen?



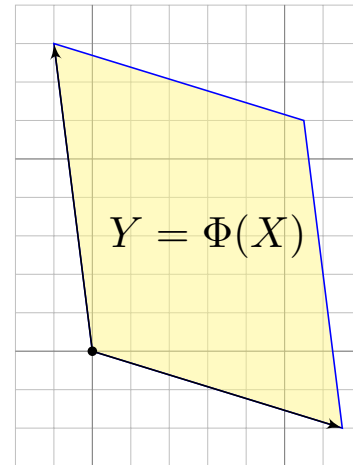
Affin-lineare Abb.

$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto y = v + Tx$$

Beispiel: $v = 0$

$$T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1.6 \end{pmatrix}$$

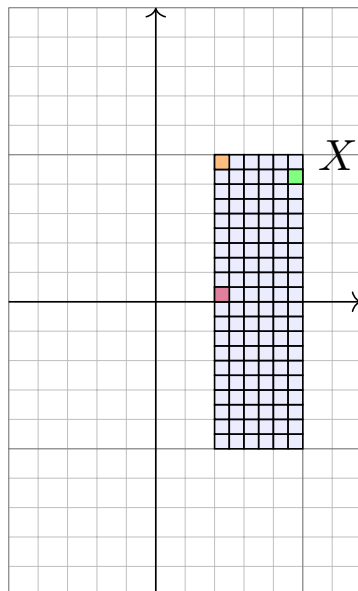


Wie verhält sich das Volumen unter affin-linearen Abbildungen?

$$\text{vol}_n(Y) = \text{vol}_n(X) \cdot |\det(T)|$$

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.11. Das ist speziell für $n = 2$ das Kreuzprodukt, für $n = 3$ das Spatprodukt. Wir können die Formel dank Fubini und Substitution nachrechnen, siehe unten C2F. Beispiele: Für Drehungen gilt $\det T = +1$, für Spiegelungen $\det T = -1$. Für die allseitige Streckung mit konstantem Faktor $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det T = a^n$.

Transformation von Volumina



Stetig diff'bare Abbildung

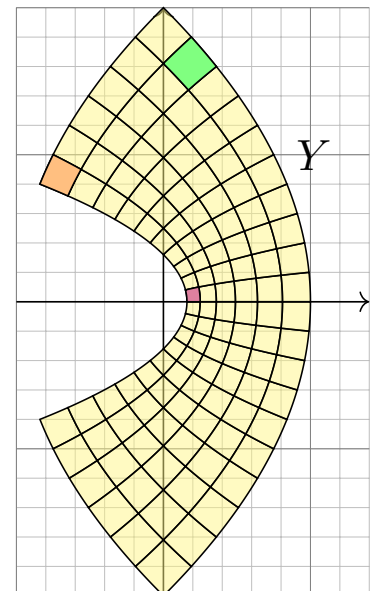
$$\Phi: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(x+h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$$

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2)$$



Satz C2A: Transformationssatz für n -dimensionale Volumina

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi: X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig diff'bar:

$$\text{vol}_n(Y) = \int_Y 1 \, dy = \int_X \underbrace{|\det \Phi'(x)|}_{\text{Fu'det}} \, dx$$

Die Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ beschreibt einen **Koordinatenwechsel**:

Sie ordnet jedem Punkt $x \in X$ genau einen Bildpunkt $y = \Phi(x) \in Y$ zu.

Bijektivität bedeutet: Zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein Urbild $x \in X$.
(Injektiv/surjektiv: Jedes y wird höchstens/mindestens einmal getroffen.)

Die Punkte $y \in Y$ können wir also auf zwei Arten beschreiben:

durch ihre kartesischen Koordinaten $y = (y_1, \dots, y_n)$, wie immer,
aber ebenso durch die krummlinigen Koordinaten $y = \Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Was heißt hier $\Phi : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar mit Ableitung Φ' ?

Wenn der Integrationsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht offen ist, so verlangen wir
 $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U \supseteq X$.

Die Ableitung $\Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dann die **Jacobi-Matrix**

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\det \Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Funktionaldeterminante** von Φ .

Der Betrag $|\det \Phi'|$ misst die durch Φ bewirkte **Volumenverzerrung**.

Die hier als Beispiel gezeigte Abbildung $x \mapsto y = \Phi(x)$ ist nicht linear.

Wir sehen: Die Volumenverzerrung $|\det \Phi'(x)|$ hängt vom Punkt x ab!

😊 Die Transformationsformel wird wunderbar anschaulich durch die Taylor-Entwicklung $\Phi(x+h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$ bis zum linearen Term. Kleine Quader $x+A$ werden abgebildet auf $\Phi(A) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)(A)$, also $\text{vol}_n(\Phi(A)) \approx \text{vol}_n(A) \cdot |\det \Phi'(x)|$ wie zuvor erklärt. Summation über eine Zerlegung in viele kleine Quader ergibt die obige Formel.

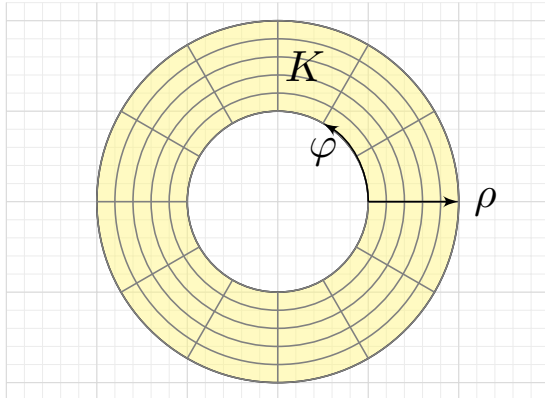
😊 Uparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so die Rechnung zu vereinfachen. Vermutet wurde der Transformationssatz schon von Euler (1769) für Doppelintegrale und von Lagrange (1773) für Dreifachintegrale — und von allen ausgiebig genutzt. Ein strenger Beweis ist technisch schwierig und wurde erst über hundert Jahre später von Cartan (1890) entwickelt.

😊 Praktische Anwendung: Statt Φ bijektiv genügt, dass Φ injektiv ist bis auf eine Nullmenge in X und surjektiv bis auf eine Nullmenge in Y .

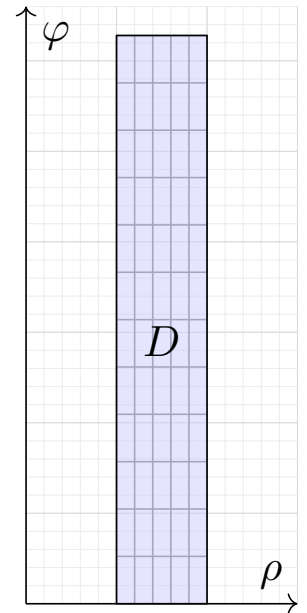
Aufgabe: Parametrisieren Sie den Kreisring

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \}$$

in Polarkoordinaten. Berechnen Sie so seine Fläche.



← Φ



Lösung: Für K sind Polarkoordinaten besonders gut angepasst!

$$K = \{ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \mid r_0 \leq \rho \leq r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi \}$$

😊 Die Skizze zeigt die Volumenverzerrung proportional zu $\det \Phi' = \rho$. Die kleinen Rechtecke wiegen weniger, die großen Rechtecke mehr!

Als **Parametrisierung** nutzen wir (wie skizziert und vorgeschlagen)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\rho, \varphi) \in [r_0, r_1] \times [0, 2\pi[=: D.$$

😊 Die Abbildung $\Phi : D \rightarrow K$ ist bijektiv und stetig differenzierbar.

Wir berechnen ihre **Jacobi-Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Flächenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(K) &= \int_K 1 \, d(x, y) \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2A}}}{=} \int_D \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, d(\rho, \varphi) \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \int_{\rho=r_0}^{r_1} 2\pi \rho \, d\rho \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \left[\pi \rho^2 \right]_{\rho=r_0}^{r_1} = \pi(r_1^2 - r_0^2) \end{aligned}$$

😊 Plausibilitätsprüfung: Dasselbe Ergebnis folgt aus der Kreisfläche.

⚠️ Es gilt $\text{vol}_2(D) = 2\pi(r_1 - r_0)$. Man beachte die Volumenverzerrung!

Auf dem Definitionsbereich $D = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi[$ definiert $\Phi : D \rightarrow K$ eine Bijektion, wie im Satz verlangt. Ebenso $[r_0, r_1] \times [-\pi, \pi[$, oder

$$\begin{array}{cccc} [r_0, r_1], & [r_0, r_1[, &]r_0, r_1], &]r_0, r_1[, \\ [0, 2\pi], & [0, 2\pi[, &]0, 2\pi], &]0, 2\pi[. \end{array}$$

! Für manche dieser Wahlen ist Φ nicht injektiv bzw. nicht surjektiv. Der Unterschied ist nur eine Menge vom Volumen 0, also unwesentlich.

Aufgabe: Was erhalten Sie bei den folgenden Polarkoordinaten?

$$\Phi_1 : X_1 = [r_0, r_1] \times [0, \pi] \rightarrow K, \quad \Phi_7 : X_7 = [r_0, r_1] \times [0, 7\pi] \rightarrow K.$$

Gilt hier die Volumenformel $\text{vol}_2(K) = \int_X |\det \Phi'(x)| dx$? Begründung?

Lösung: Die Abbildung Φ_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv: Nur der obere Halbring wird durchlaufen, daher wird auch nur seine Fläche integriert.

Die Abbildung Φ_7 hingegen ist surjektiv, aber nicht injektiv: Der Kreisring wird dreimal durchlaufen, der obere Halbring sogar noch ein viertes Mal. Daher wird die Fläche drei bzw. viermal gezählt. So wird es nichts!

Aufgabe: Was passiert, wenn Sie im Transformationssatz für Volumina (C2A) bei der Funktionaldeterminante den Betrag weglassen?

$$\text{vol}_n(Y) = \int_Y 1 dy \stackrel{?}{=} \int_X \det \Phi'(x) dx$$

Lösung: Wir zerlegen den Integrationsbereich X in drei Teile:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) = 0 \} \\ X_+ &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) > 0 \} \\ X_- &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) < 0 \} \end{aligned}$$

Über X_0 verschwindet das rechte Integral, denn der Integrand ist Null. Das linke Integral verschwindet über $Y_0 = \Phi(X_0)$, da vom Volumen 0.

Für die Einschränkung $\Phi : X \setminus X_0 \rightarrow Y \setminus Y_0$ gilt überall $\det \Phi' \neq 0$.

Das Integral über X_+ wird wie zuvor positiv gezählt. Das Integral über X_- hingegen wird negativ gezählt, da wir es umgekehrt orientieren.

Wenn wir also links das (unorientierte) positive Volumen von Y messen wollen, dann müssen wir rechts den Betrag der Determinante nehmen.

Satz C2B: Transformationssatz für n -dimensionale Integrale

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig diff'bar.

(1) Ist $f : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, und es gilt

$$\int_Y |f(y)| \, dy = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_Y f(y) \, dy = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

Merkregel analog zur Substitution: Für $y = \Phi(x)$ gilt $dy = |\det \Phi'(x)| \, dx$.

😊 Uparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so unsere Rechnung zu vereinfachen.

😊 Praktische Anwendung: Statt Φ bijektiv genügt, dass Φ injektiv ist bis auf eine Nullmenge in X und surjektiv bis auf eine Nullmenge in Y .

Transformationssatz vs SubstitutionsregelC210
Erläuterung

Aufgabe: Folgern Sie in Dimension $n = 1$ die obige Formel des Transformationssatzes C2B aus der Substitutionsregel B1κ.

Lösung: Der HDI impliziert die bekannte Substitutionsregel B1κ:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) \, dx = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) \, dy.$$

Hierzu sei $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $f : \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. In Satz C2B setzen wir zusätzlich $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ als bijektiv voraus. Wir unterscheiden daher zwei Fälle, je nachdem, ob Φ wächst oder fällt.

(1) Ist $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ wachsend, $\Phi' \geq 0$, $\Phi(a) = c$, $\Phi(b) = d$, so gilt:

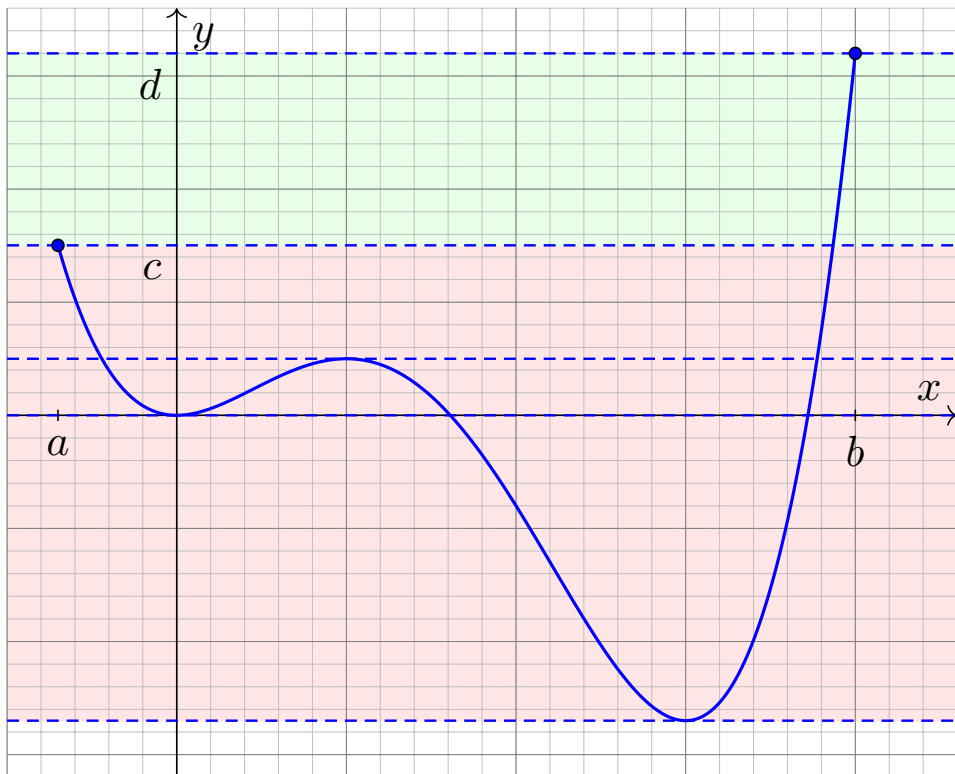
$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) |\Phi'| = \int_a^b (f \circ \Phi) \Phi' = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f = \int_{[c,d]} f$$

(2) Ist $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ fallend, $\Phi' \leq 0$, $\Phi(a) = d$, $\Phi(b) = c$, so gilt:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) |\Phi'| = - \int_a^b (f \circ \Phi) \Phi' = - \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f = \int_{\Phi(b)}^{\Phi(a)} f = \int_{[c,d]} f$$

😊 In beiden Fällen gilt der Transformationssatz C2B wie angegeben.

Aufgabe: Untersuchen Sie (für $f = 1$) die nicht-bijektive Transformation $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ sowie $a = -0.7, b = 4$. Was sagt die Substitutionsregel? Was sagt der Transformationssatz?



$n = 0 \quad m = 0$

$n = 1 \quad m = 1$

$n = 2 \quad m = 0$

$n = 4 \quad m = 0$

$n = 2 \quad m = 0$

$n = 0 \quad m = 0$

Lösung: Die Funktion Φ verläuft von $c = \Phi(a) \approx 15$ nach $d = \Phi(b) = 32$, allerdings nicht monoton. Die Substitutionsregel B1K lässt sich dennoch anwenden. Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt demnach:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{y=c}^d f(y) dy.$$

Der Transformationssatz verlangt zudem Bijektivität; sie gilt hier nicht!

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x)) |\Phi'(x)| dx \neq \int_{[c,d]} f(y) dy.$$

Eine Kurvendiskussion liefert für Φ den oben skizzierten Verlauf mit lok. Minimum in $x = 0, \Phi(0) = 0$, lok. Maximum in $x = 1, \Phi(1) = 5$, lok. Minimum in $x = 3, \Phi(3) = -27$. Somit durchläuft Φ auch Punkte in $[-27, c]$ zwei- bzw. viermal! Anders als die Substitutionsregel integriert die Transformationsformel (mit Betrag) sie fälschlicherweise mit auf. In der orientierten Zählweise (ohne Betrag) bleibt in der Gesamtbilanz nur das Integral über $[c, d]$: Genau das besagt die Substitutionsregel!

Obiger Satz C2B verlangt **bijektive** Parametrisierungen $\Phi : X \rightarrow Y$, das heißt, zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $\Phi(x) = y$.

😊 Geeignet umformuliert gilt der Satz auch ohne Bijektivität – und hat dieselben schönen Eigenschaften wie die Substitutionsregel für $n = 1$!

Zu jedem Punkt $y \in Y$ zählen wir die **Urbilder** bezüglich $f : X \rightarrow Y$:

$$n : Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) \neq 0\}$$

Genauer zählen wir zum Punkt $y \in Y$ **positive und negative Urbilder**:

$$n_{\pm} : Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_{\pm}(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) \gtrless 0\}$$

Wir erhalten so die **geometrische Vielfachheit** $n = n_+ + n_-$ und die **algebraische Vielfachheit** $m := n_+ - n_-$ aufgrund der Orientierung.

Beispiel: Die Werte sind in der vorigen Kurvendiskussion angegeben. Dies entspricht anschaulich der Durchlaufungsrichtung (hoch/runter).

Satz C2c: Transformationsatz mit Orientierung

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \rightarrow Y$ stetig diff'bar. Dann sind

$$n_+ : Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_+(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) > 0\},$$

$$n_- : Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_-(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) < 0\},$$

messbare Funktionen, ebenso $n := n_+ + n_-$ und $m := n_+ - n_-$.

(1) Ist $f : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, und es gilt

$$\int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx = \int_Y |f(y)| \cdot n(y) dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so gilt absolute Integrierbarkeit und

$$\begin{aligned} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx &= \int_Y f(y) \cdot n(y) dy, \\ \int_X f(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) dx &= \int_Y f(y) \cdot m(y) dy. \end{aligned}$$

Aufgabe: Überprüfen Sie diesen Satz im obigen Beispiel:

$$\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad a = -0.7, \quad b = 4$$

Stimmen Substitutionsregel und Transformationsformel nun überein?

Lösung: Φ verläuft von $c = \Phi(a) \approx 15$ nach $d = \Phi(b) = 32$.

Die vertraute Substitutionsregel B1k besagt demnach:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) dy = \int_{y=c}^d f(y) dy.$$

Die algebraische Vielfachheit m ist $m = 1$ auf $]c, d]$ und $m = 0$ sonst.

Die orientierte Transformationsformel C2c besagt demnach:

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot m(y) dy = \int_{[c,d]} f(y) dy.$$

😊 Dank der algebraischen Vielfachheit m stimmen beide nun überein!

Die orientierten Formeln klären zwei Aspekte der Transformation:

(1) Der Transformationssatz verlangt $\Phi : X \rightarrow Y$ bijektiv. Die orientierte Formulierung erlaubt beliebige Φ , da nun die Vielfachheiten zählen.

(2) Der Transformationssatz nutzt zunächst nur $|\det \Phi'|$. Die orientierte Fassung unterscheidet positive Orientierung $\det \Phi' > 0$ und negative Orientierung $\det \Phi' < 0$ und zählt die Urbilder entsprechend.

Die beiden wichtigsten Spezialfälle kennen wir bereits:

Ist $\Phi : X \rightarrow Y$ bijektiv und $\det \Phi' > 0$, so gilt $n^+ = 1$ und $n^- = 0$.

Ist $\Phi : X \rightarrow Y$ bijektiv und $\det \Phi' < 0$, so gilt $n^+ = 0$ und $n^- = 1$.

Die Formulierung mit Orientierung und Vielfachheiten ist dann genau der obige Transformationssatz mit Absolutbetrag ohne Vielfachheiten.

Umgekehrt folgt aus der absoluten die orientierte Formel durch Zerlegen und Aufsummieren. Beide Sätze C2B und C2c sind demnach äquivalent.

Wir nutzen im Folgenden meist bijektive, positive Parametrisierungen.

Diese Einschränkung vereinfacht die Formulierung wie oben diskutiert.

In Dimension $n = 1$ ist uns der Transformationssatz C2B bereits vertraut. In Dimension $n \geq 2$ rechnen wir ihn für einfache Transformationen nach:

😊 Hierzu genügen uns bereits Fubini (C1E) und Substitution (B1K).

Sei $X = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und $\Phi: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\partial_i \Phi_i > 0$ sowie $\partial_j \Phi_i = 0$ für $j > i$. Für $n = 2$ kurz:

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2) \\ \Phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \partial_1 \Phi_1 \cdot \partial_2 \Phi_2 > 0$$

Das heißt, die Jacobi-Matrix Φ' soll eine untere Dreiecksmatrix sein.

Lemma C2D: einfache Transformationen

Für solch einfache Transformationen gilt die Formel C2B.

- Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie das Bild $Y = \Phi(X)$ als Normalbereich.
 (2) Ist $\Phi: X \rightarrow Y$ bijektiv? Auch wenn statt $\partial_i \Phi_i > 0$ nur $\partial_i \Phi_i \geq 0$ gilt?
 (3) Folgern Sie die Transformationsformel aus Fubini und Substitution.

Lösung: Wir führen hier $n = 2$ aus; der Fall $n \geq 3$ verläuft genauso.

(1) Wegen $\partial_2 \Phi_1 = 0$ hängt $\Phi_1(x_1, x_2)$ nicht von x_2 ab, wir schreiben kurz $\Phi_1(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1)$. Wegen $\partial_1 \Phi_1 > 0$ ist $x_1 \mapsto \Phi_1(x_1)$ streng wachsend, somit bijektiv von $[a_1, b_1]$ auf $[c_1, d_1]$ mit $c_1 = \Phi_1(a_1)$ und $d_1 = \Phi_1(b_1)$.

Zu jedem $x_1 \in [a_1, b_1]$ ist die Funktion $x_2 \mapsto \Phi_2(x_1, x_2)$ streng wachsend, somit bijektiv von $[a_2, b_2]$ auf $[c_2(x_1), d_2(x_1)]$ mit $c_2(x_1) = \Phi_2(x_1, a_2)$ und $d_2(x_1) = \Phi_2(x_1, b_2)$. Das Bild $Y = \Phi(X)$ ist daher ein Normalbereich:

$$Y = \Phi(X) = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 \leq y_1 \leq d_1, g(y_1) \leq y_2 \leq h(y_1) \right\}$$

mit den Randfunktionen $g(y_1) = c_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$ und $h(y_1) = d_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$.

(2) Ja, $\Phi: X \rightarrow Y$ ist bijektiv: Surjektiv auf Y nach Konstruktion.

Zudem ist Φ injektiv, denn es erhält die lexikographische Ordnung:

Für $(x_1, x_2) \neq (x'_1, x'_2)$ unterscheiden wir zwei mögliche Fälle:

Für $x_1 \leq x'_1$ gilt $y_1 \leq y'_1$. Für $x_1 = x'_1$ gilt $x_2 \leq x'_2$ und somit $y_2 \leq y'_2$.

Fordern wir nur $\partial_1 \Phi_1 \geq 0$ und $\partial_2 \Phi_2 \geq 0$, so gilt statt „streng wachsend“ nur noch „schwach wachsend“, und $\Phi: X \rightarrow Y$ ist i.A. nicht mehr bijektiv.

(3) Die Transformationsformel folgt nun dank Fubini und Substitution:

$$\begin{aligned}
 \int_Y f(y) \, dy &\stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{y_1=c_1}^{d_1} \int_{y_2=g(y_1)}^{h(y_1)} f(y_1, y_2) \, dy_2 \, dy_1 \\
 &\stackrel{\substack{\text{Subs} \\ \text{B1K}}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{y_2=\Phi_2(x_1, a_2)}^{\Phi_2(x_1, b_2)} f(\Phi_1(x_1), y_2) \, dy_2 \cdot \partial_1 \Phi_1(x_1) \, dx_1 \\
 &\stackrel{\substack{\text{Subs} \\ \text{B1K}}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2)) \cdot \partial_2 \Phi_2(x_1, x_2) \, dx_2 \cdot \partial_1 \Phi_1(x_1) \, dx_1 \\
 &\stackrel{\text{Det}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2)) \cdot |\det \Phi'(x_1, x_2)| \, dx_2 \, dx_1 \\
 &\stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, dx
 \end{aligned}$$

In dieser Rechnung nehmen wir f als stetig an: Die Integrationsbereiche Y und X sind kompakt, hierauf sind f bzw. $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ stetig und somit absolut integrierbar, daher können wir Fubini C1E anwenden. Ebenso können wir die Substitution B1K anwenden. Per Grenzübergang gilt die Transformationsformel dann für jede absolut integrierbare Funktion f wie in Satz C2B. Die Rechnung (3) gilt wörtlich genauso, wenn wir allgemeiner nur $\partial_1 \Phi_1 \geq 0$ und $\partial_2 \Phi_2 \geq 0$ fordern. Wenn wir auch dies noch fallen lassen, so erhalten wir die Formel aus Satz C2C.

Die Transformationsformel bei Komposition

Lemma C2E: Komposition von Transformationen

Gilt die Formel C2B für die Transformationen $\Phi: X \rightarrow Y$ und $\Psi: Y \rightarrow Z$, dann gilt sie auch für ihre Komposition $H = \Psi \circ \Phi: X \rightarrow Z$.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussage nach! Die Formel gilt also für alle Transformationen wie in der vorigen Aufgabe und ihre Kompositionen.

Lösung: Wir nehmen an, die Transformationsformel gilt für Φ und Ψ :

$$\begin{aligned}
 \int_Z f(z) \, dz &\stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2B}}}{=} \int_Y f(\Psi(y)) \cdot |\det \Psi'(y)| \, dy \\
 &\stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2B}}}{=} \int_X f(\Psi(\Phi(x))) \cdot |\det \Psi'(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \, dx \\
 &\stackrel{\text{Komp}}{=} \int_X f(H(x)) \cdot |\det H'(x)| \, dx
 \end{aligned}$$

Für $H(x) = \Psi(\Phi(x))$ gilt die Kettenregel $H'(x) = \Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)$ der Jacobi-Matrizen (Nachrechnen!), und die Determinante ist multiplikativ.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + v$ affin-linear.

Für $n = 2$ betrachten wir folgende **elementaren Transformationen**:

Verschiebung $\Phi_0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2$

Streckung $\Phi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$

Scherung $\Phi_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

Spiegelung $\Phi_3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Lemma C2F: affin-lineare Transformationen

Für jede affin-lineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt die Formel C2B.

- Aufgabe:** (1) Zeigen Sie dies für die elementaren Transformationen!
 (2) Dank Gauß–Algorithmus ist jede affin–lineare Transformation eine Komposition von elementaren. Folgern Sie hieraus das Lemma!

Lösung: (1) Die ersten drei Transformationen Φ_0, Φ_1, Φ_2 erfüllen unmittelbar die Bedingung $\Phi' = \begin{pmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{pmatrix}$ des obigen Lemmas C2D. Demnach gilt hier die Transformationsformel C2B. (Wenn Sie möchten, können Sie diese Spezialfälle als Übung nochmal direkt nachrechnen.)

Wie untersuchen daher nur noch den verbleibenden letzten Fall Φ_3 . Es gilt $\Phi_3 : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $Y = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$. Die Jacobi–Matrix $\Phi'_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat Determinante $\det \Phi'_3(x) = -1$. Dank Fubini und den Substitutionen $y_1 = x_2$ und $y_2 = x_1$ finden wir:

$$\begin{aligned} \int_Y f(y_1, y_2) \, d(y_1, y_2) &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{y_1=a_2}^{b_2} \int_{y_2=a_1}^{b_1} f(y_1, y_2) \, dy_2 \, dy_1 \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \int_{x_1=a_1}^{b_1} f(x_2, x_1) \, dx_1 \, dx_2 \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_X f(x_2, x_1) \, d(x_1, x_2) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, dx \end{aligned}$$

(2) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + v$ eine affin-lineare Transformation. Das Integral ist invariant unter Verschiebung $\Psi : x \mapsto x + v$, mit $v \in \mathbb{R}^n$. Wir untersuchen lineare Transformationen $\Phi : x \mapsto Ax$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

Die vorigen Rechnungen zeigen die Transformationsformel C2B für

- 1 jede Diagonalmatrix $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$,
- 2 Scherung / die Addition einer Zeile zu einer anderen,
- 3 Spiegelung / die Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten.

Mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allein durch die beiden Operationen (2) und (3) auf Diagonalgestalt (1) bringen.

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.7–4.12.

Für jede dieser elementaren Transformationen gilt die Formel C2B, dank Lemma C2E gilt sie dann auch für ihre Komposition A .

Somit gilt die ersehnte Formel C2B für jede affin-lineare Transformation $\Phi : x \mapsto Ax + v$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. 😊 Das wollten wir zeigen.

😊 Die Rechnung ist zwar länglich, aber elementar. Sie rechtfertigt die eingangs motivierte Volumenverzerrung affiner Transformationen. C201

Die vorigen Übungen und Lemmata zeigen wichtige Spezialfälle des Transformationssatzes C2B: Wir können sie explizit nachrechnen und erfahren dabei, *wie* und *warum* die angegebene Formel funktioniert.

Der Transformationssatz gilt für alle einfachen Transformationen (C2D) und für ihre Kompositionen (C2E). Es genügt demnach nachzuweisen, dass *jede* Transformation eine Komposition von einfachen ist.

Für affin-lineare Transformationen (C2F) haben wir dies mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erledigt. Im allgemeinen Falle gelingt dies genauso, zumindest nach geeigneter Zerlegung. Die technischen Details sind etwas aufwändiger, ich begnüge mich hier daher mit dieser Skizze.

Anstelle eines Beweises möchte ich als versöhnliches Fazit festhalten:

- 😊 Der Transformationssatz ist geometrisch anschaulich und intuitiv.
- 😊 Seine Voraussetzungen sind wichtig, aber sehr milde und oft erfüllt.
- 😊 Er folgt aus Fubini und HDI, hier eindimensionale Substitution: Diese Kernidee können wir wie gezeigt direkt explizit nachrechnen! Nach diesen *Grundlagen* widmen wir uns nun den *Anwendungen*...

😊 Eine berühmte Anwendung der zweidimensionalen Integration:

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die **Gaußsche Glockenkurve**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2/2}, \quad \text{ sowie die Glockenfläche}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = f(x)f(y) \quad \text{ für } x, y \in [-3, 3].$$

(2) Können Sie $\int_a^b e^{-x^2/2} dx$ in geschlossener Form angeben?

(3) Berechnen Sie zur Funktion g das Flächenintegral

$$\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y)$$

über dem Kreisring $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \}$.

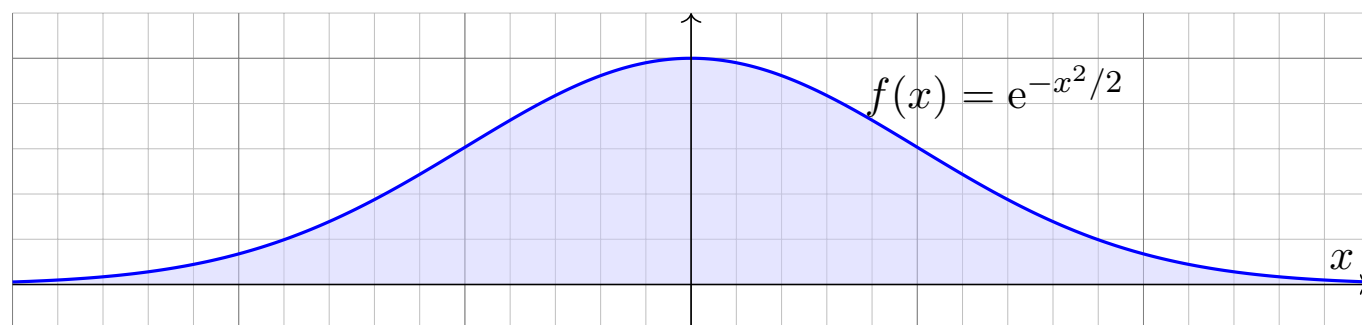
(4) Welches Integral erhalten Sie für $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$?

(5) Bestimmen Sie hiermit das Integral $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$.

😞 Dieses Integral konnten wir mit eindim. Integration nicht berechnen.

😊 Mit zweidimensionaler Integration hingegen gelingt es nun leicht!

Lösung: (1) Skizze der Gaußschen Glockenkurve:

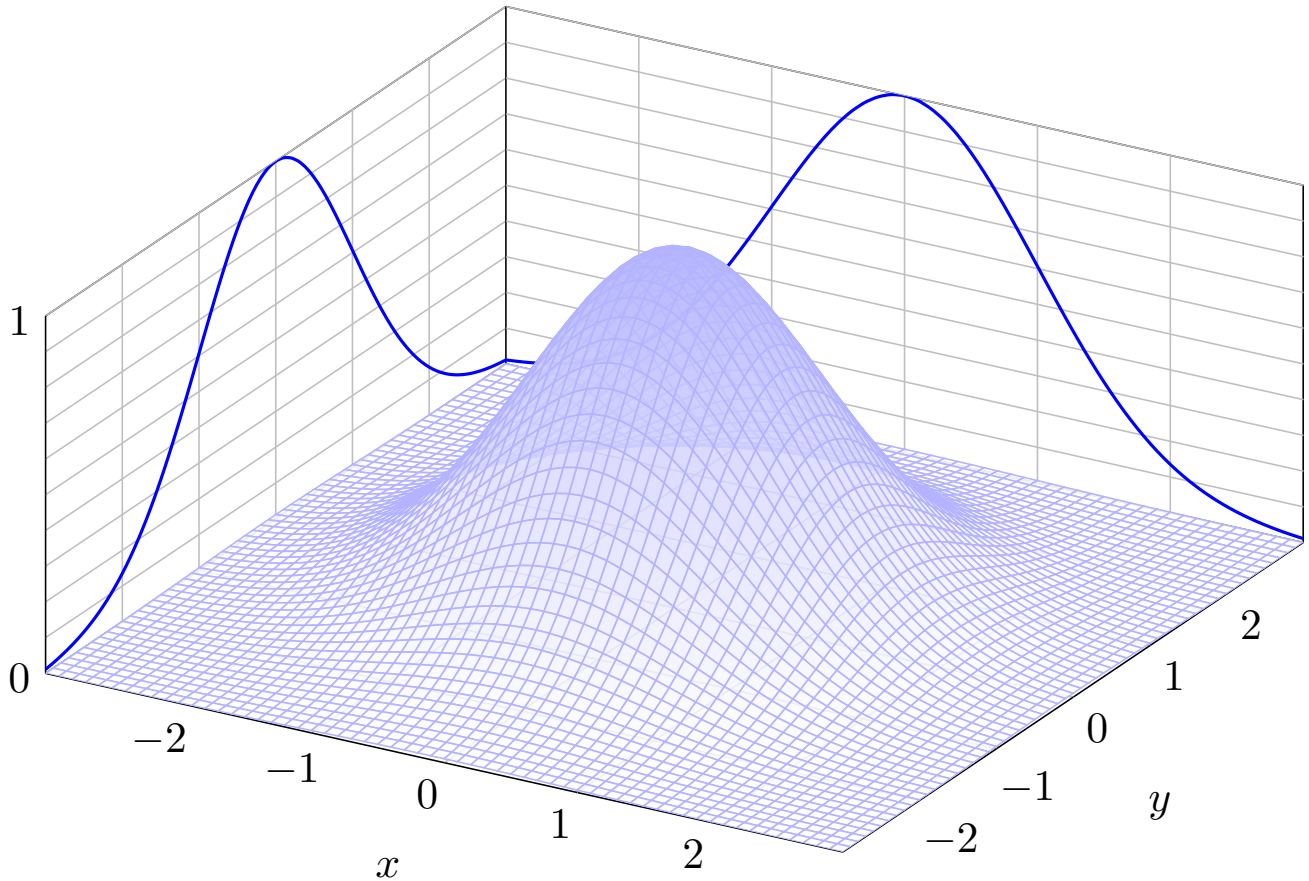


Ihre Streckungen und Verschiebungen heißen ebenfalls Glockenkurven. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim zentralen Grenzwertsatz W1D; er wird uns in Kapitel W beschäftigen.

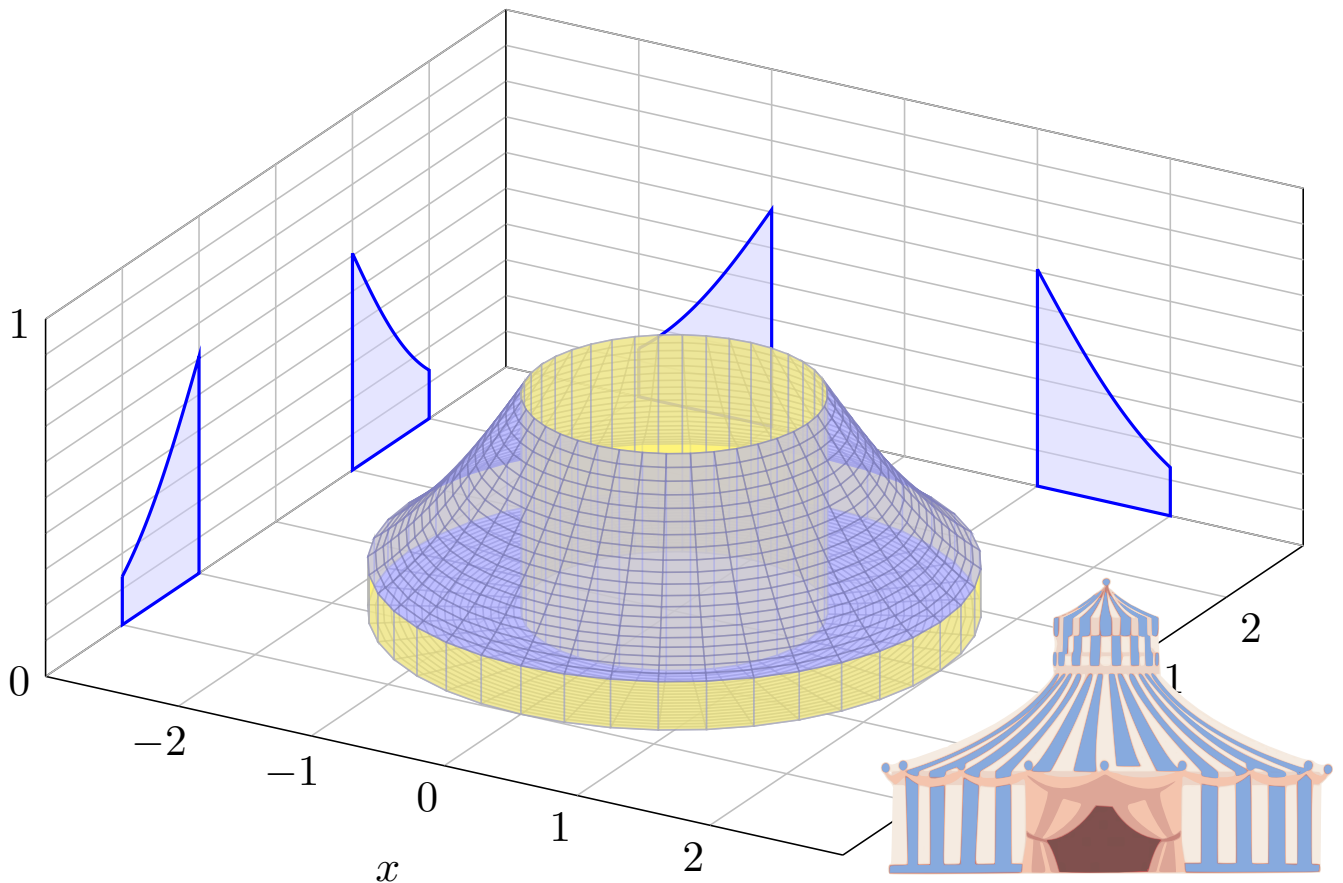
(2) Die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ erlaubt keine geschlossene Formel, ebensowenig die bestimmten Integrale $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Ich warne vorsorglich vor einem verbreiteten Missverständnis: Die Funktion f ist stetig und somit integrierbar (Satz B1C), daher *existieren* die bestimmten Integrale $\int_a^b f(t) dt$ und somit auch die Integralfunktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Allerdings kann diese nicht durch *elementare Funktionen* (also durch $\exp, \log, \sin, \cos, \dots$) in geschlossener Form dargestellt werden. [B145] Das ist nachweislich unmöglich. Es ist aussichtslos danach zu suchen!

Skizze der Gaußschen Glockenfläche $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$:



Diese Funktion g wollen wir über den Kreisring K integrieren:



(3) In Polarkoordinaten $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ gilt $d(x, y) = \rho d(\rho, \varphi)$. Die Integration gelingt dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
 & \int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2B}}}{=} \int_{[a,b] \times [0, 2\pi]} e^{-\rho^2/2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d(\rho, \varphi) \\
 & \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{\rho=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2} d\varphi d\rho \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \int_{\rho=a}^b 2\pi \rho e^{-\rho^2/2} d\rho \\
 & \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \left[-2\pi e^{-\rho^2/2} \right]_{\rho=a}^b = 2\pi \left(e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2} \right)
 \end{aligned}$$

(4) Für $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) = 2\pi$$

☹ Das eindim. Integral $\int_a^b e^{-x^2/2} dx$ können wir nicht direkt angreifen.

😊 Das zweidim. Integral $\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y)$ ist hingegen leicht dank des Faktors ρ . Vergessen Sie nie nie nie die Funktionaldeterminante!

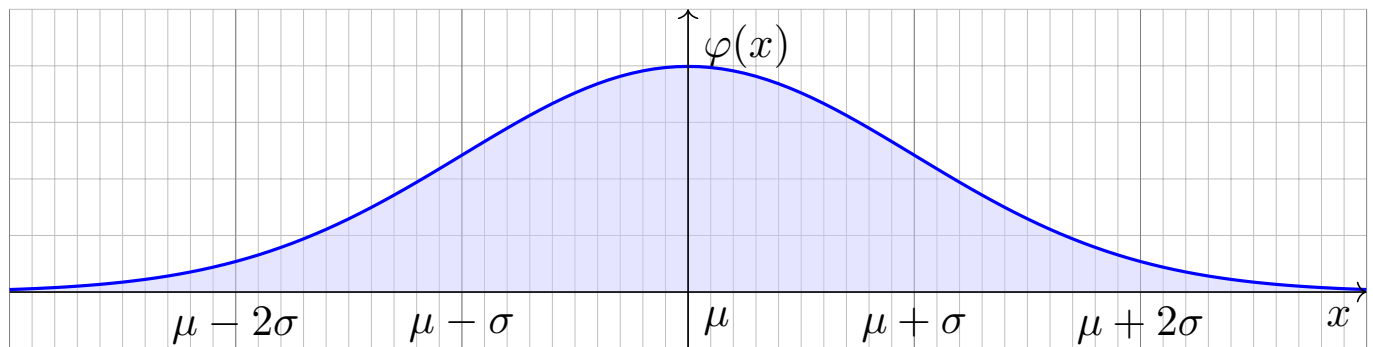
(5) Schließlich gelingt uns so auch das eindimensionale Integral:

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^2 \quad \text{Kunstgriff: Statt } I \text{ berechnen wir } I^2! \\
 & = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \stackrel{\substack{\text{Lin} \\ \text{A3L}}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) dx \\
 & \stackrel{\substack{\text{Lin} \\ \text{A3L}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} dy dx \stackrel{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} dy dx \\
 & \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \stackrel{(4)}{=} 2\pi
 \end{aligned}$$

Satz C2G: Gaußsches Integral

Es gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

😊 Dies ist ein eindimensionales Integral, aber allein mit eindim. Methoden schafft man es nicht. Erst durch die Berechnung als zweidimensionales Integral löst sich alles in Wohlgefallen auf!



Sei $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$. Die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt (Dichte der) **Normalverteilung** mit Mittelwert μ und Streuung σ .
Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle.

- 😊 Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$
- 😊 Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert = $\int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx = \mu$.
- 😊 Trägheitsmoment = Varianz = $\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = \sigma^2$

Die Gamma-Funktion an halbzahlichen Stellen

Wir kennen die Gamma-Funktion B313

$$\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}: z \mapsto \Gamma(z) = \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Wert $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{x=0}^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx$.

Lösung: Die Substitution $x = u^2$ und $dx = 2u du$ ergibt:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{u=0}^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} \cdot 2u du = 2 \int_{u=0}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

😊 Dank der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ aus Satz B3E folgt:

Satz C2H: Gamma-Funktion an halbzahlichen Stellen

Es gilt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$.

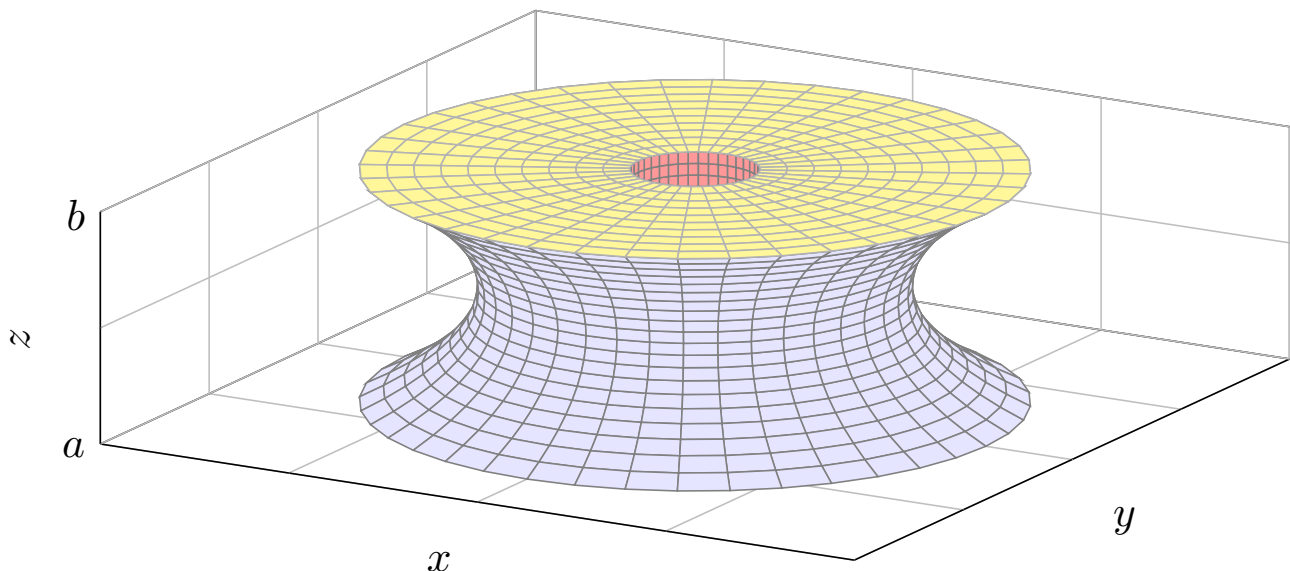


Griechische Amphore aus dem Louvre, Bildquelle: wikimedia.org



Stuttgarter Fernsehturm, Bildquelle: wikimedia.org

Zylinderkoordinaten eignen sich bei Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse, zum Beispiel zur Parametrisierung von Rotationskörpern.



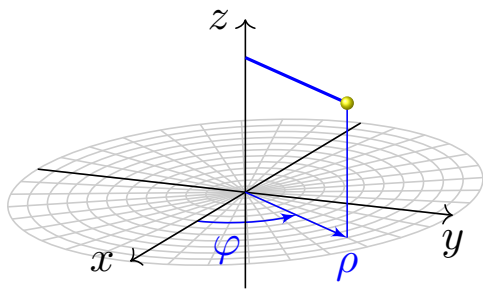
Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}$$

(1) in Zylinderkoordinaten und (2) mit Fubini (zum Vergleich).

(3) Was erhalten Sie für $-1 \leq z \leq 1$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$?

Lösung: Wir nutzen **Zylinderkoordinaten** um die z -Achse:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad D = \{ (\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

Die **Funktionaldeterminante** ist wie zuvor bei Polarkoordinaten:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho$$

Wir erhalten folgende Parametrisierung unseres Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} R &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \} \\ &= \{ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \mid a \leq z \leq b, r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \} \end{aligned}$$

Anschauung: Die drei Spalten von Φ' sind die Tangentialvektoren in Richtung ρ, φ, z . Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen $1, \rho, 1$.

Volumen eines Rotationskörpers

(1) Volumenberechnung in Zylinderkoordinaten, $d(x, y, z) = \rho d(z, \rho, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(R) &= \int_R 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D \rho d(z, \rho, \varphi) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} 2\pi \rho d\rho dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \int_{z=a}^b \left[\pi \rho^2 \right]_{r_0(z)}^{r_1(z)} dz = \int_{z=a}^b \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 dz \end{aligned}$$

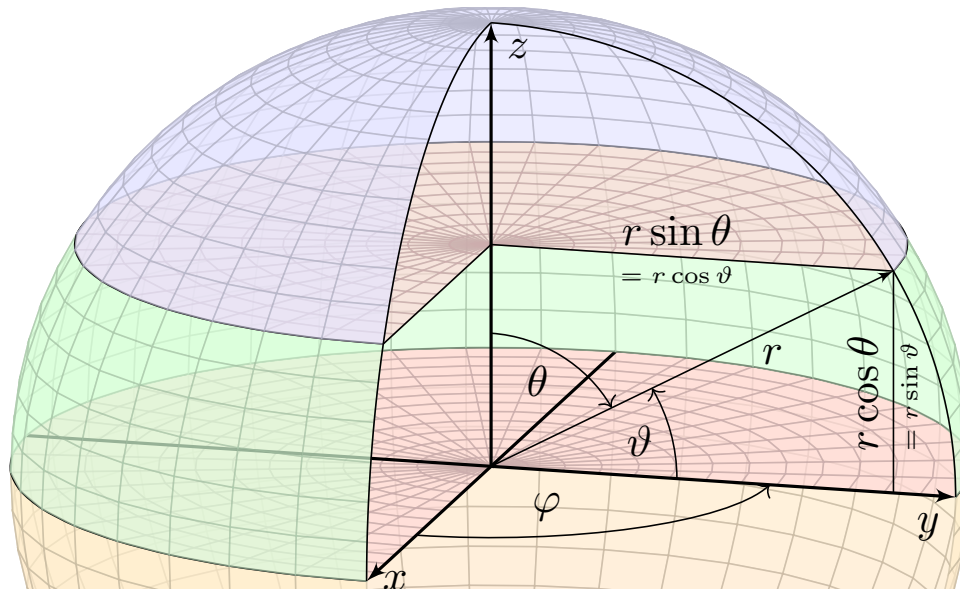
(2) Mit Fubini und Kreisringen erhalten wir dasselbe Ergebnis:

$$\text{vol}_3(R) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_R(x, y, z) d(x, y) dz \stackrel{\text{Kreis}}{\stackrel{\text{C205}}{=}} \int_{z=a}^b \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 dz$$

(3) Für $r_0, r_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(R) &\stackrel{(1)}{=} \int_{z=-1}^1 \pi \cosh(z)^2 dz \stackrel{\text{Hyp}}{=} \pi \int_{z=-1}^1 \frac{1}{2} \cosh(2z) + \frac{1}{2} dz \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \sinh(2z) + \frac{z}{2} \right]_{z=-1}^1 = \pi \left(\frac{1}{2} \sinh(2) + 1 \right) \approx 8.84 \end{aligned}$$

(Additionstheoreme für \cosh und \sinh oder einfach ausmultiplizieren.)

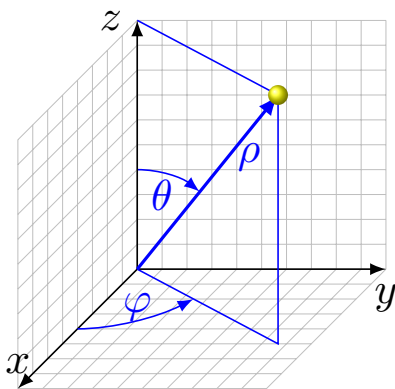


Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen der **Kugel** vom Radius r :

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

(1) in Kugelkoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Poldistanzwinkel θ läuft vom Nordpol $\theta = 0$ zum Südpol $\theta = \pi$, die geographische Breite $\vartheta = \pi/2 - \theta$ hingegen vom Äquator $\vartheta = 0$ zu den Polen $\vartheta = \pm\pi/2$. Der Azimutwinkel φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt; als Standardbereich wählen wir $[0, 2\pi[$, alternativ $]-\pi, \pi]$.



Wir parametrisieren durch **Kugelkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Phi : D \rightarrow K \quad \text{mit} \quad D = \{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

Wir berechnen die **Jacobi-Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \det \Phi' = \rho^2 \sin \theta \quad (\text{Übung!})$$

😊 Hier ist (ρ, θ, φ) ein rechtshändiges Koordinatensystem, $\det \Phi' \geq 0$. Hingegen wäre (ρ, φ, θ) linkshändig. Unser Integral ist nicht orientiert, also rechnen wir mit dem Absolutbetrag $|\det \Phi'|$. Anschauung: Die drei Spalten sind die Tangentialvektoren in Richtung ρ, θ, φ . Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen $1, \rho, \rho \sin \theta$.

Lösung: (1) Das Volumen berechnen wir in **Kugelkoordinaten**:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(K) &= \int_K 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D \underbrace{\rho^2 \sin \theta}_{\text{Fu'det}} \, d(\rho, \theta, \varphi) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r 2\pi \left[-\rho^2 \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi} d\rho = \int_{\rho=0}^r 4\pi \rho^2 \, d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[\frac{4\pi}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^r = \frac{4\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

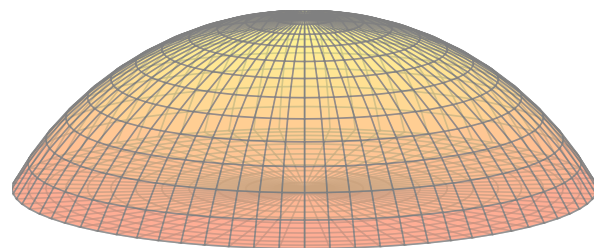
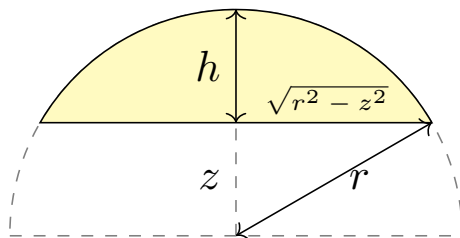
😊 Der Term r^3 ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu r . Die Konstante $\frac{4}{3}\pi$ hingegen kann man nicht raten, sondern nur durch Integration berechnen.

(2) Zum Vergleich die Rechnung als **Rotationskörper**:

$$\text{vol}_3(K) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=-r}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-r}^r = \frac{4\pi}{3} r^3$$

😊 Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Sie haben hier freie Wahl! Die Kugel ist ein Rotationskörper, also bieten sich neben Kugel- auch Zylinderkoordinaten an. Je nach Problemstellung ist es eine Kunst, besonders gut angepasste Koordinaten zu wählen. Hier hilft nur Erfahrung; die erwerben Sie, wie immer im Leben, nur durch eigene Übung.

Kugelsegment



Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des **Kugelsegments**

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, r - h \leq z \leq r \right\}.$$

Lösung: Wir nutzen Zylinderkoordinaten und $d(x, y, z) = \rho \, d(z, \rho, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(K) &= \int_K 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{Fub}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, d\varphi \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{z=r-h}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=r-h}^r = \dots = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

Ist das plausibel? Wir machen die Probe für Halb- bzw. Vollkugel:

$$h = r \implies \text{vol}_3(K) = \frac{2\pi}{3} r^3, \quad h = 2r \implies \text{vol}_3(K) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

😊 Vergessen Sie nie... nie... nie... die Funktionaldeterminante!

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ können wir zerlegen in ihren

Realteil $\operatorname{Re} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$, und

Imaginärteil $\operatorname{Im} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$.

Hieraus lässt sich f zusammensetzen gemäß $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

Es gilt $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$ und $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

Wir nennen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ **messbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.

Wir nennen f **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind.

Äquivalent hierzu: die Funktion f ist messbar und $\int_{\Omega} |f| < \infty$.

In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} \operatorname{Re} f + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f.$$

😊 Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen.

😊 Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

Der Hauptsatz (HDI) für komplexe Integrale

😊 Wir formulieren allgemeine Rechenregeln gleich reell und komplex.

Der HDI gilt wörtlich für komplexe genauso wie für reelle Funktionen:

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\int_{t=a}^b e^{i\omega t} dt = \left[\frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \right]_{t=a}^b$$

😊 Alles gilt ebenso für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, wobei komponentenweise integriert und differenziert wird.

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen, zum Beispiel Quader. Der Satz von Fubini C1E führt die Integration über $X \times Y$ zurück auf die (iterierte aber jeweils einfache) Integration über X und über Y . Das hilft.

(1) Absolute Integration: Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(x, y) = \int_X \int_Y |f(x, y)| dy dx = \int_Y \int_X |f(x, y)| dx dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! Andernfalls ist das linke Integral nicht definiert und die rechten beiden evtl. verschieden.

Für einfache, aber drastische Gegenbeispiele siehe [C117](#), [C409](#), [C413](#).

Diese Vorsichtsmaßnahme ist also nötig, die müssen Sie beherrschen.

😊 Absolute Integrierbarkeit und somit Vertauschbarkeit gilt, wenn X, Y und f beschränkt sind, also insbesondere für X, Y kompakt und f stetig.

Integration über Normalbereiche

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:

Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) dx = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

😊 Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen. Sie haben hier also die Wahl der Integrationsreihenfolge.

⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Geometrische Hilfe: Das gelingt einfach und sicher anhand einer Skizze.

⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe [C133](#).

Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution: Wir wählen neue Variablen als geschickte Koordinaten.

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig diff'bar.

(1) Ist $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \rightarrow \mathbb{C}$, und es gilt

$$\int_Y |f(y)| dy = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! C413

Die Ableitung $\Phi' : X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die **Jacobi-Matrix**, $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$.

Die Funktion $\det \Phi' : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.

Ihr Betrag $|\det \Phi'|$ misst die durch Φ bewirkte **Volumenverzerrung**.

😊 Für eindimensionale Integrale entspricht dies der Substitutionsregel.

Allerdings nehmen wir hier den Betrag und vergessen die Orientierung.

Allgemeiner formuliert Satz C2C die orientierte Version mit Vorzeichen.

Polarkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.

Polarkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien $0 \leq r_0 < r_1 < \infty$ betrachten wir den Kreisring

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi : [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho$$

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Zylinderkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zu Radien $r_0, r_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $a \leq z \leq b$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sowie $r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z)$.

Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor $\det \Phi' = \rho$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{Fub}}}{=} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho dz$$

Kugelkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Kugelkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zum Radius $r > 0$ betrachten wir die Kugelschale

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $r_0 \leq \rho \leq r_1$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ sowie $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Die Funktionaldeterminante ist hier $\det \Phi' = \rho^2 \sin \theta$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{Fub}}}{=} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \underbrace{\rho^2 \sin \theta}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\theta d\rho$$

Was besagt der Hauptsatz (HDI)? Unter welchen Voraussetzungen?
 Was besagt der Satz von Fubini? Unter welchen Voraussetzungen?
 Nennen Sie (mindestens) ein Beispiel, wo Vertauschung nicht gilt.
 Was besagt der Transformationssatz? Welche Voraussetzungen?
 Was ist und wozu dient hier die Funktionaldeterminante?

Formulieren Sie Polarkoordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten.
 Berechnen Sie ausführlich jeweils die Funktionaldeterminante.
 Ist die Orientierung positiv? Welche Varianten sind nützlich:
 verschiedene Achsen? verschiedene Winkelkonventionen?

Wir nutzen $(x, y, z) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) =: \Phi(\rho, \theta, \varphi)$.
 Welche Parameterbereiche D_i passen zur Kugel K vom Radius r ?

$$D_1 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], \quad D_2 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, \pi],$$

$$D_3 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi], \quad D_4 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Ist damit $\Phi_i : D_i \rightarrow K$ surjektiv? injektiv? bis auf eine Nullmenge?

Was sind Normalbereiche? Wie können Sie hierüber integrieren?
 Kann eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ auch zweifach ein Normalbereich sein,
 also zugleich in x - und in y -Richtung? Kennen Sie Beispiele?

Warum ist folgende beliebte Vertauschung vollkommen unsinnig?

$$\int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \, dx \stackrel{?}{=} \int_{y=g(x)}^{h(x)} \int_{x=a}^b f(x, y) \, dx \, dy$$

Liefere die folgenden Integrale für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dasselbe Ergebnis?

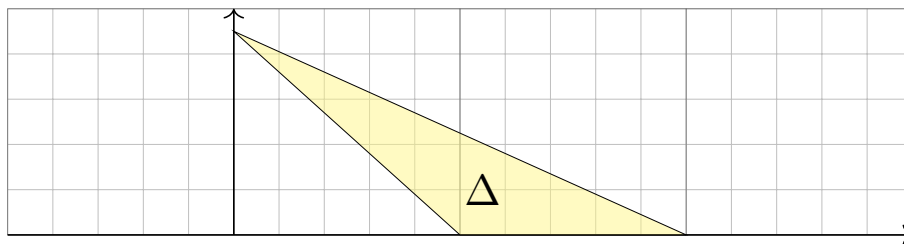
$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) \, d(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) \, d(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y f(x, y) \, dx \, dy$$

Wenn alle drei Integrale dasselbe ergeben, warum müssen Sie dennoch
 manchmal verschiedene Integrationsreihenfolgen ausprobieren? C133

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das (ausgefüllte) Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, wobei $0 < a < b$ und $0 < c$.
- (2) Ist Δ ein Normalbereich in x -Richtung? in y -Richtung? Wie?
- (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks als Doppelintegral. Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe Ihrer Geometriekenntnisse.
- (4) Die Massendichte $\rho: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\rho(x, y) = xy$. Berechnen Sie die Gesamtmasse $M = \int_{\Delta} \rho(x, y) d(x, y)$ des Dreiecks.

Lösung: (1) Ein solches Dreieck Δ sieht etwa so aus:



- (2) Dies ist ein Normalbereich in x -Richtung mit den Randfunktionen $g, h: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = a - ya/c$ und $h(y) = b - yb/c$, und ebenso ein Normalbereich in y -Richtung mit den Randfunktionen $g, h: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \max(0, c - xc/a)$ und $h(x) = c - xc/b$.

- (3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(\Delta) &= \int_{y=0}^c \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} 1 \, dx \, dy = \int_{y=0}^c (b-a) - \frac{b-a}{c}y \, dy \\ &= \left[(b-a)y - \frac{b-a}{2c}y^2 \right]_{y=0}^c = \frac{(b-a)c}{2} \end{aligned}$$

😊 Das ist die bekannte Formel „Grundseite mal Höhe durch zwei“.

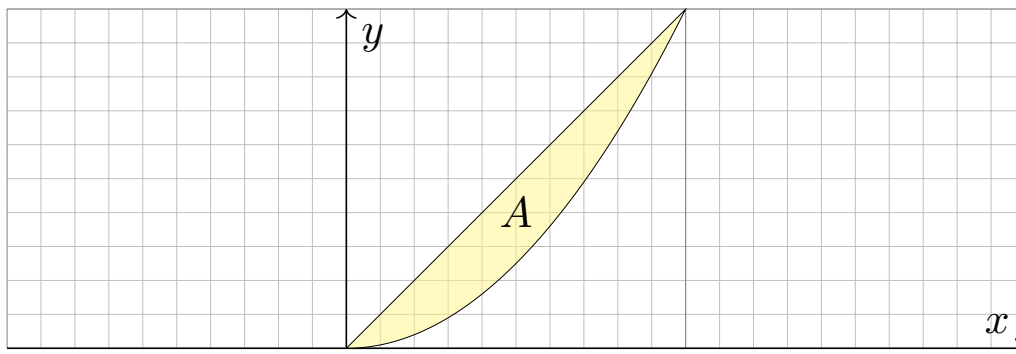
- (4) Die Gesamtmasse berechnen wir durch Integration der Dichte ρ :

$$\begin{aligned} M &= \int_{y=0}^c \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} xy \, dx \, dy = \int_{y=0}^c \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} dy \\ &= \int_{y=0}^c \frac{b^2 - a^2}{2c^2} y^3 + \frac{a^2 - b^2}{c} y^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} y \, dy \\ &= \left[\frac{b^2 - a^2}{8c^2} y^4 + \frac{a^2 - b^2}{3c} y^3 + \frac{b^2 - a^2}{4} y \right]_{y=0}^c = \frac{(b^2 - a^2)c^2}{24} \end{aligned}$$

😊 Ein Hoch auf Fubini! Anschließend genügen Geduld und Sorgfalt.

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das endliche Flächenstück $A \subseteq \mathbb{R}^2$, das von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$ berandet wird.
- (2) Ist A ein Normalbereich in x -Richtung? in y -Richtung? Wie?
- (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\text{vol}_2(A)$ auf beide Weisen.
- (4) Berechnen Sie den Schwerpunkt bei homogener Masseverteilung.

Lösung: (1) Unser Flächenstück A sieht so aus:



- (2) Dies ist ein Normalbereich in y -Richtung mit den Randfunktionen $g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ und $h(x) = x$, und ebenso in x -Richtung mit den Randfunktionen $g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(y) = y$ und $h(y) = \sqrt{y}$.

- (3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\text{vol}_2(A) = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x 1 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 x - x^2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{6}$$

Anders herum geht es auch, unter Beachtung der neuen Grenzen:

$$\text{vol}_2(A) = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} 1 \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 \sqrt{y} - y \, dy = \left[\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6}$$

- (4) Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(A) = (S_x, S_y)$ von A sind:

$$\begin{aligned} S_x &= 6 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x x \, dy \, dx = 6 \int_{x=0}^1 \left[xy \right]_{y=x^2}^x \, dx \\ &= 6 \int_{x=0}^1 x^2 - x^3 \, dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2} \\ S_y &= 6 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x y \, dy \, dx = 6 \int_{x=0}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^x \, dx \\ &= 6 \int_{x=0}^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \, dx = 6 \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

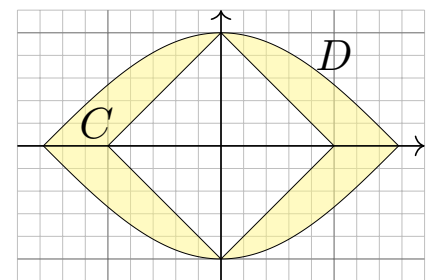
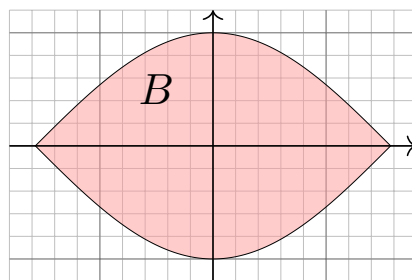
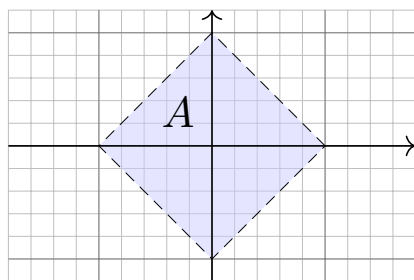
Aufgabe: (1) Skizzieren Sie $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \}$ und $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi/2, |y| \leq \cos(x) \}$ sowie $C = B \setminus A$.

(2) Unterteilen Sie C in vier kongruente Binormalbereiche.

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt von C auf beide Weisen.

(4) Gegenprobe: Können Sie den Flächeninhalt auch direkt sehen?

Lösung: (1) Unsere Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$ sehen so aus:



(2) In jedem Quadranten erhalten wir einen Binormalbereich, etwa

$$\begin{aligned} D &= C \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2, \max(0, 1-x) \leq y \leq \cos(x) \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \arccos(y) \} \end{aligned}$$

(3) Aus Symmetriegründen gilt $\text{vol}_2(C) = 4 \text{vol}_2(D)$.

Den Flächeninhalt von D berechnen wir mit Fubini:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(D) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=1-x}^{\cos(x)} 1 \, dy \, dx + \int_{x=1}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\cos(x)} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \cos(x) + x - 1 \, dx + \int_{x=1}^{\pi/2} \cos(x) \, dx \\ &= \left[\sin(x) + \frac{x^2}{2} - x \right]_{x=0}^1 + \left[\sin(x) \right]_{x=1}^{\pi/2} = 1/2 \end{aligned}$$

Alternative: Wir integrieren zuerst über x und dann über y .

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(D) &= \int_{y=0}^1 \int_{x=1-y}^{\arccos(y)} 1 \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 \arccos(y) + y - 1 \, dy \\ &= \left[y \arccos(y) - \sqrt{1-y^2} + \frac{y^2}{2} - y \right]_{y=0}^1 = 1/2 \end{aligned}$$

(4) Das Quadrat A mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ hat Flächeninhalt $\text{vol}_2(A) = 2$.

Der Flächeninhalt unter $\cos(x)$ über $[-\pi/2, \pi/2]$ ist 2, also $\text{vol}_2(B) = 4$.

Wegen $C = B \setminus A$ und $A \subseteq B$ gilt $\text{vol}_2(B \setminus A) = \text{vol}_2(B) - \text{vol}_2(A) = 2$.

Aufgabe: Gegeben sei ein (kompakter) Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und seine (stetige) Massendichte $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$. Wie berechnen Sie daraus die Gesamtmasse, den Schwerpunkt und die Trägheitsmomente?

Lösung: (1) Berechnung der **Masse** m des Körpers K mit Dichte ϱ :

$$m = m(K, \varrho) = \int_K \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

(2) **Schwerpunkt** $s = (s_1, s_2, s_3)$ des Körpers K mit Dichte ϱ :

$$s_i = s_i(K, \varrho) = \frac{1}{m} \int_K x_i \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

(3) **Trägheitsmoment** I_3 des Körpers K bzgl. der x_3 -Achse:

$$I_3 = I_3(K, \varrho) = \int_K (x_1^2 + x_2^2) \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

😊 Ähnliche Rechnungen nutzen wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie für Erwartung und Varianz einer stetigen WVerteilung ϱ (s. Kapitel V).

Trägheitsmoment eines Zylinders

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(K)$ des Zylinders

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h \}$$

bezüglich der z -Achse. Die Massendichte ϱ auf K sei konstant.

Lösung: In Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ gilt $d(x, y, z) = \rho d(\rho, \varphi, z)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned} I_z(K) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_K (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) d(x, y, z) \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{Fub}}{=}} \varrho \cdot \int_{z=0}^h \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{Lin}}{=}} \varrho \cdot 2\pi h \int_{\rho=0}^r \rho^3 d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BlI}}{=}} \varrho \cdot 2\pi h \cdot \frac{r^4}{4} \\ &= \varrho \cdot \underbrace{\pi r^2 h}_{= \text{vol}_3(K)} \cdot \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned}$$

Das traditionelle Formelzeichen für die Dichte ist ϱ . Als Integrationsvariable nutzen wir gerne ρ . Ungeschickt? Ich wollte keines von beiden ändern, also unterscheide ich sie in der Schreibweise.

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(K)$ der Kugel

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

(1) in Kugelkoordinaten und zum Vergleich (2) in Zylinderkoordinaten. Die Massendichte ϱ auf K sei konstant (wie zuvor, zur Vereinfachung).

Lösung: (1) Für $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$ gilt $d(x, y, z) = \rho^2 \sin(\theta) d(\rho, \theta, \varphi)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned} I_z(K) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_K (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) d(x, y, z) \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{Fub}}{=}} \varrho \cdot \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin(\theta)^2 \cdot \underbrace{\rho^2 \sin(\theta)}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\theta d\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{Lin}}{=}} \varrho \cdot 2\pi \int_{\rho=0}^r \rho^4 d\rho \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta)^3 d\theta \stackrel{\text{part}}{\stackrel{\text{B130}}{=}} \varrho \cdot 2\pi \cdot \frac{r^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \varrho \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{= \text{vol}_3(K)} \cdot \frac{2}{5} r^2 = \frac{2}{5} m r^2 \end{aligned}$$

(2) Alternative Berechnung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} I_z(K) &= \int_K (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \varrho \cdot \int_{z=-r}^r \int_{D(z)} (x^2 + y^2) d(x, y) dz \end{aligned}$$

mit der Kreisscheibe $D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \}$; das innere Integral erkennen wir geometrisch oder aus der vorigen Aufgabe!

$$\begin{aligned} I_z(K) &= \varrho \cdot \int_{z=-r}^r \frac{\pi}{2} (r^2 - z^2)^2 dz = \varrho \cdot \frac{\pi}{2} \int_{z=-r}^r r^4 - 2r^2 z^2 + z^4 dz \\ &= \varrho \cdot \frac{\pi}{2} \left[r^4 z - \frac{2}{3} r^2 z^3 + \frac{1}{5} r^5 \right]_{z=-r}^r = \varrho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{16}{15} r^5 = \dots = \frac{2}{5} m r^2 \end{aligned}$$

😊 Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Jede:r hat die Wahl, sich die bequemste Rechnung auszusuchen.

😊 Einfache Körper wie Zylinder, Kugel, etc. kommen häufig vor, ihre Trägheitsmomente finden Sie daher in jeder guten Formelsammlung.

📺 Steve Mould: *The Turntable Paradox*, youtu.be/3oM7hX3UUEU.

In kartesischen Koordinaten berechnet sich der **Schwerpunkt** durch

$$s = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \int_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \varrho(x, y, z) d(x, y, z).$$

Wie oben erklärt wird hierzu in jeder der drei Komponenten integriert, gewichtet durch die Massendichte $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$, normiert auf Masse 1.

Meist legt man den Schwerpunkt in den Ursprung; dies gelingt durch die Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z})$.

Der **Trägheitstensor** Θ der Körpers K ist dann gegeben durch:

$$\Theta = \int_K \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \varrho(x, y, z) d(x, y, z)$$

Auf der Diagonalen stehen die Trägheitsmomente bezüglich der drei Achsen (x, y, z) . Diese nennt man auch die **Hauptträgheitsmomente**. Außerhalb der Diagonalen stehen die **Deviationsmomente**.

Hauptachsentransformation

😊 Der Trägheitstensor $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist eine **reelle symmetrische Matrix**.

In der linearen Algebra (§5.4, Satz 5.4.2) haben Sie gelernt, dass und wie sich jede symmetrische Matrix diagonalisieren lässt: Sie können Θ in einer geeigneten Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ als Diagonalmatrix darstellen. Die Basiswechsellmatrix $B \in GL_3 \mathbb{R}$ hat die Spalten b_1, b_2, b_3 .

In physikalischen Anwendungen verlangen wir in der Regel längen- und winkeltreue Transformationen. Hierzu muss B eine orthogonale Matrix sein, am besten mit positiver Determinante, also eine Drehung des \mathbb{R}^3 .

In der linearen Algebra haben Sie genau diesen Sachverhalt bewiesen! Wir können zu Θ eine positive Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ aus Eigenvektoren von Θ berechnen. Für die Basiswechsellmatrix bedeutet das $B \in SO_3 \mathbb{R}$, also $B^\top B = 1$ und $\det B = 1$. Kurzum:

$$\exists B \in SO_3 \mathbb{R} : B^\top \cdot \Theta \cdot B = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

😊 Diese Vereinfachung nennt man **Hauptachsentransformation**. Anschaulich können wir also jeden (!) Körper K so geschickt drehen, dass sein Trägheitstensor besonders einfach wird, nämlich diagonal.

Aufgabe: (1) Was ist der Schwerpunkt des achsenparallelen Quaders

$$Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]?$$

Welchen Körper erhalten Sie nach Zentrierung?

(2) Berechnen Sie den Trägheitstensor des zentrierten Quaders

$$K = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2] \times [-c/2, c/2].$$

Was sind in diesem Falle die Hauptträgheitsachsen?

Lösung: (1) Der Schwerpunkt ist $S(Q) = (a/2, b/2, c/2)$.

Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten ergibt K .

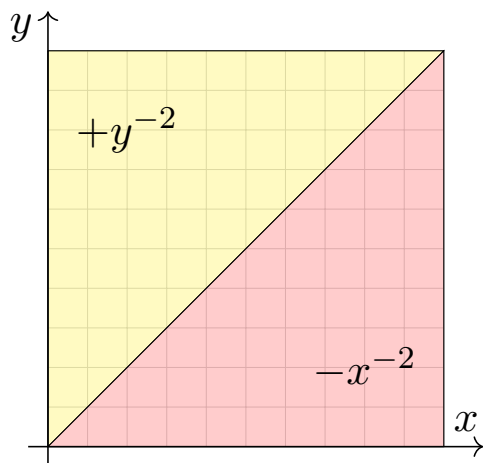
(2) Der Trägheitstensor des zentrierten Quaders K ist

$$\Theta = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

😊 In diesem Falle sind die kartesischen Koordinatenachsen bereits die Hauptträgheitsachsen unseres Körpers K . Nach einer Drehung ist der Quader im Allgemeinen nicht mehr achsenparallel; die Matrix wäre wesentlich komplizierter: sowohl die Rechnung als auch das Ergebnis!

😊 Die Hauptträgheitsachsen eines Körpers sind mathematisch hilfreich und auch physikalisch relevant: Sie sind fix bei freier Kreiselbewegung, zudem stabil für das maximale und das minimale Trägheitsmoment, aber instabil für das mittlere: Kleine Störungen führen zum Torkeln! Probieren Sie es selbst aus: Das ist der berühmt-berüchtigte Tennisschlägereffekt, siehe Satz P2E und en.wikipedia.org/wiki/Tennis_racket_theorem.

😊 Die Erde vollführt eine komplizierte Kreiselbewegung. Ihre Rotation äußert sich direkt in der Coriolis-Kraft (Foucaultsches Pendel, Zyklone). Die leichte Abplattung der Erde und die Anziehung der Sonne bewirken ein Drehmoment und somit eine Präzession der Erdachse (Periode von 26000 Jahren). Der Mond verursacht ebenso eine Nutation (19 Jahre). Diese Effekte beeinflussen das Klima und somit das Leben auf der Erde.



Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} +y^{-2} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Random fun fact (von Sheldon Cooper): Die rot-gelbe Flagge steht im internationalen Flaggenalphabet für den Buchstaben O wie „Oscar“ und für „Person über Bord!“.

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) \, dy \, dx$$

(2) Widerspricht das Fubini? Ist f absolut integrierbar? Man berechne

$$\int_{[0,1]^2} |f(x, y)| \, d(x, y).$$

Wiederholen Sie sorgsam den Satz von Fubini C1B für nicht-negative Funktionen und allgemein C1E für absolut integrierbare Funktionen!

Lösung: (1a) Zu jedem $y \in]0, 1[$ berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{x=0}^1 f(x, y) \, dx = \int_{x=0}^y y^{-2} \, dx + \int_{x=y}^1 -x^{-2} \, dx = +y^{-1} + \left[x^{-1} \right]_{x=y}^1 = +1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 (+1) \, dy = +1.$$

(1b) Ebenso zu jedem $x \in]0, 1[$ berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{y=0}^1 f(x, y) \, dy = \int_{y=0}^x -x^{-2} \, dy + \int_{y=x}^1 y^{-2} \, dy = -x^{-1} + \left[-y^{-1} \right]_{y=x}^1 = -1$$

Für das zweite Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 (-1) \, dx = -1.$$

⚠ Skandalös: Die Integrationsreihenfolge ändert hier das Ergebnis! Das darf nicht sein, das Ergebnis einer Rechnung muss eindeutig sein, das heißt objektiv, unabhängig vom individuell gewählten Rechenweg.

(2) Dank Fubini C1B für nicht-negative Funktionen wissen wir:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} |f(x, y)| \, d(x, y) &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 |f(x, y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 |f(x, y)| \, dy \, dx = +\infty.\end{aligned}$$

Zu jedem festen $y \in]0, 1[$ berechnen wir zunächst das innere Integral:

$$\int_{x=0}^1 |f(x, y)| \, dx = \int_{x=0}^y y^{-2} \, dx + \int_{x=y}^1 x^{-2} \, dx = 2y^{-1} - 1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 |f(x, y)| \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 2y^{-1} - 1 \, dy = +\infty.$$

⚠ Die Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist demnach nicht absolut integrierbar!

Das erklärt, warum wir den Satz von Fubini nicht auf f anwenden können: Die Voraussetzung $\int |f(x, y)| \, d(x, y) < \infty$ ist nicht erfüllt!

Aufgabe: Sei $Q = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat, zerlegt in die Dreiecke

$$D = \{x \geq y\} = [(0, 0), (1, 0), (1, 1)],$$

$$E = \{x \leq y\} = [(0, 0), (1, 1), (0, 1)].$$

Für $x, y \in [0, 1]$ wollen wir $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ definieren.

(0) Wo gilt $f \geq 0$? Wo gilt $f \leq 0$? Wo ist f nicht definiert?

(1) Kann f im Punkt $(0, 0)$ stetig fortgesetzt werden?

(2) Berechnen, vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale

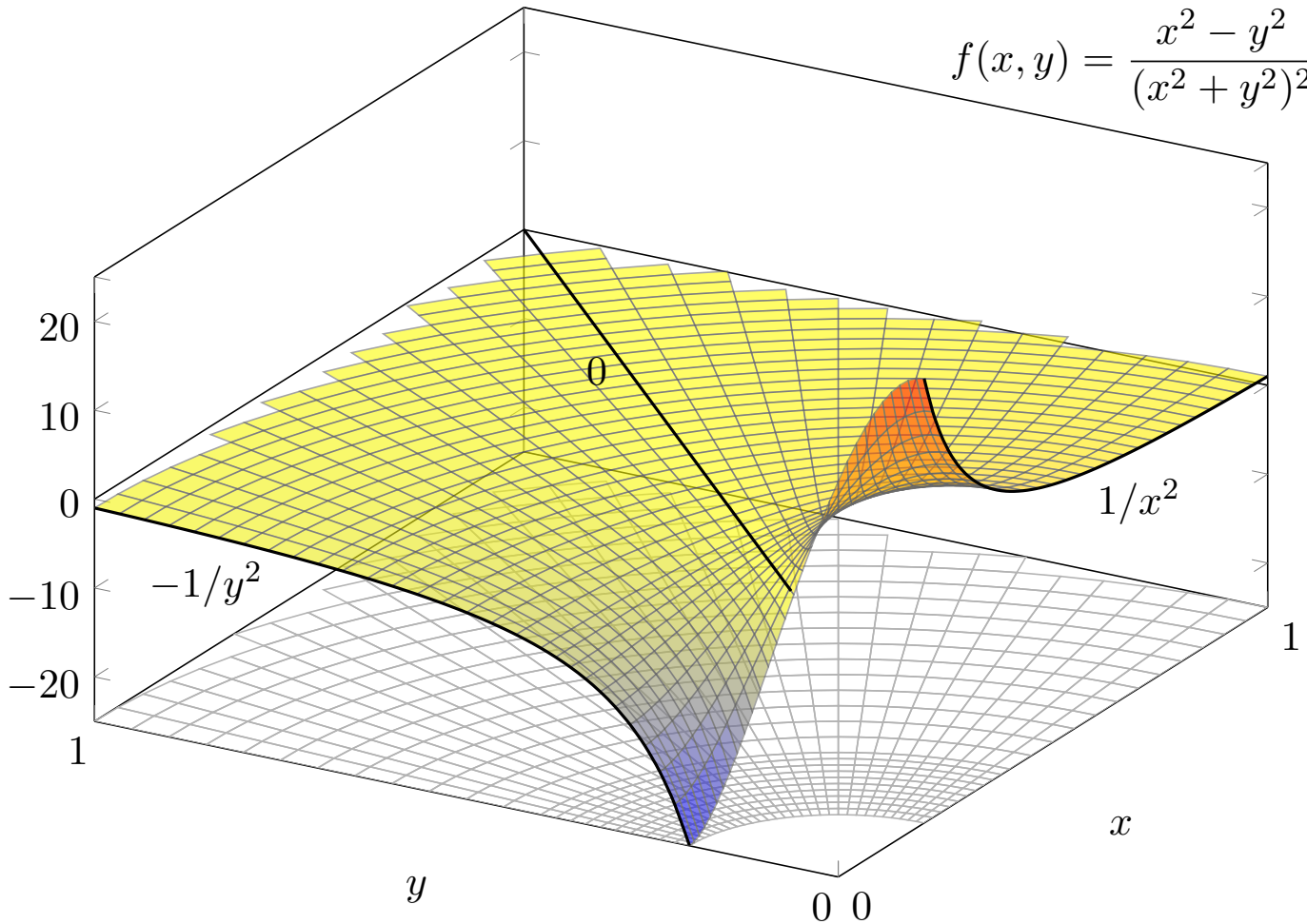
$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) \, dy \, dx \quad \text{und} \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

(3) Welche der folgenden Integrale sind definiert? Welche sind endlich?

$$\int_D f(x, y) \, d(x, y), \quad \int_Q |f(x, y)| \, d(x, y), \quad \int_Q f(x, y) \, d(x, y)$$

(4) Ist f auf Q absolut integrierbar? Ist Fubini anwendbar?

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



Die vorige Rechnung ist leicht, aber die Funktion f etwas künstlich: Sie ist stückweise definiert und zudem unstetig auf der Diagonalen.

Ist dies möglich für eine *rationale* Funktion $f(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$, also einen Quotienten von Polynomen P und Q ? Erstaunlicherweise ja!

⚠ Schon eine einzige Polstelle kann uns in Schwierigkeiten bringen:

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \stackrel{?}{=} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

Als Integrand betrachten wir hier die rationale Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad f(0, 0) := 0.$$

(2) Integrieren Sie $f(x, y)$ über den Viertelkreis in Polarkoordinaten. Lässt sich hier die Transformationsformel anwenden? Warum / nicht?

(3) Ist f über $[0, 1]^2$ absolut integrierbar? über $[0, 1]^2 \setminus [0, \varepsilon]^2$ für $\varepsilon > 0$?

Lösung: (1a) Zunächst berechnen wir das erste Integral:

$$\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \stackrel{\substack{\text{PBZ} \\ \text{Probe!}}}{=} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{4}$$

(1b) Im zweiten Integral tauschen die Variablen x und y die Rollen:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = -\frac{\pi}{4}.$$

⚠ Die beiden Integrale vertauschen in diesem Falle also nicht!
Und das bei denkbar einfachem Integranden: eine rationale Funktion!

😊 Der Integrand hat eine interessante geometrische Interpretation, wie die obige Rechnung bereits andeutet: Für $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ gilt

$$f(x, y) = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Daher können wir hier glücklicherweise alles explizit nachrechnen.

(2) In Polarkoordinaten $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ erhalten wir

$$g(\rho, \varphi) := f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \cos(2\varphi)/\rho^2.$$

Additionstheoreme! Die Skizze zeigt f . Die nächste Katastrophe:

$$\int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\cos(2\varphi)}{\rho^2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho = 0$$

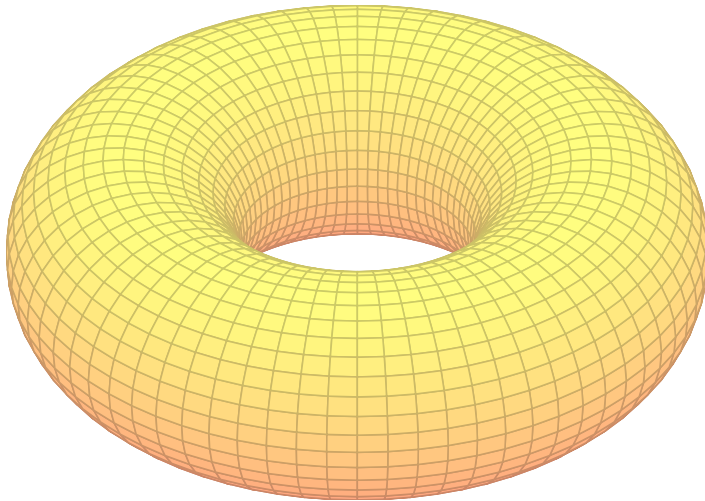
⚠ Auch die Transformationsformel lässt sich hier nicht anwenden!
Wir verlangen absolute Integrierbarkeit. Sonst ist Vorsicht geboten!

(3) Wäre $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar, so müssten nach Satz C1E von Fubini beide Integrationsreihenfolgen denselben Wert ergeben. Das ist hier nicht der Fall, also ist f nicht absolut integrierbar.

$$\int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{|\cos(2\varphi)|}{\rho} d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^r \frac{1}{\rho} d\rho = \infty$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist überall stetig bis auf den Punkt $(0, 0)$.

Sie ist über jedem Kompaktum $K \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ absolut integrierbar, insbesondere über $[0, 1]^2 \setminus [0, \varepsilon]^2$ mit $\varepsilon > 0$. Das Problem sitzt um $(0, 0)$!



Aufgabe: Bestimmen Sie für $0 < r < R$ das Volumen des Volltorus

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

(1) in Toruskoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Volltorus V besteht aus dem Kreis $K_R = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \}$ sowie allen Punkten mit Abstand $\leq r$ zu K_R . Die obige Abbildung skizziert dies für $R = 2$ und $r = 1$.

Lösung: (1) Wir nutzen die angegebene Parametrisierung Φ :

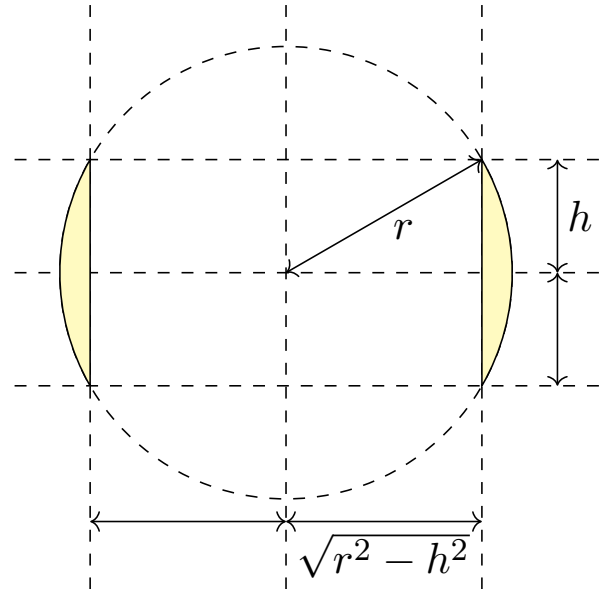
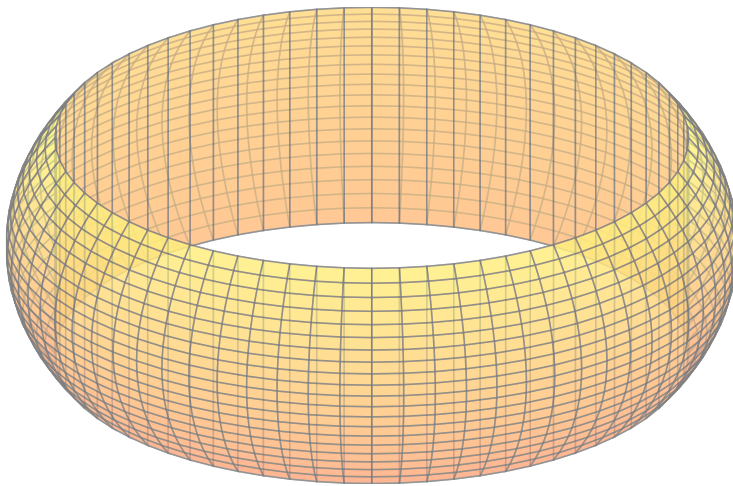
$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -(R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \rho (R + \rho \sin \theta) \quad (\text{plausibel, rechtshändig})$$

Volumenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) = \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho (R + \rho \sin \theta) \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^r \left[\rho (R\theta - \rho \cos \theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^r \rho \cdot R \cdot 2\pi \, d\rho \\ &= (2\pi)^2 R \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^r = 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

😊 Dies entspricht der Guldinschen Volumenregel G2B für Rotationskörper: πr^2 ist der Flächeninhalt des kleinen Kreises, $2\pi R$ ist der bei Rotation zurückgelegte Weg seines Schwerpunkts.



Aufgabe: (1) Bestimmen Sie das Volumen des **Serviettenrings**

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 \geq r^2 - h^2 \}$$

(2) Hängt das Volumen von der Höhe h ab? und vom Radius r ?

Ist das plausibel? Prüfen Sie dies mit Hilfe der vorigen Aufgaben! C240
(Einfache Körper taugen gut für Klausuraufgaben, etwa Februar 2013.)

Lösung: Für Rotationskörper können wir Zylinderkoordinaten nutzen:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_{z=-h}^h \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} \int_{z=-h}^h \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi\rho \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} \int_{z=-h}^h \pi \left[\rho^2 \right]_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz = \pi \int_{z=-h}^h (h^2 - z^2) dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} \pi \left[h^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-h}^h = \frac{4\pi}{3} h^3 \quad (\text{Kugel vom Radius } h!) \end{aligned}$$

Das Volumen hängt nur von der Höhe h ab, aber nicht vom Radius r .

Außerdem ist das zugleich das Volumen der Kugel vom Radius h .

Das ist auf den ersten Blick höchst erstaunlich! Ist es plausibel?

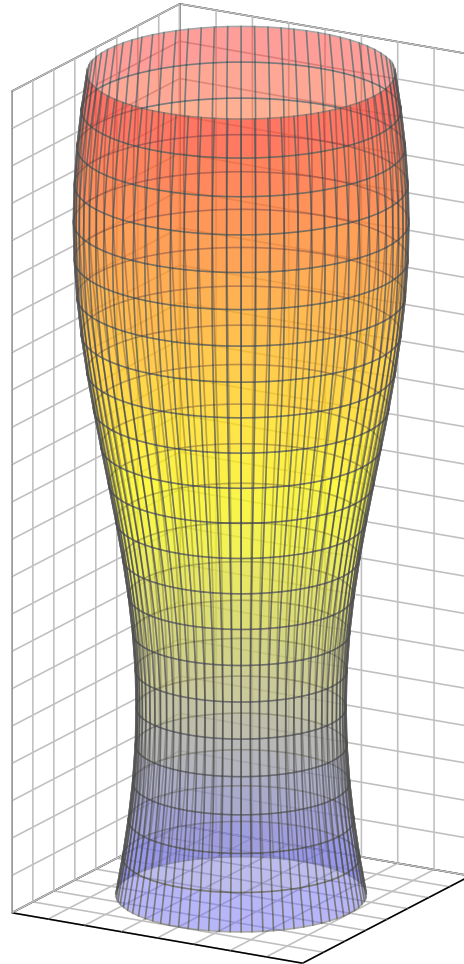
😊 Für $h = r$ erhalten wir das volle Kugelvolumen, wie es sein soll.

😊 Summe: Kugel C239 = Zylinder + Segmente C240 + Ring C419

😊 Alternative Rechnung mit Fubini, das gelingt ebenso leicht:

$$\text{vol}_3(S) = \int_{z=-h}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_R(x, y, z) \, d(x, y) \, dz = \pi \int_{z=-h}^h (r^2 - z^2) - (r^2 - h^2) \, dz$$

📺 Ein schönes Video von *Vsauce* hierzu: youtu.be/J51ncHP_BrY.



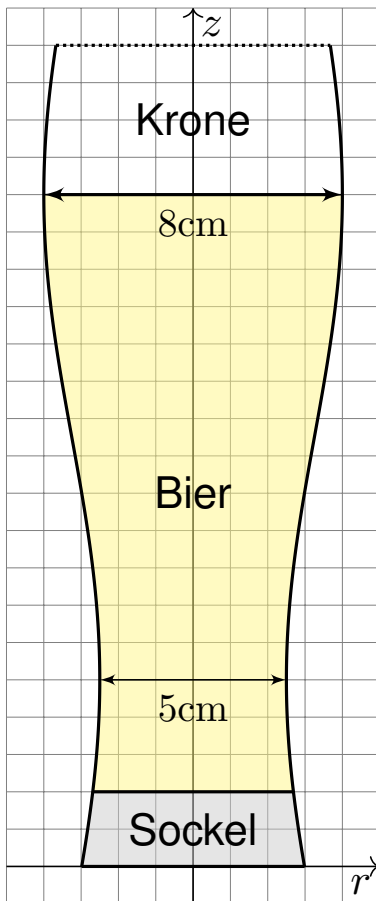
Viele Objekte unseres Alltags sind rotationssymmetrisch, aus praktischen Gründen der Herstellung oder der Nutzung, zum Beispiel rotierende Maschinenteile oder Werkstücke. Die Töpferscheibe wird seit Jahrtausenden genutzt. C233

Zur Beschreibung und Parametrisierung solcher Rotationskörper ist die Wahl von Zylinderkoordinaten meist natürlich und nützlich. Zur Illustration dieses Kapitels wollen wir dies an einem schönen (nicht ganz bierernsten) Anwendungsbeispiel durchrechnen.

Sie können das Volumen eines Weizenbierglases leicht experimentell messen: Hierzu genügen ein geeignetes Glas und eine Flasche Bier. Dies wird täglich hundertausendfach erprobt, zumeist erfolgreich.

 Hierzu ein Stuttgarter Science Pub: youtu.be/c4_GFCiem1c.

Wir wollen es zur Illustration unserer Techniken einmal ausrechnen. Danach werden Sie Weizenbiergläser mit anderen Augen sehen. Das Beste daran: Hier arbeiten Theorie und Praxis Hand in Hand. Das Ergebnis Ihrer Rechnung können Sie empirisch testen: Prost!



Weizenbiergläser sind hoch und geschwungen. Falls Sie auf einer Party zufällig Zeit dazu haben sollten, vermessen Sie ein Glas und erstellen Sie eine Parametrisierung: steigert den Nerd-Faktor! Für diese Vorlesung habe ich genau das getan:

Einige Messungen führen zu folgendem Modell:
 $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 22, x^2 + y^2 \leq r(z)^2 \}$
 mit einer Radiusfunktion $r(z) = a + b \sin(cz + d)$.
 Warum? Weil es gut passt. In Fourier we trust!

Alle Längen in cm, siehe nebenstehende Skizze: Der Durchmesser variiert von 5cm auf 5cm Höhe bis 8cm auf 18cm Höhe, Letzteres ist die Höhe des Füllstrichs. Der Glasboden innen liegt 2cm hoch. Diese Daten dürfen Sie gerne nachmessen!

Aufgabe: Berechnen Sie das Biervolumen. Prost! Ist das Ergebnis Ihrer Erfahrung nach plausibel?

Lösung: Die Messdaten kalibrieren die Parameter unseres Modells: Wir finden $a = 13/4$ und $b = 3/4$ sowie $c = \pi/13$ und $d = -\pi 23/26$. Das gesuchte Volumen berechnen wir wie üblich dank Fubini:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_B(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{z=2}^{18} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_B(x, y, z) \, d(x, y) \, dz \\ &= \int_{z=2}^{18} \pi r(z)^2 \, dz = \pi \int_{z=2}^{18} \left[a + b \sin(cz + d) \right]^2 \, dz \\ &= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab \sin(cz + d) + b^2 \sin^2(cz + d) \, dz \\ &= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab \sin(cz + d) + \frac{b^2}{2} \left[1 - \cos(2cz + 2d) \right] \, dz \\ &= \pi \left[a^2 z - \frac{2ab}{c} \cos(cz + d) + \frac{b^2}{2} z - \frac{b^2}{4c} \sin(2cz + 2d) \right]_{z=2}^{18} \\ &= 504.856 \quad (\text{Kalibrierung einsetzen und ausrechnen!}) \end{aligned}$$

😊 Das Ergebnis ist plausibel; $500\text{cm}^3 = 0.5\text{l}$ ist für Weizenbier üblich. Im Rahmen der Messgenauigkeiten ist 505cm^3 erstaunlich präzise (1%).

Aufgabe: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den n -dimensionalen Simplex

$$\Delta_r^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq r \}.$$

(1) Skizzieren Sie $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$ und berechnen Sie das Volumen

$$\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \dots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{n-1} \, dx_n.$$

(2) Berechnen Sie das Volumen des n -dimensionalen Würfels

$$W_r^n = [-r, r]^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in [-r, r] \}.$$

(3) Berechnen Sie das Volumen der n -dimensionalen Kugel

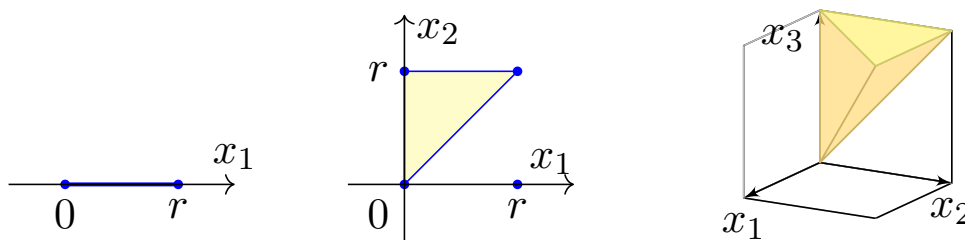
$$D_r^n = \bar{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}.$$

Gilt $\text{vol}_n(D_r^n) / \text{vol}_n(W_r^n) \searrow 0$? Ist das plausibel? (Vielleicht glauben Sie nur an Dimension 2 und 3, aber rechnen können Sie es ganz allgemein. Religiöse Bedenken oder gar Ausreden sind hier nicht angebracht.)

😊 Fassen Sie Mut und Zutrauen... auch zu hohen Dimensionen!

Volumen n -dimensionaler Simplizes

Lösung: (1) Wir machen eine Skizze, das hilft fast immer zur Klärung:



Die Eckpunkte des Tetraeders sind $(0, 0, 0), (0, 0, r), (0, r, r), (r, r, r)$.

$$\text{vol}_0(\Delta_r^0) = 1, \quad \text{vol}_1(\Delta_r^1) = r, \quad \text{vol}_2(\Delta_r^2) = \frac{r^2}{2}, \quad \text{vol}_3(\Delta_r^3) = \frac{r^3}{6}.$$

Wir vermuten $\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \frac{r^n}{n!}$ und bestätigen dies per Induktion:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(\Delta_r^n) &= \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \dots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{n-1} \, dx_n \\ &= \int_{x_n=0}^r \text{vol}_{n-1}(\Delta_{x_n}^{n-1}) \, dx_n = \int_{x_n=0}^r \frac{(x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx_n = \left[\frac{(x_n)^n}{n!} \right]_{x_n=0}^r = \frac{r^n}{n!} \end{aligned}$$

😊 Plausibel: Der Würfel $[0, r]^n$ zerlegt sich in $n!$ kongruente Simplizes.

😊 *Random fun fact:* Die Summe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \text{vol}_n(\Delta_r^n) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n / n! = e^r$.

Volumen n -dimensionaler Kugeln

(2) Für den Würfel $W_r^n = [-r, r]^n$ gilt $\text{vol}_n(W_r^n) = (2r)^n$. Dies folgt direkt aus der Definition des Volumens, und ebenso mit Fubini per Induktion:

$$\text{vol}_n(W_r^n) = \int_{x_n=-r}^r \text{vol}_{n-1}(W_r^{n-1}) = \int_{x_n=-r}^r (2r)^{n-1} dx_n = (2r)^n$$

(3) Für die Kugel D_r^n gilt $\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$ mit $\tau_n := \text{vol}_n(D_1^n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$\text{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$...

Wir berechnen die Konstante τ_n rekursiv, wie zuvor erklärt: C123

$$\tau_n = \text{vol}_n(D_1^n) = \int_{x_n=-1}^1 \tau_{n-1} (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dx_n = \tau_{n-1} \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n dx$$

Hierzu substituieren wir $x_n = -\cos(x)$ für $x \in [0, \pi]$ und $dx_n = \sin(x) dx$. Das Wallis-Integral $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n dx$ integrieren wir partiell B130 bezüglich $\sin(x)^{n-1} \cdot \sin(x)$ und nutzen $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$:

$$\int \sin(x)^n dx = -\sin(x)^{n-1} \cos(x) + \int (n-1) \sin(x)^{n-2} (1 - \sin(x)^2) dx$$

Volumen n -dimensionaler Kugeln

Auflösen nach $\int \sin(x)^n dx$ ergibt die schöne Rekursionsformel

$$\int \sin(x)^n dx = -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} dx.$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n dx$ gilt $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k} dx = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \pi \cdot \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}},$$

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k+1} dx = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = 2 \cdot \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Es gilt $I_n I_{n-1} = 2\pi/n$ und somit $\tau_n = \tau_{n-2} \cdot 2\pi/n$. Wir erhalten also

$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} \pi^k.$$

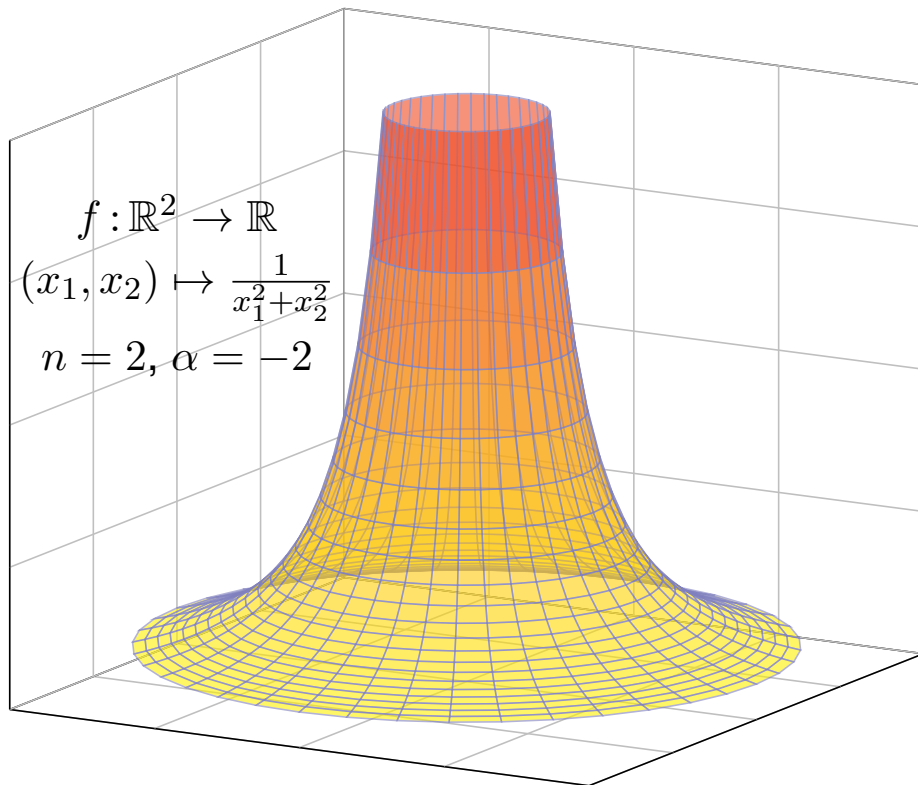
Die Gamma-Funktion fasst beide Fälle elegant zusammen (C2H):

$$\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n \quad \text{mit} \quad \tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

😊 *Random fun fact:* Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \text{vol}_n(D_r^{2k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pi r)^k / k! = e^{\pi r}$.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ nutzen wir die euklidische Norm $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha dx$ und $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha dx$ für $n = 1, 2, 3$.
Ist der Grenzwert für $a \searrow 0$ endlich? und der Grenzwert für $b \nearrow \infty$?



Lösung: Sei $0 < a < b$. (1) Für $n = 1$ und $\alpha \neq -1$ finden wir

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha dx = 2 \int_{x=a}^b x^\alpha dx = 2 \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=a}^b = 2 \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Im Sonderfall $\alpha = -1$ finden wir entsprechend $2(\ln b - \ln a) = 2 \ln(b/a)$.

Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -1$, unendlich für $\alpha \leq -1$.

Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -1$, unendlich für $\alpha \geq -1$.

Das Integral $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) In Dimension $n = 2$ nutzen wir Polarkoordinaten:

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha dx = \int_{\rho=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall $\alpha = -2$ finden wir ebenso $2\pi(\ln b - \ln a) = 2\pi \ln(b/a)$.

Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -2$, unendlich für $\alpha \leq -2$.

Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -2$, unendlich für $\alpha \geq -2$.

Das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) In Dimension $n = 3$ nutzen wir Kugelkoordinaten:

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha dx = \int_{\rho=a}^b \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho^2 \sin(\theta)}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\theta d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall $\alpha = -3$ finden wir ebenso $4\pi(\ln b - \ln a) = 4\pi \ln(b/a)$.

Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -3$, unendlich für $\alpha \leq -3$.

Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -3$, unendlich für $\alpha \geq -3$.

Das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Zur Information: In jeder Dimension $n \geq 1$ gilt $\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$ und

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha dx = \int_{\rho=a}^b r^\alpha \cdot n\tau_n r^{n-1} d\rho = n\tau_n \left[\frac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall $\alpha = -n$ finden wir ebenso $n\tau_n(\ln b - \ln a) = n\tau_n \ln(b/a)$.

⚠ Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

😊 Ob eine Polstelle von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar ist, hängt von ihrer Ordnung ab — und bemerkenswerterweise auch von der Dimension n !

Wir halten die Ergebnisse dieser Aufgabe im folgenden Satz fest.

Satz C4A: lokale Integrierbarkeit einer Polstelle

Das globale n -dimensionale Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ und in jeder Dimension $n \geq 1$. Genauer gilt für $r > 0$:

Das Integral $\int_{|x| \geq r} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für $\alpha \geq -n$, endlich für $\alpha < -n$.

Lokal gilt: $\int_{|x| \leq r} |x|^\alpha dx$ ist unendlich für $\alpha \leq -n$, endlich für $\alpha > -n$,

$$\int_{|x| \leq r} |x|^\alpha dx = \begin{cases} 2 \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{in Dimension } n = 1, \\ 2\pi \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} & \text{in Dimension } n = 2, \\ 4\pi \frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} & \text{in Dimension } n = 3, \\ n\tau_n \frac{r^{\alpha+n}}{\alpha+n} & \text{in jeder Dimension } n. \end{cases}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|^\alpha$ ist **lokal integrierbar** für $\alpha > -n$.

Wir präzisieren diesen nützlichen Begriff nachfolgend in Definition C4H.

Ähnliche Fragen begegnen uns häufig, daher lohnt es, das passende Vokabular der L^p -Räume und geeignete Werkzeuge zu entwickeln.

Im Folgenden sei Ω eine Menge, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wie üblich sei \mathbb{K} der reelle Körper \mathbb{R} oder der komplexe Körper \mathbb{C} .

Definition C4B: lokal beschränkte Funktion

(1) Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn eine geeignete Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Die kleinste solche Schranke ist das **Supremum**

$$|f|_{\Omega} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \{ x \in \Omega : |f(x)| > M \} = \emptyset \}.$$

Die Menge aller beschränkten Funktionen auf Ω schreiben wir

$$B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid |f|_{\Omega} < \infty \}.$$

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen $f : \Omega \rightarrow K$ **lokal beschränkt**, wenn f auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ beschränkt ist, also $|f|_K < \infty$ gilt. Die Menge dieser Funktionen schreiben wir $B_{\text{loc}}(\Omega) = B_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K})$.

Der Buchstabe „B“ steht für *beschränkt*, engl. *bounded*, frz. *borné*, und in $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{K})$ steht das „C“ für *stetig*, engl. *continuous*, frz. *continu*.

Lokal beschränkte Funktionen

Aufgabe: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer.

(1) Erklären Sie $B(\Omega) \subsetneq B_{\text{loc}}(\Omega) \supsetneq C(\Omega)$ sowie $B(\Omega) \not\subseteq C(\Omega)$.

(2) Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|^\alpha$ beschränkt? lokal beschränkt?

Lösung: (1a) Es gilt $C(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Sei $f \in C(\Omega)$, also $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Ist $K \Subset \Omega$ kompakt, so nimmt die stetige Funktion $|f|$ auf K ihr Maximum an, also $|f|_K = \max_{x \in K} |f(x)| < \infty$. Das zeigt $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$.

(1b) Umgekehrt gilt jedoch $C(\Omega) \not\subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Für jeden Punkt $p \in \Omega$ ist die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_{\{p\}}$ beschränkt, $|f|_{\Omega} = 1$, aber unstetig.

(1c) Es gilt $B(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Sei $f \in B(\Omega)$, also $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt. Für jede Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gilt dann offensichtlich $|f|_K \leq |f|_{\Omega} < \infty$, insbesondere gilt dies für Kompakta $K \Subset \Omega$. Das zeigt $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$.

(1d) Umgekehrt gilt jedoch $B(\Omega) \not\subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Es gibt Funktionen, die lokal aber nicht global beschränkt sind. Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ etwa genügt $f(x) = |x|$. Andernfalls genügt die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/|x - p|$ für einen Randpunkt $p \in \partial\Omega$; sie ist auf ganz Ω stetig, dank (1a) also lokal beschränkt, aber nicht beschränkt, denn für $x \rightarrow p$ gilt $f(x) \rightarrow \infty$.

(2) Unbeschränkt für $\alpha \neq 0$, stetig auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, also lokal beschränkt!

- Aufgabe:** (3) Zeigen Sie $|\lambda f|_\Omega = |\lambda| \cdot |f|_\Omega$ für alle $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
 (4) Zeigen Sie die Ungleichung $|f + g|_\Omega \leq |f|_\Omega + |g|_\Omega$ für $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.
 (5) Wie folgt aus (3,4), dass $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K})$ ein \mathbb{K} -Vektorraum ist?

Lösung: (3) Aus $|f(x)| \leq |f|_\Omega$ folgt $|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot |f|_\Omega$.
 Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|\lambda f|_\Omega \leq |\lambda| \cdot |f|_\Omega$.

(4) In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \leq |f|_\Omega$ und $|g(x)| \leq |g|_\Omega$.
 Daraus folgt unmittelbar $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f|_\Omega + |g|_\Omega$.
 Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|f + g|_\Omega \leq |f|_\Omega + |g|_\Omega$.

(5) Die Menge $\mathbb{K}^\Omega = \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K}) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \}$ aller Funktionen von Ω nach \mathbb{K} ist ein \mathbb{K} -Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation mit Skalaren, siehe Seite A210.

Hierin ist die Teilmenge $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid |f|_\Omega < \infty \}$ ein Untervektorraum: Die Nullfunktion gehört zu $B(\Omega)$, da $|0|_\Omega = 0 < \infty$.
 Für jede Funktion $f \in B(\Omega)$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda f \in B(\Omega)$, denn $|\lambda f|_\Omega = |\lambda| \cdot |f|_\Omega < \infty$ dank (3). Für je zwei Funktionen $f, g \in B(\Omega)$ gilt $f + g \in B(\Omega)$, denn $|f + g|_\Omega \leq |f|_\Omega + |g|_\Omega < \infty$ dank (4).

- Aufgabe:** Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ können wir auch multiplizieren:
 (6) Zeigen Sie die Ungleichung $|f \cdot g|_\Omega \leq |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$ für $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.
 (7) Ist $B(\Omega)$ eine \mathbb{K} -Algebra, gilt also $f \cdot g \in B(\Omega)$ für $f, g \in B(\Omega)$?
 (8) Ist auch $B_{\text{loc}}(\Omega)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum? und eine \mathbb{K} -Algebra?

Lösung: (6) In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \leq |f|_\Omega$ und $|g(x)| \leq |g|_\Omega$.
 Daraus folgt unmittelbar $|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$.
 Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|f \cdot g|_\Omega \leq |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$.

(7) Für $f, g \in B(\Omega)$ gilt $f \cdot g \in B(\Omega)$, denn $|f \cdot g|_\Omega \leq |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega < \infty$.
 Somit ist $B(\Omega)$ tatsächlich eine \mathbb{K} -Unteralgebra von $\mathbb{K}^\Omega = \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$.

(8) Ja, auch $B_{\text{loc}}(\Omega)$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum und sogar eine \mathbb{K} -Algebra: Sind die Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ lokal beschränkt, also beschränkt auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$, so gilt dies auch für λf sowie $f + g$ und $f \cdot g$. Es genügt, die Argumente (3–7) auf jedes Kompaktum K anzuwenden.

😊 Diese Aufgabe und ihre Lösung sind pedantisch und kleinschrittig, um die grundlegenden Begriffe und Argumente einmal einzuüben. Wie so oft gilt auch hier: Mit der nötigen Sorgfalt gelingt es leicht.

Definition C4c: essentiell beschränkte Funktion

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **essentiell beschränkt**, wenn eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(x)| \leq M$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Die kleinste solche Konstante ist das **essentielle Supremum**

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &:= \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \operatorname{vol}_n \{ x \in \Omega : |f(x)| > M \} = 0 \}. \end{aligned}$$

Nach Änderung auf einer Nullmenge ist f beschränkt, also $|f| \leq M$.

Die Menge aller essentiell beschränkten Funktionen schreiben wir

$$L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^\infty} < \infty \}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta $K \Subset \Omega$, so erhalten wir

$$L^\infty_{\operatorname{loc}}(\Omega) = L^\infty_{\operatorname{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ für alle } K \Subset \Omega \}.$$

Es genügt, dies auf Bällen $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$ zu testen für $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ reicht es, dies für $K = \bar{B}(0, r)$ und $r = 1, 2, 3, \dots$ zu testen.

Essentiell beschränkte Funktionen

Aufgabe: (1) Zur Illustration untersuchen wir $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x) + x \mathbf{I}_{\mathbb{Z}\pi}(x)$ und $h(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^*}(x)/|x|$. Bestimmen Sie hierzu jeweils \inf und \sup sowie $\operatorname{ess\,inf}$ und $\operatorname{ess\,sup}$.

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Erklären Sie die folgenden Inklusionen:

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\Omega) & \subsetneq & L^\infty_{\operatorname{loc}}(\Omega) \\ \cup \uparrow & \not\subseteq & \cup \uparrow \\ B(\Omega) & \subsetneq & B_{\operatorname{loc}}(\Omega) \end{array}$$

(3) Zeigen Sie für alle $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Un/Gleichungen:

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty} \\ \|f + g\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \\ \|f \cdot g\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

(4) Ist $L^\infty(\Omega)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum? eine \mathbb{K} -Algebra? und $L^\infty_{\operatorname{loc}}(\Omega)$?

(5) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Beweisen oder widerlegen Sie die naheliegende Vermutung $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$ und $\operatorname{ess\,inf} f = \inf f$.

Lösung: (1a) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sin(x)$ gilt $\inf f = -1$ und $\sup f = +1$, also $|f|_{\mathbb{R}} = \sup|f| = 1$, und f ist beschränkt, kurz $f \in B(\mathbb{R})$. Ebenso finden wir $\text{ess inf } f = -1$ und $\text{ess sup } f = +1$, somit $\|f\|_{L^\infty} = 1$.

(1b) Für g gilt $g(k\pi) = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, somit $\inf g = -\infty$ und $\sup g = +\infty$, also $|g|_{\mathbb{R}} = \sup|g| = \infty$, demnach ist g unbeschränkt, kurz $g \notin B(\mathbb{R})$. Jedoch finden wir $\text{ess inf } g = -1$ und $\text{ess sup } g = +1$, somit $\|g\|_{L^\infty} = 1$. Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge $\mathbb{Z}\pi$ gilt $g = f$.

(1c) Für h gilt $h(x) = 1/|x|$ für $x \in \mathbb{Q}^*$ und $h(x) = 0$ sonst, somit $\inf h = 0$ und $\sup h = +\infty$, also $|h|_{\mathbb{R}} = \sup|h| = \infty$, und h ist unbeschränkt. Jedoch finden wir $\text{ess inf } h = 0$ und $\text{ess sup } h = 0$, somit $\|h\|_{L^\infty} = 0$. Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge \mathbb{Q} gilt $h = 0$.

(2) Die vier angegebenen Inklusionen sind klar aufgrund der Definition. Die sechs negierten Inklusionen werden widerlegt durch Funktionen wie $f(x) = |x|$ (horizontal) und $g(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^n \setminus \{0\}}(x)/|x|$ (vertikal) auf $\Omega = \mathbb{R}^n$. Für $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen variieren wir diese Gegenbeispiele: Es genügen $f(x) = 1/|x - p|$ für einen Randpunkt $p \in \partial\Omega$ oder $g(x - p)$ für $p \in \Omega$.

(3) Zu $\|f\|_{L^\infty} = M_1$ existiert eine Nullmenge $N_1 \subseteq \Omega$, $\text{vol}_n(N_1) = 0$, sodass $|f(x)| \leq M_1$ für $x \in \Omega \setminus N_1$; zu $\|g\|_{L^\infty} = M_2$ ebenso $N_2 \subseteq \Omega$. Für $N = N_1 \cup N_2$ gilt dann $0 \leq \text{vol}_n(N) \leq \text{vol}_n(N_1) + \text{vol}_n(N_2) = 0$. Für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$. Das zeigt $\|f + g\|_{L^\infty} = \text{ess sup}|f + g| \leq M_1 + M_2 = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$. Ebenso gilt $\|f \cdot g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty}$ und $\|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty}$.

(4) Aus (3) folgt, dass $L^\infty(\Omega)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum ist und eine \mathbb{K} -Algebra, wie in der vorigen Aufgabe ausgeführt. Dasselbe gilt auch für $L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$.

(5) Die Ungleichung $\text{ess sup } f \leq \sup f =: M$ gilt für jede Funktion f . Wir zeigen nun $\text{ess sup } f \geq \sup f$ für jede stetige Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen $M < \infty$ an; der Fall $M = \infty$ verläuft anschließend genauso. Zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in \Omega$ mit $f(x) \geq M - \varepsilon/2$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $f > M - \varepsilon$ auf $B(x, \delta)$ gilt. Wegen $\text{vol}_n B(x, \delta) > 0$ muss demnach $\text{ess sup } f > M - \varepsilon$ gelten. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\text{ess sup } f \geq M$, wie behauptet.

😊 Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\text{ess sup } f = \sup f$ und $\text{ess inf } f = \inf f$. Insbesondere folgt hieraus $|f|_\Omega = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Definition C4D: absolut integrierbare Funktion

Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt (absolut) **integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\Omega} |f(x)| \, dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^1\text{-Norm})$$

Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^1 = L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^1} < \infty \}.$$

Satz C4E: absolut integrierbare Funktion

Die Menge $L^1(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Untervektorraum, denn für alle Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Un/Gleichungen

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^1} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^1}, \\ \|f + g\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Hierauf ist das Integral $L^1 \rightarrow \mathbb{K} : f \mapsto \int_{\Omega} f(x) \, dx$ definiert und \mathbb{K} -linear.

Quadratisch integrierbare Funktionen

Definition C4F: quadratisch integrierbare Funktion

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **quadratisch integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^2\text{-Norm})$$

Die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^2} < \infty \}.$$

Satz C4G: quadratisch integrierbare Funktion

Die Menge $L^2(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Untervektorraum dank

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^2} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^2}, \\ \|f + g\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Wir haben $\cdot : L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$ dank Cauchy-Schwarz I1H (allgemein C4L):

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit L^p -Normen und Ungleichungen nach Vorbild der zentralen Cauchy–Schwarz–Ungleichung (Satz I1H).

Muss die Ingenieur:in das unbedingt wissen? Oder genügt es notfalls, eine freundliche Mathematiker:in zu fragen? Das hängt wie immer vom Anwendungsgebiet ab und den dort typischen Anforderungen. . . .

Im Allgemeinen hilft es, möglichst wirksame Werkzeuge zu kennen! Ein paar Worte zur Motivation scheinen mir daher angebracht.

Die Algebra lehrt zunächst das Lösen von gewissen **Gleichungen**, die Analysis erklärt und nutzt zudem vor allem **Ungleichungen**.

Ich möchte sogar sagen: *Alle* Techniken der Analysis und Numerik beruhen letztlich auf Ungleichungen und (Fehler-)Abschätzungen, insbesondere bei allen Fragen zu Approximation und Konvergenz.

Auch und ganz besonders für Integrale und Reihen wünschen wir uns daher möglichst vielseitige, bequeme und hilfreiche Abschätzungen.

Die folgenden Definitionen erklären hierzu das nötige Vokabular, anschließend klären wir einige nützliche Ungleichungen.

Lokal integrierbare Funktionen

Definition C4H: lokal integrierbare Funktion

Vorgegeben sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < \infty$. Wie üblich sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **p -integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^p}^p := \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^p\text{-Norm})$$

Für $p = 1$ ist f absolut integrierbar, für $p = 2$ quadratisch integrierbar, für $p = \infty$ ersetzen wir das Integral durch das essentielle Supremum.

Die Menge aller p -integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta $K \in \Omega$, so erhalten wir

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = L^p_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p(K)} < \infty \text{ für alle } K \in \Omega \}.$$

Es genügt, dies auf Bällen $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$ zu testen für $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ reicht es, dies für $K = \bar{B}(0, r)$ und $r = 1, 2, 3, \dots$ zu testen.

Zwischen den L^p -Räumen bestehen folgende Beziehungen:

Satz C41: Vergleich der L^p -Räume

(1) Sei $1 \leq p < q < \infty$. Für $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gelten die Abschätzungen

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty}^p.$$

(2) Für $1 < p < q < \infty$ und endliches Volumen $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$, insb. für alle Kompakta wie zum Beispiel $\bar{B}(a, r)$, gelten daher die Inklusionen

$$L^1(\Omega) \supsetneq L^p(\Omega) \supsetneq L^q(\Omega) \supsetneq L^\infty(\Omega)$$

(3) Bei unendlichem Volumen, insbesondere für $\Omega = \mathbb{R}^n$, gilt weder die Inklusion $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ noch die umgekehrte Inklusion $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$.

Beispiel: Für Fourier-Reihen spielt $L^2([0, 2\pi])$ eine zentrale Rolle.

Gemäß Satz C41 gilt hier $L^1([0, 2\pi]) \supsetneq L^2([0, 2\pi]) \supsetneq L^\infty([0, 2\pi])$.

Die Fourier-Transformation nutzt entsprechend die Räume $L^1(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$, doch hier gilt leider $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe: Beweisen Sie (1) durch die Abschätzung $|f|^p \leq 1 + |f|^q$.

Finden Sie Gegenbeispiele für die nicht geltenden Inklusionen (1,2).

Lösung: (1) Zwei Fälle: Für $0 \leq a \leq 1$ gilt $a^p \leq 1 \leq 1 + a^q$. Für $1 \leq a$ gilt

$1 \leq a^p \leq a^q$ wegen $p \leq q$ und Monotonie der Funktion $t \mapsto a^t = e^{t \ln a}$.

Integration von $|f|^p \leq 1 + |f|^q$ über Ω ergibt $\|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q$.

Ist also $\|f\|_{L^q}$ endlich, so auch $\|f\|_{L^p}$. Das bedeutet $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$.

(2) Gegenbeispiele liefern Funktionen wie $f(x) = |x|^{-n/q}$ (Satz C4A).

Hierzu sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nach Verschiebung $\Omega \supseteq \bar{B}(0, r) =: K$ mit $r > 0$.

Die Funktion $f(x) = |x|^{-n/q} \mathbf{I}_K(x)$ ist nicht q -integrierbar, $\|f\|_{L^q(\Omega)} = \infty$,

wohl aber p -integrierbar, $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ für alle Exponenten $p < q$.

Dies zeigt $f \in L^p(\Omega)$ aber $f \notin L^q(\Omega)$, also $L^p(\Omega) \not\subseteq L^q(\Omega)$.

(3) Wir nehmen zur Vereinfachung $\Omega = \mathbb{R}^n$ an und setzen $K = \bar{B}(0, 1)$.

Die Funktion $f(x) = |x|^{-n/q} \mathbf{I}_K(x)$ erfüllt $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ aber $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$,

wie bereits in (1) gesehen, somit gilt auch hier $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$.

Für $U = \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ und $g(x) = |x|^{-n/p} \mathbf{I}_U(x)$ gilt $\|g\|_{L^p} = \infty$ aber

$\|g\|_{L^q} < \infty$ für $q > p$, siehe Satz C4A, also $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ aber $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Das zeigt $L^p(\mathbb{R}^n) \not\supseteq L^q(\mathbb{R}^n)$. (Allgemein: $\text{vol}_n(\Omega) = \infty$ gelingt ähnlich.)

😊 Dank der \mathbb{K} –Vektorraumstruktur auf $L^1 = L^1(\Omega, \mathbb{K})$ können wir Funktionen $f, g \in L^1$ **linear kombinieren** und wissen $\alpha f + \beta g \in L^1$. Das Integral $\int : L^1(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine \mathbb{K} –lineare Abbildung (A3L, A4B). Oft wollen / müssen wir Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ auch **multiplizieren**. Sei $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, etwa $(p, q) = (1, \infty), (2, 2), (\infty, 1)$. Wir haben $\cdot : L^p \times L^q \rightarrow L^1$ dank der **Hölder–Ungleichung** (C4L)

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Für $(p, q) = (1, \infty), (\infty, 1)$ ist die Hölder–Ungleichung leicht: Übung! Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

Wir haben $+$: $L^p \times L^p \rightarrow L^p$ dank der **Minkowski–Ungleichung** (C4L)

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Minkowski–Ungleichung leicht: Übung! Für $1 < p < \infty$ werden wir sie anschließend ausführlich nachrechnen.

😊 Diese allgemeinen Ungleichungen ersparen uns viel Arbeit, da wir nicht jedes mal erneut die Integrierbarkeit individuell prüfen müssen.

Vektorräume und Vektornormen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kennen und lieben wir den \mathbb{K} –Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$. [1129] Für $u \in \mathbb{K}^n$ nutzen wir die euklidische Norm $\|u\| := \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$. Diese erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

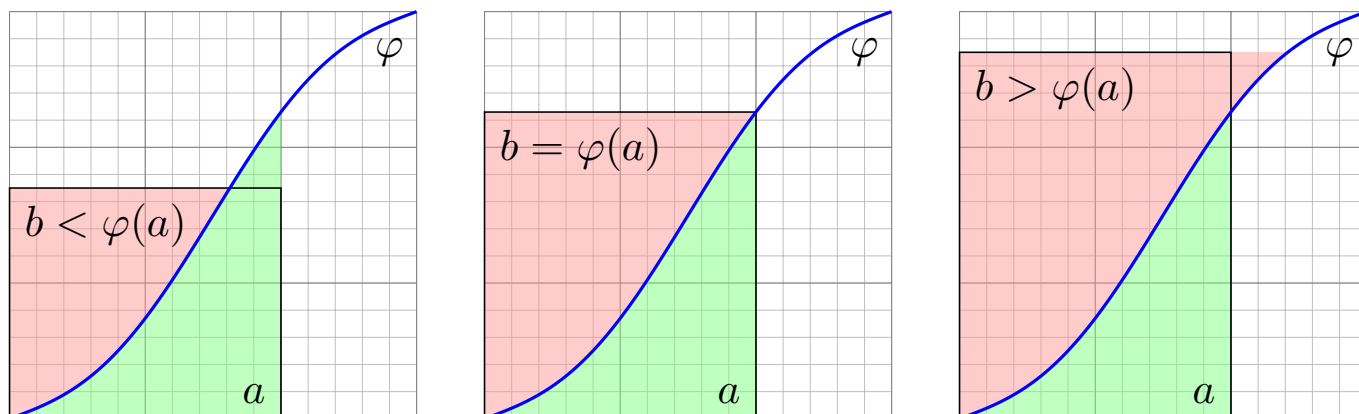
- (N1) $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| > 0$ für $v \neq 0$ (positive Definitheit)
- (N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Homogenität über \mathbb{K})
- (N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

Diese Rechenregeln nutzen wir oft. Sie verdienen einen Namen:

Definition C4J: normierter \mathbb{K} –Vektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zum Beispiel $V = \mathbb{K}^n$. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt. Dies induziert eine **Metrik**: Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$. Die **Konvergenz** $v_n \rightarrow v$ in $(V, \|-\|)$ ist definiert durch $\|v_n - v\| \rightarrow 0$.

Beispiel: In $C(\Omega)$ mit Supremumsnorm $|\cdot|_\Omega$ ist dies die gleichmäßige Konvergenz, mit der L^1 –Norm $\|-\|_{L^1}$ hingegen die Konvergenz im Mittel. Minkowski besagt, dass $(L^p(\Omega), \|-\|_{L^p})$ ein normierter Vektorraum ist.



Satz C4K: Youngs Integralungleichung

Sei $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, streng monoton, mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(x) \nearrow \infty$ für $x \nearrow \infty$, zum Beispiel $\varphi(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist φ bijektiv, und ihre Umkehrfunktion $\psi = \varphi^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat dieselben Eigenschaften. Für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt dann, wie oben illustriert, folgende Ungleichung:

$$a \cdot b \leq \int_{x=0}^a \varphi(x) \, dx + \int_{y=0}^b \psi(y) \, dy$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $b = \varphi(a)$ gilt, siehe Skizze (und A423).

Die Hölder–Minkowski–Ungleichung

Satz C4L: Hölder–Minkowski–Ungleichung

(0) Sei $1 < p < \infty$ und $q = p/(p-1) > 1$, sodass $1/p + 1/q = 1$ gilt.

Satz C4K ergibt für $\varphi(x) = x^{p-1}$ und $\psi(y) = y^{q-1}$ die Ungleichung

$$a \cdot b \leq a^p/p + b^q/q$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$.

(1) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$, eventuell $\{p, q\} = \{1, \infty\}$.

Für $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ gilt $f \cdot g \in L^1(\Omega)$, genauer:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Gleichheit gilt gdw $|f(x)|^p = \text{const} \cdot |g(x)|^q$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

(2) Für $1 \leq p \leq \infty$ und alle $f, g \in L^p(\Omega)$ gilt $f + g \in L^p(\Omega)$, genauer:

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Insbesondere ist $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Norm $\|-\|_{L^p}$.

Genau dann gilt $\|f\|_{L^p} = 0$, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Beweis: (1) Aus $\|f\|_{L^p} = 0$ folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ (Satz A4G), also $f(x) \cdot g(x) = 0$, somit $\|f \cdot g\|_{L^1} = 0$, und die Ungleichung ist erfüllt. Gleiches gilt falls $\|g\|_{L^q} = 0$. Im Folgenden sei $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^q} > 0$. Dank (0) haben wir in jedem Punkt $x \in \Omega$ die Ungleichung

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_{L^q}^q}.$$

Das Integral über $x \in \Omega$ erhält diese Ungleichung dank Monotonie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int |f(x)g(x)| \, dx &\leq \frac{1}{p \|f\|_{L^p}^p} \int |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{q \|g\|_{L^q}^q} \int |g(x)|^q \, dx \\ &= \frac{\|f\|_{L^p}^p}{p \|f\|_{L^p}^p} + \frac{\|g\|_{L^q}^q}{q \|g\|_{L^q}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Dies zeigt die ersehnte Hölder–Ungleichung $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$. Gilt $|f(x)|^p = \text{const} \cdot |g(x)|^q$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt, so folgt Gleichheit $\|f \cdot g\|_{L^1} = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$. Die Umkehrung führen wir nicht weiter aus.

(2) Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Minkowski–Ungleichung leicht: Übung! Im Folgenden sei also $1 < p, q < \infty$. Wie zuvor gelte $1/p + 1/q = 1$.

Beweis der Minkowski–Ungleichung

Seien $f, g \in L^p$. Die folgende grobe Abschätzung zeigt $f + g \in L^p$:

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

Integration über $x \in \Omega$ zeigt $\|f + g\|_{L^p}^p \leq 2^p(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) < \infty$.

Sei nun also $0 < \|f + g\|_{L^p} < \infty$. Wir nutzen die Hölder–Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \||f + g|^p\|_{L^1} \\ &= \||f + g| \cdot |f + g|^{p-1}\|_{L^1} \\ &\leq \||f| \cdot |f + g|^{p-1}\|_{L^1} + \||g| \cdot |f + g|^{p-1}\|_{L^1} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \cdot \||f + g|^{p-1}\|_{L^q} + \|g\|_{L^p} \cdot \||f + g|^{p-1}\|_{L^q} \\ &= [\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}] \cdot \||f + g|^{(p-1)q}\|_{L^1}^{1/q} \end{aligned}$$

Dank $(p-1)q = p$ ist der letzte Faktor gleich $\||f + g|^p\|_{L^1}^{1/q} = \|f + g\|_{L^p}^{p/q}$. Division ergibt die ersehnte Minkowski–Ungleichung für $\|f + g\|_{L^p}$.

Wie üblich sei \mathbb{K} der reelle Körper \mathbb{R} oder der komplexe Körper \mathbb{C} .
Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ definieren wir die **L^p -Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \left[\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Die **L^p -integrierbaren** Funktionen bilden den \mathbb{K} -Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \}.$$

Hier bedeutet L^1 absolut integrierbar und L^∞ essentiell beschränkt.
Gleichheit $f = g$ in $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ bedeutet $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.
Für $0 < \operatorname{vol}(\Omega) < \infty$ und $1 < p < q < \infty$ gilt $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$.

Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle - | - \rangle: L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar dank der **Hölder-Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

😊 Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Diskretes Analogon: die ℓ^p -Folgenräume

Sei Ω eine Menge, etwa $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ oder $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$.
Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ definieren wir die **ℓ^p -Norm**

$$\|f\|_{\ell^p} := \left[\sum_{k \in \Omega} |f(k)|^p \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \Omega} |f(k)|.$$

Die **ℓ^p -summierbaren** Folgen bilden den \mathbb{K} -Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{\ell^p} < \infty \}.$$

Demnach bedeutet ℓ^1 absolut summierbar, ℓ^2 quadratisch summierbar
und ℓ^∞ beschränkt. Für Ω unendlich und $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle - | - \rangle: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \sum_{k \in \Omega} \overline{f(k)} g(k).$$

Das Produkt ist absolut summierbar dank der **Hölder-Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

😊 Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto f_k$ ist eine reelle Zahlenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Für Fourier-Reihen betrachten wir $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, also $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Summen von Folgen verhalten sich wie Integrale von Funktionen:

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$$

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\|f\|_{\ell^1} := \sum_{x \in \Omega} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^1} := \int_{x \in \Omega} |f(x)| \, dx$$

$$\|f\|_{\ell^2} := \left[\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_{L^2} := \left[\int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_{\ell^p} := \left[\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_{L^p} := \left[\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_{\ell^\infty} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

😊 Gut für uns: Es gelten im Wesentlichen dieselben Rechenregeln. Die Fourier-Isometrie $\mathcal{F} : L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ übersetzt verlustfrei zwischen Funktionen und Folgen! Wir führen dies in Kapitel I und J aus.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$ und die Hölder-Minkowski-Ungleichung gelten nicht nur für Integrale, sondern wörtlich genauso für Summen und Reihen. Wir führen dies hier aus, als lehrreiche Übung zur Wiederholung und der sorgfältigen Argumentation.

Übung: (1) Wiederholen Sie die Definition von $\|-\|_{L^p}$ und $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ und führen Sie die obige Definition von $\|-\|_{\ell^p}$ und $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ aus.

(2) Warum ist $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ bzw. $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ ein \mathbb{K} -Vektorraum?

Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind besonders leicht: Warum und wie?

Der Fall $p = 2$ gelingt durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Wie?

Der allgemeine Fall $1 < p < \infty$ benötigt Hölder-Minkowski (C4L):

Wiederholen Sie dies für L^p und beweisen Sie es analog für ℓ^p .

(3) Für $\emptyset < \operatorname{vol}(\Omega) < \infty$ und $1 < p < q < \infty$ gilt $L^1 \not\supseteq L^p \not\supseteq L^q \not\supseteq L^\infty$.

Diskret gilt $\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$; es genügt, dies für $\Omega = \mathbb{N}$ zu diskutieren.

Hier unterscheiden sich die Räume $L^p([0, 2\pi])$ und $\ell^p(\mathbb{Z})$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(4) Warum ist $L^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ eine \mathbb{K} -Algebra, nicht aber $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ für $p < \infty$?

Überraschung: Warum ist $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$ eine \mathbb{K} -Algebra für alle $1 \leq p \leq \infty$?