Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/12	/18	/14	/6	/6	/8	/75

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (10 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Der Raum $\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \,\}$ ist zusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Der Raum $\mathrm{GL}_2^+\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \,\}$ ist zusammenziehbar. ☐ Ja ☐ Nein

2C. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist erstabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2D. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

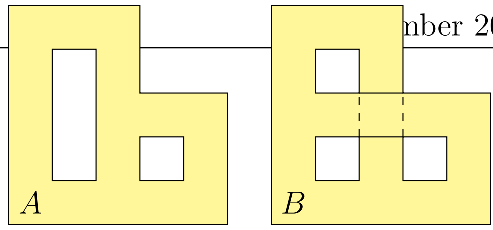
2F. Ist Y hausdorffsch und $B \subseteq Y$ kompakt, so ist B abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_\mathbb{Q}$ ist injektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Z},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_\mathbb{Z}$ ist injektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Der Raum $(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\mathbb{Q})$ ist lokal wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Der Raum $(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$ ist lokal wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein



Aufgabe 3. *Ja, nein, warum?* (12 Punkte)

3A. Sind die Flächen A und B homöomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

3B. Gegeben seien die abstrakten Simplizialkomplexe $K = \langle \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e,f\} \rangle$ und $L = \langle \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{D,E,F\} \rangle$. Ist die folgende Abbildung, gegeben auf den Eckenmengen, simplizial: $f : \Omega(K) \to \Omega(L) : a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D, e \mapsto E, f \mapsto F$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

3C. Ist $X = \{\, 0, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\} \times [0,1]$ triangulierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Triangulierung oder Hindernis:

2

3D. Ist die Menge $X = \{ \frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{N},\, 0 < k < 2^n \}$ nirgends dicht im euklidischen Raum $\mathbb{R}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

3E. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Ist f dann surjektiv?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

3F. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Räume mit der indiskreten Topologie.
Ist dann auch die Produkttopologie auf $X \times Y$ indiskret?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 4. *Diagonalisierbar und trigonalisierbar* (18 Punkte)

4A. In $\mathbb{R}[X]^1_2 = \{\, X^2 + pX + q \mid p, q \in \mathbb{R} \,\}$ ist $N = \{\, F \in \mathbb{R}[X]^1_2 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x) \neq 0 \,\}$ offen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

4B. Die Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ der (über $\mathbb{R}$ *trigonalisierbaren*) Matrizen A, deren charakteristisches Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_2$ in $\mathbb{R}$–Linearfaktoren zerfällt, ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Beweis:

3

4C. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Teilmenge der (hier *separabel* genannten) Matrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerten (in $\mathbb{C}$). Dann ist S offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Beweis:

3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Menge der über $\mathbb{R}$ diagonalisierbaren Matrizen.

4D. Ist D in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ offen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

4E. Ist D in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

4F. Zeigen Sie $\overline{D} = T$.

Beweis:

/3

4G. Zeigen Sie $D^\circ = S \cap T$.

Beweis:

/3

Aufgabe 5. *Kompaktheit* (14 Punkte)

5A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subseteq Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 3

5B. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 3

Im Folgenden seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und Y kompakt.

5C. Sei W eine Umgebung von $\{x\} \times Y$ im Produktraum $X \times Y$. Beweisen Sie das Tubenlemma: Es existiert $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.

Beweis:

$\overline{}$ 4

5D. Zeigen Sie damit: Die Projektion $p : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ ist abgeschlossen.

Beweis:

$\overline{}$ 4

Aufgabe 6. *Quotientenräume* (6 Punkte)

Auf $Z = \mathbb{N} \times [0,1]$ seien die Äquivalenzrelationen $\sim$ und $\approx$ erzeugt von $(a,1) \sim (a+1,0)$ bzw. $(a,0) \approx (a+1,0)$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Seien $X = Z/_\sim$ und $Y = Z/_\approx$ die Quotientenräume.

6A. Genau einer der Räume $A \in \{X, Y\}$ ist homöomorph zu einem euklidischen Teilraum. Nennen Sie A und einen Homöomorphismus $h : A \xrightarrow{\sim} T$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Raum und Homöomorphismus:

2

6B. Der andere Raum $B \in \{X, Y\}$ lässt sich nicht in $\mathbb{R}^n$ einbetten. Beweisen Sie dies!

Hindernis und Nachweis:

4

Aufgabe 7. *Funktoren* (6 Punkte)

7A. Überführt der Funktor $F = [\mathbb{S}^1, -] : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ jede Identifizierung in eine Surjektion?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

7B. Eine *Retraktion* in einer Kategorie $\mathtt{C}$ ist ein rechtsinvertierbarer Morphismus.
Überführt jeder (kovariante) Funktor $F : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ jede Retraktion in eine Retraktion?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

7C. Existiert ein Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ mit $F(\mathrm{O}_2\,\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ und $F(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}) = \{0\}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

Aufgabe 8. *Stetige Multiplikation* (8 Punkte)

8A. Sei $(G, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ eine Gruppe, darin $\{e\}$ abgeschlossen und $\sigma : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a^{-1}b$ stetig bezüglich Produkttopologie. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist hausdorffsch.

Beweis:

3

8B. Sei $\mu : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ stetig mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch ist. *Hinweis:* Produkt von zwei geeigneten Homotopien.

Beweis:

3

8C. Existiert auf dem topologischen Raum $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ ein stetiges Produkt $\mu : X \times X \to X$ mit einem neutralen Element $e \in X$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2