Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/12	/18	/14	/6	/6	/8	/75

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie sollen Fleiß während des Semesters und Sorgfalt in der Vorbereitung belohnen. Das sind leichte Punkte — leider oft vergeudet. Falls Sie diese Weisheit *vor* Ihrer eigenen Klausur lesen: Nutzen Sie Ihre Übungen!

Vorwort zur Musterlösung: Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (10 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Der Raum $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \}$ ist zusammenhängend. [X] Ja [ ] Nein

2B. Der Raum $\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \}$ ist zusammenziehbar. [ ] Ja [X] Nein

2C. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist erstabzählbar. [ ] Ja [X] Nein

2D. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist metrisierbar. [X] Ja [ ] Nein

2E. Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt. [X] Ja [ ] Nein

2F. Ist Y hausdorffsch und $B \subseteq Y$ kompakt, so ist B abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

2G. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv. [X] Ja [ ] Nein

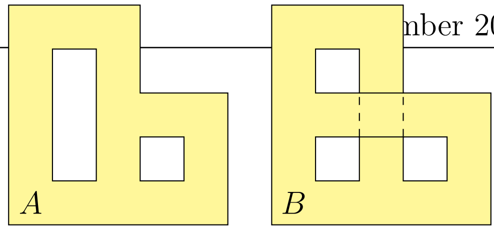
2H. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Z},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Z}}$ ist injektiv. [ ] Ja [X] Nein

2I. Der Raum $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ ist lokal wegzusammenhängend. [X] Ja [ ] Nein

2J. Der Raum $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ ist lokal wegzusammenhängend. [ ] Ja [X] Nein

Aufgabe 3. *Ja, nein, warum?* (12 Punkte)

3A. Sind die Flächen A und B homöomorph?



☐ Ja $\boxed{\text{X}}$ Nein. Begründung:

Die Anzahl der Randkomponenten ist verschieden:
A hat drei Randkomponenten, B hingegen nur eine.

2

3B. Gegeben seien die abstrakten Simplizialkomplexe $K = \langle \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e,f\} \rangle$ und $L = \langle \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{D,E,F\} \rangle$. Ist die folgende Abbildung, gegeben auf den Eckenmengen, simplizial: $f : \Omega(K) \to \Omega(L) : a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D, e \mapsto E, f \mapsto F$?

☐ Ja $\boxed{\text{X}}$ Nein. Begründung:

Das Simplex $\{a,b,c\} \in K$ wird abgebildet auf $\{f(a), f(b), f(c)\} = \{A,B,C\}$, und dies ist kein Simplex in L.

2

3C. Ist $X = \{\, 0, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\} \times [0,1]$ triangulierbar?

☐ Ja $\boxed{\text{X}}$ Nein. Triangulierung oder Hindernis:

Der Raum X ist nicht lokal-weg/zusammenhängend.

Alternative: X ist kompakt dank Heine–Borel. Wäre X triangulierbar, $X \cong |K|$, dann wäre der Simplizialkomplex K endlich. Doch X hat unendlich viele Komponenten.

Erläuterung: Offensichtlich ist X Vereinigung der Intervalle $\{a\} \times [0,1]$. Viele haben daher den affinen Simplizialkomplex $K = \langle \{(0,0),(0,1)\}, \{(2^{-k},0),(2^{-k},1)\} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ vorgeschlagen. Dieser liefert zwar die Menge X, jedoch keine Triangulierung: Die Teilraumtopologie von X in $\mathbb{R}^2$ ist nicht die simpliziale Topologie. Genauer: Das Intervall $\{0\} \times [0,1]$ ist offen in der simplizialen Topologie, aber nicht in der Teilraumtopologie! Sie kennen solche Beispiele aus der Vorlesung, etwa die simpliziale Sinuskurve des Topologen. Als hinreichendes Kriterium kennen Sie die lokale Endlichkeit, diese ist hier offensichtlich nicht gegeben.

2

3D. Ist die Menge $X = \{ \frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{N},\ 0 < k < 2^n \}$ nirgends dicht im euklidischen Raum $\mathbb{R}$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Der Abschluss ist $\overline{X} = [0, 1]$, das Innere davon ist $\overline{X}^\circ = \,]0, 1[\, \neq \emptyset$.

2

3E. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Ist f dann surjektiv?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Dank Borsuk–Ulam ist $\deg(f)$ ungerade und somit f surjektiv.

2

3F. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Räume mit der indiskreten Topologie.
Ist dann auch die Produkttopologie auf $X \times Y$ indiskret?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Wir haben $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y\}$. Eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist demnach $\emptyset \times \emptyset$, $\emptyset \times Y$, $X \times \emptyset$ und $X \times Y$. Die erzeugte Topologie ist demnach $\{\emptyset, X \times Y\}$.

2

Aufgabe 4. *Diagonalisierbar und trigonalisierbar* (18 Punkte)

4A. In $\mathbb{R}[X]^1_2 = \{\, X^2 + pX + q \mid p, q \in \mathbb{R} \,\}$ ist $N = \{\, F \in \mathbb{R}[X]^1_2 \mid \forall x \in \mathbb{R} : F(x) \neq 0 \,\}$ offen?

$\boxed{\text{X}}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Begründung:

Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{R}[X]^1_2 \to \mathbb{R} : X^2 + pX + q \mapsto 4p - q^2$ ist stetig.
Dank Mitternachtsformel gilt $N = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$.

Erläuterung: Diese Tatsache ist auf anderen Wegen nur schwer zu sehen. Mit der richtigen Sichtweise ist es ganz leicht: Unter einer stetigen Abbildung ist das Urbild jeder offenen Menge selbst wieder offen.

2

4B. Die Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ der (über $\mathbb{R}$ *trigonalisierbaren*) Matrizen A, deren charakteristisches Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_2$ in $\mathbb{R}$–Linearfaktoren zerfällt, ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Beweis:

Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{R}[X]^1_2 \to \mathbb{R} : X^2 + pX + q \mapsto 4p - q^2$ ist eine Polynomfunktion, ebenso die beiden Koeffizienten von $\chi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}[X]^1_2 : A \mapsto \chi_A = \det(X - A)$. Insbesondere sind diese Abbildungen stetig.

Dank Mitternachtsformel gilt $T = (\Delta \circ \chi)^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, also ist T abgeschlossen.

Erläuterung: Wer es konkret ausrechnen will, in kleiner Dimension ist dies explizit möglich:
Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ und $\Delta(\chi_A) = (a-d)^2 + 4bc$.

3

4C. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Teilmenge der (hier *separabel* genannten) Matrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerten (in $\mathbb{C}$). Dann ist S offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Beweis:

Auch die Komposition $f = \Delta \circ \chi : \mathbb{R}[X]^1_2 \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktionen.

Es gilt $S = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Demnach ist S offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Erläuterung: Das ist eine Eigenschaft jeder Polynomfunktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$:
Im Falle $f \neq 0$ ist die Nichtnullstellenmenge offen und dicht (und hat volles Lebesgue–Maß).

3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Menge der über $\mathbb{R}$ diagonalisierbaren Matrizen.

4D. Ist D in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ offen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

In jeder ε–Umgebung von $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in D$ liegt $\left(\begin{smallmatrix} a & \varepsilon/2 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \notin D$.

2

4E. Ist D in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ abgeschlossen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

In jeder ε–Umgebung von $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \notin D$ liegt $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a+\varepsilon/2 \end{smallmatrix}\right) \in D$.

2

4F. Zeigen Sie $\overline{D} = T$.

Beweis:

Es gilt $D \subseteq T$, und T ist abgeschlossen, also $\overline{D} \subseteq T$.

Sei umgekehrt $A \in T \setminus D$. Wir bringen A in Jordanform $J = P^{-1}AP$.
In jeder Umgebung von J liegt eine diagonalisierbare Matrix dank 4E.
Dasselbe gilt also auch für $A = PJP^{-1}$. Demnach gilt $A \in \overline{D}$.

Erläuterung: Je nachdem, wie speziell oder allgemein man 4E oben begründet hat, muss man hier eventuell noch mehr sagen. Die hilfreiche Zwischenfrage hilft zur Entlastung.

3

4G. Zeigen Sie $D^\circ = S \cap T$.

Beweis:

Es gilt $D \supseteq S \cap T$, und $S \cap T$ ist offen, also $D^\circ \supseteq S \cap T$.

Sei umgekehrt $A \in D^\circ$. Es gilt $D^\circ \subseteq D \subseteq T$.
Angenommen, $A \notin S$. Dann besitzt A zwei gleiche Eigenwerte,
liegt also nicht im Inneren von D dank 4D. Demnach gilt auch $A \in S$.

Erläuterung: Je nachdem, wie speziell oder allgemein man 4D oben begründet hat, muss man hier eventuell noch mehr sagen. Die hilfreiche Zwischenfrage hilft zur Entlastung.

3

Aufgabe 5. *Kompaktheit* (14 Punkte)

5A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subseteq Y$ kompakt?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel: Sei $B = f(A)$ die Bildmenge.

Beweis: Sei $B \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen V_i in Y.
Da f stetig ist, ist das Urbild $U_i = f^{-1}(V_i)$ in X offen für jedes $i \in I$.

Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ in X.
Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Aus $f(U_i) \subseteq V_i$ folgt $B \subseteq f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.
Somit wird B überdeckt durch eine endliche Teilfamilie von $(V_i)_{i\in I}$.

$\overline{3}$

5B. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Beweis: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.

Da X kompakt ist, ist A kompakt (2E).

Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (5A).

Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2F).

Erläuterung: Das ist das berühmte Kompakt–Hausdorff–Kriterium.
Es hat uns in der Topologie bereits überabzählbar oft geholfen.

$\overline{3}$

Im Folgenden seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und Y kompakt.

5C. Sei W eine Umgebung von $\{x\} \times Y$ im Produktraum $X \times Y$. Beweisen Sie das Tubenlemma: Es existiert $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.

Beweis:

Zu jedem $y \in Y$ existieren $U_y \in \mathcal{T}_X, V_y \in \mathcal{T}_Y$ mit $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W$, dank Produkttopologie.

Wegen $y \in V_y$ gilt $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$.

Dank Kompaktheit von Y gibt es $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ mit $Y = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$.

Wir setzen $U := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \dots \cap U_{y_n} \in \mathcal{T}_X$.

Wegen $x \in U_y$ für alle $y \in Y$ gilt $x \in U$. Wie gewünscht gilt:

$$\begin{aligned} U \times Y &= U \times (V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}) \\ &= (U \times V_{y_1}) \cup (U \times V_{y_2}) \cup \dots \cup (U \times V_{y_n}) \\ &\subseteq (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup (U_{y_2} \times V_{y_2}) \cup \dots \cup (U_{y_n} \times V_{y_n}) \subseteq W \end{aligned}$$

Erläuterung: Das ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Andererseits wurde die Technik im Semester zweimal behandelt: So haben wir in der Vorlesung die Kompaktheit von Produkträumen bewiesen. Das Tubenlemma war dann eine schriftliche Hausaufgabe.

4

5D. Zeigen Sie damit: Die Projektion $p : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ ist abgeschlossen.

Beweis:

Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Wir zeigen: $p(A) \subseteq X$ ist abgeschlossen, also $X \smallsetminus p(A)$ offen.

Sei $x \in X \smallsetminus p(A)$. Dann ist $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y) \smallsetminus A =: W$, also ist W eine offene Umgebung von $\{x\} \times Y$. Dank Tubenlemma 5C gibt es $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq (X \times Y) \smallsetminus A$.

Es folgt $x \in U$ und $U \subseteq X \smallsetminus p(A)$. Somit ist $X \smallsetminus p(A)$ offen, also $p(A)$ abgeschlossen.

Erläuterung: Die Lösung ist leicht, wenn man sie kennt, jedoch knifflig, wenn man die Frage zum ersten Mal sieht. Zu Ihrer Entlastung war auch dies zuvor eine schriftliche Hausaufgabe.

4

Aufgabe 6. *Quotientenräume* (6 Punkte)

Auf $Z = \mathbb{N} \times [0,1]$ seien die Äquivalenzrelationen $\sim$ und $\approx$ erzeugt von $(a,1) \sim (a+1,0)$ bzw. $(a,0) \approx (a+1,0)$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Seien $X = Z/_\sim$ und $Y = Z/_\approx$ die Quotientenräume.

6A. Genau einer der Räume $A \in \{X, Y\}$ ist homöomorph zu einem euklidischen Teilraum. Nennen Sie A und einen Homöomorphismus $h : A \xrightarrow{\sim} T$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Raum und Homöomorphismus:

Der Raum $A = X$ ist homöomorph zu $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$ vermöge $h : X \to \mathbb{R} : [a,t] \mapsto a + t$.

Erläuterung: Das ist anschaulich plausibel. Die ausführliche Konstruktion ist eine gute Übung!

Auf $Z = \mathbb{N} \times [0,1]$ ist $g : Z \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (a,t) \mapsto a + t$ wohldefiniert und stetig. Genau dann gilt $g(a,t) = g(b,s)$, wenn $(a,t) \sim (b,s)$. Somit induziert g auf dem Quotienten $X = Z/_\sim$ die stetige Bijektion h. Umgekehrt konstruieren wir $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ zunächst stückweise durch $f_a : [a, a{+}1] \to Z : a{+}t \mapsto (a,t)$. Dies ist stetig und induziert $k_a : [a, a{+}1] \to X : a{+}t \mapsto (a,t)$. Dank Verklebelemma erhalten wir daraus $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$. Nach Konstruktion gilt $k \circ h = \mathrm{id}_X$ und $h \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$, also ist $(h,k) : Z \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Homöomorphismuspaar.

2

6B. Der andere Raum $B \in \{X, Y\}$ lässt sich nicht in $\mathbb{R}^n$ einbetten. Beweisen Sie dies!

Hindernis und Nachweis:

Der Raum Y ist nicht erstabzählbar.

Sei U_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung des Punktes $a = [(0,0)]$ in Y.
Dann ist $\tilde{U}_n = q^{-1}(U_n)$ offen in Z und enthält die Menge $A = \mathbb{N} \times \{0\}$.

Wir wählen $0 < s_n < 1$, sodass $\tilde{V}_n := \{n\} \times [0, s_n[\subsetneq \tilde{U}_n$ gilt.
Damit ist $\tilde{V} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{V}_n$ offen in Z und $V := q(\tilde{V})$ offen in Y, denn $q^{-1}(V) = \tilde{V}$.

Wir erhalten so eine offene Umgebung V von a in Y mit $U_n \not\subseteq V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Erläuterung: Diese Konstruktion kennen Sie aus den Hausaufgaben zum unendlichen Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$, hier in der Variante als unendlicher Stern $(\mathbb{N} \times [0,1]) /\!\!/ (\mathbb{N} \times \{0\})$.

Benötigt / geübt / gefragt wird hier vor allem die Quotiententopologie: Eine Teilmenge $V \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $q^{-1}(V) \subseteq \tilde{X}$ offen ist. Die Konstruktion von $\tilde{V}$ ist ein beliebtes Diagonalargument und wurde als Hausaufgabe geübt.

4

Aufgabe 7. *Funktoren* (6 Punkte)

7A. Überführt der Funktor $F = [\mathbb{S}^1, -] : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ jede Identifizierung in eine Surjektion?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Das Zusammenschlagen des Randes $g : \mathbb{D}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{D}^1 /\!\!/ \mathbb{S}^0 \cong \mathbb{S}^1$ ist eine Identifizierung, aber $F(g) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^1] \to [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ ist keine Surjektion, da $[\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^1] = \{*\}$ und $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$.

Erläuterung: Sie kennen die Identifizierung g aus der Vorlesung. Wiederholung: Machen Sie sich eine Skizze, schreiben Sie die expliziten Formeln aus, und wiederholen Sie sorgsam alle nötigen Argumente, insbesondere das Kompakt–Hausdorff–Kriterium.

$\overline{}$ 2

7B. Eine *Retraktion* in einer Kategorie $\texttt{C}$ ist ein rechtsinvertierbarer Morphismus. Überführt jeder (kovariante) Funktor $F : \texttt{C} \to \texttt{D}$ jede Retraktion in eine Retraktion?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Gegeben sei $(i, r) : X \rightleftarrows Y$, also $i : X \to Y$ und $r : Y \to X$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$. Funktorialität garantiert $F(r) \circ F(i) = F(r \circ i) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, also $(F(i), F(r)) : F(X) \rightleftarrows F(Y)$.

Erläuterung: Wir betrachten hier kovariante Funktoren. Jeder Funktor erhält Retraktionen. Ebenso: Jeder Funktor erhält Isomorphismen. Sie kennen dies aus nahezu allen Anwendungen der Vorlesung, Übung und (Schein-)Klausuren. Für Einbettungen oder Identifizierungen allein gilt nichts dergleichen, wie die vorige Aufgabe kontrastiert.

$\overline{}$ 2

7C. Existiert ein Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ mit $F(\mathrm{O}_2\,\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ und $F(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}) = \{0\}$?

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Hindernis:

In $\texttt{Top}$ haben wir $(i, r) : \mathrm{O}_2\,\mathbb{R} \rightleftarrows \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$, aber in $\texttt{Set}$ gilt nicht $\mathbb{Z}/2 \rightleftarrows \{0\}$. Somit ist $(F(i), F(r)) : F(\mathrm{O}_2\,\mathbb{R}) \rightleftarrows F(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R})$ unmöglich, also kann es F nicht geben.

Erläuterung: Ein Funktor muss nicht nur Objekte auf Objekte abbilden, sondern auch Morphismen auf Morphismen. Letzteres fehlt hier, und kann wie gesehen nicht ergänzt werden: Hier ist die vorliegende Retraktion ein Hindernis für den erhofften Funktor. Im Fixpunktsatz von Brouwer ist umgekehrt der vorliegende Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ mit $F(\mathbb{D}^n) = \{*\}$ und $F(\mathbb{S}^{n-1}) \ncong \{*\}$ ein Hindernis für die Existenz einer Retraktion $(i, r) : \mathbb{S}^{n-1} \rightleftarrows \mathbb{D}^n$.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 8. *Stetige Multiplikation* (8 Punkte)

8A. Sei $(G, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ eine Gruppe, darin $\{e\}$ abgeschlossen und $\sigma : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a^{-1}b$ stetig bezüglich Produkttopologie. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist hausdorffsch.

Beweis:

Seien $a \neq b$ in G, also $\sigma(a, b) = a^{-1}b \in G \smallsetminus \{e\}$. Dank Stetigkeit von σ ist $\sigma^{-1}(G \smallsetminus \{e\})$ offen in der Produkttopologie. Demnach existieren offene Umgebungen $a \in U \in \mathcal{T}$ und $b \in V \in \mathcal{T}$ mit $U \times V \subseteq \sigma^{-1}(G \smallsetminus \{e\}) \subseteq \{\, (x, y) \in G \times G \mid x \neq y \,\}$, also $U \cap V = \emptyset$.

Erläuterung: Das ist ein schönes Anwendungsbeispiel der Produkttopologie. Wie kommt man darauf? Durch selbständiges Knobeln oder die Vorlesung zu topologischen Gruppen (§E7), Siehe das schöne Ende der Vorlesung Top.10 vom 10.05.2024.

3

8B. Sei $\mu : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ stetig mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch ist. *Hinweis:* Produkt von zwei geeigneten Homotopien.

Beweis:

Zu je zwei Schleifen α, β in (G, e) haben wir Homotopien $H : \alpha * e \sim e * \alpha$ und $K : e * \beta \sim \beta * e$. Diese multiplizieren wir (stetig!) zur Homotopie $H \cdot K : \alpha * \beta \sim \beta * \alpha$. Demnach ist die Gruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch.

Erläuterung: Ich habe dies ausführlich erklärt in der Vorlesung Top.25 vom 09.07.2024, inklusiver schöner Graphik zur Anschauung, Verständnis, Merkhilfe. Hier genügte die kurze und knappe Formel zur Konstruktion.

3

8C. Existiert auf dem topologischen Raum $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ ein stetiges Produkt $\mu : X \times X \to X$ mit einem neutralen Element $e \in X$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, e) = \langle\, a, b \mid - \,\rangle$ ist hier frei vom Rang 2. Sie also insbesondere nicht abelsch. Ein stetiges Produkt (X, μ, e) widerspräche 8B.

Erläuterung: Ich habe dies ausführlich erklärt in der Vorlesung Top.25 vom 09.07.2024. Topologisch gruppesierbar sind hingegen $\mathbb{C}$ dank $(\mathbb{C}, +, 0)$ und $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ dank $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$. Dies gilt nicht mehr, sobald wir aus $\mathbb{C}$ zwei oder mehr Punkte entfernen.

2