Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/14	/17	/10	/9	/15	/10	/76

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (14 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Jeder normierte Vektorraum ist zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Jeder metrische Raum lässt sich in $[0,1]^{\mathbb{N}}$ einbetten. ☐ Ja ☐ Nein

Seien X und Y topologische Räume.

2C. Ist X metrisierbar, so ist X regulär (T_1&T_3) und zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Ist X zweitabzählbar und regulär (T_1&T_3), so ist X metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Der Raum $\mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie erfüllt T_1. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Der Raum $\mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie erfüllt T_2. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Jeder Quotient eines T_2–Raums ist ein T_2-Raum. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jedes Produkt von T_2–Räumen ist ein T_2-Raum. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Ist Y hausdorffsch und $B \subseteq Y$ kompakt, so ist B abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

Seien M und N Mannigfaltigkeiten mit Rand ∂M bzw. ∂N.

2K. Aus $\partial M \cong \partial N$ folgt $M \cong N$. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Aus $M \cong N$ folgt $\partial M \cong \partial N$. ☐ Ja ☐ Nein

2M. Der Raum $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ist zusammenziehbar. ☐ Ja ☐ Nein

2N. Der Raum $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ ist lokal wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit* (17 Punkte)

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subseteq Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

3B. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

3C. Wir betrachten die Räume $X = [0,1[\cup]2,3[$ und $Y = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $Z = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.
Nennen Sie jeweils zur Einpunktkompaktifizierung einen homöomorphen euklidischen Teilraum.

homöomorphe euklidische Teilräume:

3

Im Folgenden seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und Y kompakt.

3D. Sei W eine Umgebung von $\{x\} \times Y$ im Produktraum $X \times Y$. Beweisen Sie das Tubenlemma:
Es existiert $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.

Beweis:

4

3E. Weiterhin sei Y kompakt. Zeigen Sie mit Hilfe des Tubenlemmas:
Die Projektion $p : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ ist abgeschlossen.

Beweis:

4

Aufgabe 4. *Simplizialkomplexe* (10 Punkte)

4A. Der Simplizialkomplex $K = \langle\, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{c,d,e\}, \{d,e,f\}, \{a,e,f\}, \{a,b,f\} \,\rangle$ triangulliert einen vertrauten Raum. Benennen Sie diesen.

Skizze und übliche Bezeichnung:

2

4B. Sei K ein Simplizialkomplex mit kompaktem Polyeder $|K|$. Ist dann K endlich?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

4C. Ist $X = \{\, 0, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\} \times [0,1]$ triangulierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Triangulierung oder Hindernis:

2

4D. Seien X und Y kompakt und triangulierbar. Ist $[X,Y] = \mathscr{C}(X,Y)/\text{Homotopie}$ abzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

Aufgabe 5. *Quotient durch Zusammenschlagen* (9 Punkte)

Wir betrachten den Raum $\tilde{X} = \mathbb{N} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und den Quotienten $q : \tilde{X} \twoheadrightarrow X = \tilde{X} /\!\!/ A$ durch Zusammenschlagen von $A = \mathbb{N} \times \{0,1\} \subseteq \tilde{X}$ zum Punkt $a \in X$.

5A. Zeigen Sie, dass der Raum X nicht erstabzählbar ist.

Beweis:

3

5B. Lässt sich der Raum X in die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten?

☐ Ja ☐ Nein. Einbettung oder Hindernis:

2

5C. Ist der Raum X triangulierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Triangulierung oder Hindernis:

2

5D. Ist der Raum X kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 6. *Homotopie und Abbildungsgrad* (15 Punkte)

6A. Wir betrachten $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \text{ in } \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertierbar}\}$. Nennen Sie die Anzahl der Homotopieklassen in $[\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R}]$ und je ein nicht-konstantes Polynom in a, b, c, d als Repräsentanten.

Anzahl und Repräsentanten:

3

6B. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Ist f dann surjektiv?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

6C. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und fixpunktfrei. Existiert dann eine Homotopie $K : f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$?

☐ Ja ☐ Nein. Homotopie oder Hindernis:

2

6D. Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ stetig. Existiert immer mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(x) \in \{\pm x\}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

6E. Sei $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ stetig. Existiert immer mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^3$ mit $f(x) \in \{\pm x\}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

6F. Sei $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Vektorfeld, tangential gemäß $\langle\, x \mid v(x) \,\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, und ohne Nullstellen. Konstruieren Sie eine Homotopie $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ für geeignetes f.

Konstruktion:

2

6G. Folgern Sie den Satz vom gekämmten Igel: Ist n gerade, so hat jedes tangentiale, stetige Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis:

2

Aufgabe 7. *Flächen* (10 Punkte)

Sei K eine simpliziale Fläche, geschlossen, zusammenhängend, mit f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Dreiecken, also Euler–Charakteristik $\chi = f_0 - f_1 + f_2$. Dann gilt die Heawood–Ungleichung

$$f_0 \geq \frac{1}{2}\Big[7 + \sqrt{49 - 24\chi}\Big].$$

7A. Lässt sich die Kleinsche Flasche F mit nur 6 Ecken triangulieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7B. Nennen Sie zur reell-projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$ einen triangulierenden Simplizialkomplex P mit minimaler Eckenzahl.

Zeichnung (beschriftete Ecken sowie Kanten und Dreiecke):

2

Wir betrachten den Volltorus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ und die aufgedickte Torusfläche $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$.

7C. Sind S und T Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand)?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7D. Lassen sich S und T durch ihre Euler–Charakteristiken unterscheiden?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7E. Sind die Räume S und T homöomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.