Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/14	/17	/10	/9	/15	/10	/76

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie sollen Fleiß während des Semesters und Sorgfalt in der Vorbereitung belohnen. Das sind leichte Punkte — leider oft vergeudet. Falls Sie diese Weisheit *vor* Ihrer eigenen Klausur lesen: Nutzen Sie Ihre Übungen!

Vorwort zur Musterlösung: Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (14 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Jeder normierte Vektorraum ist zweitabzählbar. ☐ Ja ☒ Nein

2B. Jeder metrische Raum lässt sich in $[0,1]^{\mathbb{N}}$ einbetten. ☐ Ja ☒ Nein

Seien X und Y topologische Räume.

2C. Ist X metrisierbar, so ist X regulär (T_1&T_3) und zweitabzählbar. ☐ Ja ☒ Nein

2D. Ist X zweitabzählbar und regulär (T_1&T_3), so ist X metrisierbar. ☒ Ja ☐ Nein

2E. Der Raum $\mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie erfüllt T_1. ☒ Ja ☐ Nein

2F. Der Raum $\mathbb{N}$ mit koendlicher Topologie erfüllt T_2. ☐ Ja ☒ Nein

2G. Jeder Quotient eines T_2–Raums ist ein T_2-Raum. ☐ Ja ☒ Nein

2H. Jedes Produkt von T_2–Räumen ist ein T_2-Raum. ☒ Ja ☐ Nein

2I. Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt. ☒ Ja ☐ Nein

2J. Ist Y hausdorffsch und $B \subseteq Y$ kompakt, so ist B abgeschlossen. ☒ Ja ☐ Nein

Seien M und N Mannigfaltigkeiten mit Rand ∂M bzw. ∂N.

2K. Aus $\partial M \cong \partial N$ folgt $M \cong N$. ☐ Ja ☒ Nein

2L. Aus $M \cong N$ folgt $\partial M \cong \partial N$. ☒ Ja ☐ Nein

2M. Der Raum $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ist zusammenziehbar. ☐ Ja ☒ Nein

2N. Der Raum $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ ist lokal wegzusammenhängend. ☒ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit* (17 Punkte)

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subseteq Y$ kompakt?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel: Sei $B = f(A)$ die Bildmenge.

Beweis: Sei $B \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen V_i in Y.
Da f stetig ist, ist das Urbild $U_i = f^{-1}(V_i)$ in X offen für jedes $i \in I$.

Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ in X.
Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Aus $f(U_i) \subseteq V_i$ folgt $B \subseteq f(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f(U_{i_n}) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$.
Somit wird B überdeckt durch eine endliche Teilfamilie von $(V_i)_{i \in I}$.

3

3B. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Beweis: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.

Da X kompakt ist, ist A kompakt (2I).

Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (3A).

Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2J).

3

3C. Wir betrachten die Räume $X = [0,1[\,\cup\,]2,3[$ und $Y = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $Z = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Nennen Sie jeweils zur Einpunktkompaktifizierung einen homöomorphen euklidischen Teilraum.

homöomorphe euklidische Teilräume:

$\hat{X} \cong \mathbb{S}^1 \cup [(1,0),(2,0)] \subseteq \mathbb{R}^2$

$\hat{Y} \cong \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{S}^1 + (2,0))$

$\hat{Z} \cong$ Rotationsfläche von $\mathbb{S}^1 + (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ um die x–Achse im $\mathbb{R}^3$.

Erläuterung: Zur Vereinfachung war hier nur der Raum gefragt, nicht die Abbildung. Das wäre die richtige Frage und didaktisch besser, leider auch aufwändiger. Übung!

3

Im Folgenden seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und Y kompakt.

3D. Sei W eine Umgebung von $\{x\} \times Y$ im Produktraum $X \times Y$. Beweisen Sie das Tubenlemma: Es existiert $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.

Beweis:

Zu jedem $y \in Y$ existieren $U_y \in \mathcal{T}_X, V_y \in \mathcal{T}_Y$ mit $(x,y) \in U_y \times V_y \subseteq W$, dank Produkttopologie.

Wegen $y \in V_y$ gilt $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$.

Dank Kompaktheit von Y gibt es $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ mit $Y = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.

Wir setzen $U := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n} \in \mathcal{T}_X$.

Wegen $x \in U_y$ für alle $y \in Y$ gilt $x \in U$. Wie gewünscht gilt:

$$\begin{aligned} U \times Y &= U \times (V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}) \\ &= (U \times V_{y_1}) \cup (U \times V_{y_2}) \cup \cdots \cup (U \times V_{y_n}) \\ &\subseteq (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup (U_{y_2} \times V_{y_2}) \cup \cdots \cup (U_{y_n} \times V_{y_n}) \subseteq W \end{aligned}$$

Erläuterung: Das ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Andererseits wurde die Technik im Semester zweimal behandelt: So haben wir in der Vorlesung die Kompaktheit von Produkträumen bewiesen. Das Tubenlemma war dann eine schriftliche Hausaufgabe.

4

3E. Weiterhin sei Y kompakt. Zeigen Sie mit Hilfe des Tubenlemmas:
Die Projektion $p : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ ist abgeschlossen.

Beweis:

Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass $p(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist, das heißt, $X \smallsetminus p(A)$ ist offen.

Sei $x \in X \smallsetminus p(A)$. Dann ist $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y) \smallsetminus A =: W$, also ist W eine offene Umgebung von $\{x\} \times Y$. Dank Tubenlemma 3D gibt es $U \in \mathcal{T}_X$ mit $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq (X \times Y) \smallsetminus A$.

Es folgt $x \in U$ und $U \subseteq X \smallsetminus p(A)$. Somit ist $X \smallsetminus p(A)$ offen, also $p(A)$ abgeschlossen.

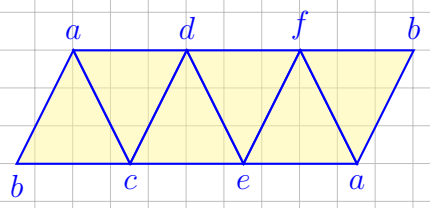
Erläuterung: Die Lösung ist leicht, wenn man sie kennt, jedoch knifflig, wenn man die Frage zum ersten Mal sieht. Zu Ihrer Entlastung war auch dies zuvor eine schriftliche Hausaufgabe.

4

Aufgabe 4. *Simplizialkomplexe* (10 Punkte)

4A. Der Simplizialkomplex $K = \langle \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{c,d,e\}, \{d,e,f\}, \{a,e,f\}, \{a,b,f\} \rangle$ trianguliert einen vertrauten Raum. Benennen Sie diesen.

Skizze und übliche Bezeichnung:



Es handelt sich um das allseits beliebte Möbiusband $F^-_{0,1}$.

Erläuterung: Ähnliche Fragen haben Sie in den wöchentlichen Quizzen geübt.

2

4B. Sei K ein Simplizialkomplex mit kompaktem Polyeder $|K|$. Ist dann K endlich?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die offenen Eckensterne $\mathring{\mathrm{st}}_K(a)$ mit $a \in \Omega$ überdecken das Polyeder $|K|$.

Der Eckenstern $\mathring{\mathrm{st}}_K(a)$ enthält außer a keine weitere Ecke, kurz $\mathring{\mathrm{st}}_K(a) \cap \Omega = \{a\}$.

Daher besitzt die Überdeckung $(\mathring{\mathrm{st}}_K(a))_{a\in\Omega}$ keine echte Teilüberdeckung.

Dank Kompaktheit von $|K|$ muss Ω endlich sein.

Erläuterung: Eine schöne Frage mit eleganter Antwort. Auch dies war eine Hausaufgabe.

3

4C. Ist $X = \{\, 0, 2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \,\} \times [0,1]$ triangulierbar?

☐ Ja ☒ Nein. Triangulierung oder Hindernis:

Der Raum X ist nicht lokal-weg/zusammenhängend.

Alternative: X ist kompakt dank Heine–Borel. Wäre X triangulierbar, $X \cong |K|$, dann wäre der Simplizialkomplex K endlich (4B). Doch X hat unendlich viele Komponenten.

Erläuterung: Offensichtlich ist X Vereinigung der Intervalle $\{a\} \times [0,1]$. Viele haben daher den affinen Simplizialkomplex $K = \langle \{(0,0),(0,1)\}, \{(2^{-k},0),(2^{-k},1)\} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ vorgeschlagen. Dieser liefert zwar die Menge X, jedoch keine Triangulierung: Die Teilraumtopologie von X in $\mathbb{R}^2$ ist nicht die simpliziale Topologie. Genauer: Das Intervall $\{0\} \times [0,1]$ ist offen in der simplizialen Topologie, aber nicht in der Teilraumtopologie! Sie kennen solche Beispiele aus der Vorlesung, etwa die simpliziale Sinuskurve des Topologen. Als hinreichendes Kriterium kennen Sie die lokale Endlichkeit, diese ist hier offensichtlich nicht gegeben.

2

4D. Seien X und Y kompakt und triangulierbar. Ist $[X,Y] = \mathscr{C}(X,Y)/\text{Homotopie}$ abzählbar?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Seien $X \cong |K|$ und $Y \cong |L|$ Triangulierungen.
Die Simplizialkomplexe K und L sind endlich dank 4B.

Jede stetige Abbildung $f : |K| \to |L|$ ist homotop zu $|\varphi|$ mit einer simplizialen Abbildung $\varphi : \beta^n K \to L$ nach hinreichend feiner baryzentrischer Unterteilung $n \in \mathbb{N}$.

Zu festem n gibt es nur endlich viele simpliziale Abbildungen.
Vereinigt über alle n sind dies nur abzählbar viele.

Erläuterung: Eine weitere schöne Hausaufgabe. Etwas allgemeiner genügt, dass $X \cong |K|$ und $Y = |L|$ triangulierbar sind mit K endlich und L abzählbar. Übung zur Wiederholung!

3

Aufgabe 5. *Quotient durch Zusammenschlagen* (9 Punkte)

Wir betrachten den Raum $\tilde{X} = \mathbb{N} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und den Quotienten $q : \tilde{X} \twoheadrightarrow X = \tilde{X} /\!\!/ A$ durch Zusammenschlagen von $A = \mathbb{N} \times \{0,1\} \subseteq \tilde{X}$ zum Punkt $a \in X$.

5A. Zeigen Sie, dass der Raum X nicht erstabzählbar ist.

Beweis:

Sei U_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung von a in X.
Dann ist $\tilde{U}_n = q^{-1}(U_n)$ offen in $\tilde{X}$ und enthält $A = \mathbb{N} \times \{0,1\}$.

Wir wählen $0 < s_n < t_n < 1$, sodass $\tilde{V}_n := \{n\} \times ([0, s_n[\cup]t_n, 1]) \subsetneq \tilde{U}_n$ gilt.
Damit ist $\tilde{V} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{V}_n$ offen in $\tilde{X}$ und $V := q(\tilde{V})$ offen in X, denn $q^{-1}(V) = \tilde{V}$.

Wir erhalten so eine offene Umgebung V von a in X mit $U_n \not\subseteq V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Erläuterung: Diese Konstruktion kennen Sie aus den Hausaufgaben zum unendlichen Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$. Dieser Raum ist homöomorph zu X, das haben auch einige in der Klausur erkannt.

Benötigt / geübt / gefragt wird hier vor allem die Quotiententopologie: Eine Teilmenge $V \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $q^{-1}(V) \subseteq \tilde{X}$ offen ist. Die Konstruktion von $\tilde{V}$ ist ein beliebtes Diagonalargument und wurde als Hausaufgabe geübt.

3

5B. Lässt sich der Raum X in die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten?

☐ Ja ☒ Nein. Einbettung oder Hindernis:

Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ ist metrisierbar und somit erstabzählbar.
Das vererbt sich auf jeden Teilraum, doch X ist *nicht* erstabzählbar.

Erläuterung: Hier ist nicht etwa die Dimension 2 zu klein, sondern die lokalen Eigenschaften sind inkompatibel: Dasselbe gilt für jeden euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und allgemein sogar für jeden metrischen Raum. Der Raum X hingegen ist *nicht* metrisierbar.

Auch dieses Phänomen, insbesondere die Nicht-Einbettbarkeit in euklidische Räume, kennen Sie bereits gut vom unendlichen Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$.

2

5C. Ist der Raum X triangulierbar?

[X] Ja [ ] Nein. Triangulierung oder Hindernis:

Eine mögliche affine Triangulierung $|\tilde{K}| \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ ist $\tilde{K} = \langle\, \{a_n, b_n\}, \{b_n, c_n\}, \{c_n, a'_n\} \mid n \in \mathbb{N} \,\rangle$ mit $a_n = (n, 0)$, $b_n = (n, 1/3)$, $c_n = (n, 2/3)$, $a'_n = (n, 1)$. Der Quotient $q : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ liefert die Triangulierung $|K| \xrightarrow{\sim} X$ mit $K = \langle\, \{a, b_n\}, \{b_n, c_n\}, \{c_n, a\} \mid n \in \mathbb{N} \,\rangle$.

Erläuterung: Hier haben einige „Nein“ vermutet, da X nicht erstabzählbar ist. Das ist zwar ein Hindernis für Metrisierbarkeit, aber nicht für Triangulierbarkeit.

2

5D. Ist der Raum X kompakt?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Der Simplizialkomplex K aus 5C ist nicht endlich. Daher ist das Polyeder $|K|$ nicht kompakt (Frage 4B). Somit ist auch $X \cong |K|$ nicht kompakt.

Erläuterung: Alternativ kann man direkt zu X eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung angeben. Versuchen Sie das als Übung! Sie können dazu offene Eckensterne verwenden, also Frage 4B hier erneut beantworten.

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 6. *Homotopie und Abbildungsgrad* (15 Punkte)

6A. Wir betrachten $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} = \{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \text{ in } \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertierbar} \}$. Nennen Sie die Anzahl der Homotopieklassen in $[\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R}]$ und je ein nicht-konstantes Polynom in a, b, c, d als Repräsentanten.

Anzahl und Repräsentanten:

Es gibt genau 4 Homotopieklassen.

Mögliche Repräsentanten sind $A \mapsto \det(A) = ad - bc$ sowie $-\det$ und $+\det^2$ und $-\det^2$.

Erläuterung: Konkrete Repräsentanten kann man auch durch Verklebung stückweise definieren. Polynome bieten sich hier an, insbesondere die Determinante, und sind noch schöner.

Konstruktion: Als erstes sollte man hier erkennen, dass $X = \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ und $Y = \mathrm{GL}_1\,\mathbb{R}$ je aus zwei Wegkomponenten bestehen, genauer $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_2^-\,\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{GL}_1\,\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt $[X, Y] \cong \mathrm{Abb}(\{-,+\}, \{-,+\})$. Ausführlich gilt $\pi_0(\det) : - \mapsto -, + \mapsto +$ und $\pi_0(-\det) : - \mapsto +, + \mapsto -$, sowie $\pi_0(\det^2) : - \mapsto +, + \mapsto +$ und $\pi_0(-\det^2) : - \mapsto -, + \mapsto -$.

Allgemeines Prinzip: Die Räume $X = \bigsqcup \pi_0(X)$ und $Y = \bigsqcup \pi_0(Y)$ seien topologische Summen, das heißt alle Wegkomponenten $A \in \pi_0(X)$ und $B \in \pi_0(Y)$ sind offen, und zudem gelte $[A, B] = \{*\}$. Dann ist die Abbildung $[X, Y] \to \mathrm{Abb}(\pi_0(X), \pi_0(Y))) : f \mapsto \pi_0(f)$ bijektiv.

3

6B. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Ist f dann surjektiv?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Dank Borsuk–Ulam ist $\deg(f)$ ungerade und somit f surjektiv.

2

6C. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und fixpunktfrei. Existiert dann eine Homotopie $K : f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$?

[X] Ja [ ] Nein. Homotopie oder Hindernis:

Da $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt, haben wir die Abbildung

$$K : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : K(t,x) = \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{|(1-t)f(x) + t(-x)|}$$

Sie ist stetig, also eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Erläuterung: Sie kennen diese genial-einfache Konstruktion aus den Übungen und aus der Vorlesung, inklusive schönen Bildern und ausführlichen Erläuterungen zum Satz vom Igel.

2

6D. Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ stetig. Existiert immer mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(x) \in \{\pm x\}$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Gilt $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, so folgt $f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ dank 6C.

Gilt $f(x) \neq -x$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, so folgt genauso $f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Daraus folgt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}}^n) = \deg(f) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$, also n ungerade.

Erläuterung: Per Kontraposition folgt: Ist n gerade, so existiert zu jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mindestens Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$.

2

6E. Sei $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ stetig. Existiert immer mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^3$ mit $f(x) \in \{\pm x\}$?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Abbildung $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 : (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_0, -x_3, x_2)$ ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $f(x) \notin \{\pm x\}$ für alle $x \in \mathbb{S}^3$.

Erläuterung: Dies gelingt genauso in jeder ungeraden Dimension n durch $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (-x_1, x_0, \dots, -x_n, x_{n-1})$. Sie kennen diese Konstruktion aus der Vorlesung; sie zeigt auf jeder Sphäre ungerade Dimension die Existenz eines nirgends-verschwindenden Vektorfeldes. In gerader Dimension greift der Satz vom Igel…

2

6F. Sei $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Vektorfeld, tangential gemäß $\langle\, x \mid v(x) \,\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, und ohne Nullstellen. Konstruieren Sie eine Homotopie $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ für geeignetes f.

Konstruktion:

Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto [x + v(x)]/|x + v(x)|$ ist stetig und fixpunktfrei.

Dank 6C folgt $f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Zudem haben wir $H : \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f$ vermöge $H(t, x) = [x + tv(x)]/|x + tv(x)|$.

Erläuterung: Dank Transitivität der Homotopie-Relation erhalten wir also $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

Alternative: Sie können auch $f(x) \neq -x$ verwenden und daraus $f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ schließend, wie oben. Ich gebe hier die Homotopie H explizit an, denn auch sie ist lehrreich, schön und nützlich.

2

6G. Folgern Sie den Satz vom gekämmten Igel: Ist n gerade, so hat jedes tangentiale, stetige Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis:

Angenommen, v hat keine Nullstelle. Dann erhalten wir $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ dank 6F.

Somit gilt $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$. Daraus folgt, dass n ungerade ist.

Erläuterung: Wir zeigen hier die Kontraposition. Ein Widerspruchsbeweis gelingt genauso.

Fun fact: Auf jeder Sphäre ungerader Dimension n existieren Vektorfelder $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ohne Nullstellen, etwa $v(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (-x_1, x_0, \dots, -x_n, x_{n-1})$. Das wissen Sie noch gut aus der Vorlesung, die dieses wunderschöne Thema angemessen zelebriert hat.

2

Aufgabe 7. *Flächen* (10 Punkte)

Sei K eine simpliziale Fläche, geschlossen, zusammenhängend, mit f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Dreiecken, also Euler–Charakteristik $\chi = f_0 - f_1 + f_2$. Dann gilt die Heawood–Ungleichung

$$f_0 \geq \frac{1}{2}\Big[7 + \sqrt{49 - 24\chi}\Big].$$

7A. Lässt sich die Kleinsche Flasche F mit nur 6 Ecken triangulieren?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

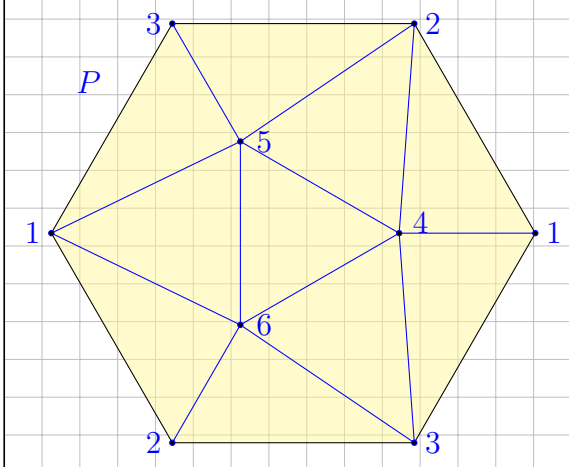
Es gilt $\chi(F) = 0$, somit $f_0 \geq \frac{1}{2}\big[7 + \sqrt{49 - 24\chi}\big] = 7$.

Erläuterung: Tatsächlich lässt sich die Kleinsche Flasche nur mit 8 Ecken triangulieren. Unter allen geschlossenen, zusammenhängenden Flächen ist dies eine von nur drei Ausnahmen; alle anderen lassen sich durch die von Heawood angegebene Eckenzahl triangulieren!

2

7B. Nennen Sie zur reell-projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm\}$ einen triangulierenden Simplizialkomplex P mit minimaler Eckenzahl.

Zeichnung (beschriftete Ecken sowie Kanten und Dreiecke):



Erläuterung: Auch dies ist ein beliebter Klassiker aus Vorlesung, Quiz und alten Klausuren. Wir nutzen den Ikosaederrand K zur Triangulierung $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$. Kontrolle: Für K gilt $f_0(K) = 12$, $f_1(K) = 30$, $f_2(K) = 20$, also $\chi(K) = 6 - 5 + 10 = 2$, wie erwartet.

Der Quotient $P = K/\{\pm 1\}$ ist wiederum ein Simplizialkomplex. Wir erhalten so die ersehnte 6–Ecken–Triangulierung $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2/\{\pm 1\} = \mathbb{RP}^2$ der projektiven Ebene. Kontrolle: Für P gilt $f_0(P) = 6$, $f_1(P) = 15$, $f_2(P) = 10$, also $\chi(P) = 6 - 5 + 10 = 1$, wie es sein soll!

Somit ist $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{RP}^2$ eine Triangulierung. Zudem ist P minimal dank Heawood.

2

Wir betrachten den Volltorus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ und die aufgedickte Torusfläche $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$.

7C. Sind S und T Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand)?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das Produkt von Mannigfaltigkeiten (mit Rand) ist eine Mannigfaltigkeit (mit Rand).

Erläuterung: Die Eigenschaft, lokal-euklidisch zu sein, bleibt bei Produkten erhalten, dank $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$. Die Dimensionen addieren sich dabei. Das gilt auch für topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand, dank $\mathbb{R}^m_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n_{\geq 0} \cong \mathbb{R}^{m+n}_{\geq 0}$ (Winkel geradebiegen).

2

7D. Lassen sich S und T durch ihre Euler–Charakteristiken unterscheiden?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

$\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^2) = 0 \cdot 1 = 0$

$\chi(T) = \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{S}^1) \times \chi(\mathbb{D}^1) = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

Effiziente Berechnung: Die Euler–Charakteristik ist multiplikativ bei Produkten.

Alternative Berechnung: Dank Homotopie-Äquivalenz $T \simeq \mathbb{S}^1$ gilt $\chi(T) = \chi(\mathbb{S}^1) = 0$. Ebenso haben wir $S \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und folgern daraus $\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0$.

Es gilt zwar $S \not\cong T$, sogar $S \not\simeq T$, aber die Euler–Charakteristik genügt dafür nicht.

2

7E. Sind die Räume S und T homöomorph?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Aus $S \cong T$ folgt $\partial S \cong \partial T$ dank Invarianz des Randes (2L).

Wir haben hier $\partial S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ zshgd, aber $\partial T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ unzshgd.

Erläuterung: Für den Rand gilt $\partial(M \times N) = (\partial M) \times N \cup M \times (\partial N)$, aka Leibniz–Formel.

Zur Unterscheidung von kompakten Flächen ist die Euler–Charakteristik sehr nützlich. Für jede kompakte 3–Mannigfaltigkeit M hingegen gilt $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$. Insbesondere hat jede geschlossene 3–Mannigfaltigkeit die Euler–Charakteristik 0. Zu ihrer Unterscheidung taugt die Euler–Charakteristik daher nicht, aber als mögliches Hindernis ist sie weiterhin sinnvoll.

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.