Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

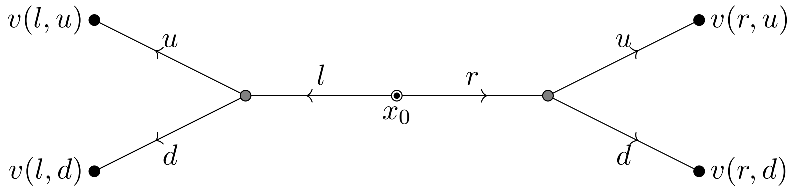
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
/1	/12	/13	/11	/10	/12	/10	/9	/78

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).



2A. Gegeben sei der Baum X wie oben gezeigt mit terminalen Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ Spieler. Jeder Strategievektor s definiert einen Spielverlauf $x_0 \to x_1 \to x_2$ mit $x_1 \in \{l, r\}$ und $x_2 \in \partial X = \{l, r\} \times \{u, d\}$. Ist die folgende Aussage wahr? „Der Strategievektor s definiert bereits dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn in jedem aktiven Zustand x_0 und x_1 *entlang des Spielverlaufs* eine einmalige Abweichung keinen Vorteil bringt.“

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2B. Lässt sich jedes korrelierte Gleichgewicht auch mit öffentlichen Signalen erreichen?
(Das heißt, jeder Spieler empfängt neben seinem eigenen Signal auch die Signale aller anderen.)

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Wir untersuchen die Hintereinanderausführung der folgenden Spiele $f, g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

f :

Alice \ Bob	0	1
0	0, 0	2, -1
1	-1, 2	3, 3

g :

Alice \ Bob	0	1
0	0, 0	2, -1
1	-1, 2	1, 1

2C. Wir spielen zuerst f, dann g. Gilt $\mathrm{PNE}(f * g) = \mathrm{NE}(f) * \mathrm{NE}(g)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2D. Wir spielen zuerst g, dann f. Gilt die Inklusion $\mathrm{PNE}(g * f) \supseteq \mathrm{NE}(g) * \mathrm{NE}(f)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2E. Wir spielen zuerst g, dann f. Gilt die Inklusion $\mathrm{PNE}(g * f) \subseteq \mathrm{NE}(g) * \mathrm{NE}(f)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2

2F. Wir wiederholen unendlich oft das obige Spiel $g : A = \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Auszahlung $u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g(x_n)$, also geometrisch summiert, aber nicht normiert.

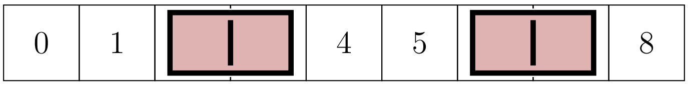
Lässt sich $(2,2)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2

Aufgabe 3. *Sprague–Grundy: eindimensionales Fliesentetris* (13 Punkte)

Alice und Bob spielen auf einem Spielbrett bestehend aus einem Streifen von n Feldern. Sie legen abwechselnd Dominosteine auf das Spielbrett, jeder Stein bedeckt zwei noch freie Felder. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. *Beispiel:* Die Abbildung zeigt das Spielbrett für $n = 9$, auf das bereits zwei Dominosteine auf die Felder $\{2, 3\}$ bzw. $\{6, 7\}$ gelegt wurden.



3A. Sei $\gamma(n)$ die Grundy–Zahl des Spiels mit n Feldern, auf die noch kein Dominostein gelegt wurde. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(n) =$	0	0	1	1		0		1	1	0	

Erklären Sie, wie Sie den Wert $\gamma(6)$ bestimmt haben. *Tipp:* Für anschließende Fragen ist es hilfreich, wenn Sie sich auch Ihre Rechnungen für $\gamma(4)$ und $\gamma(10)$ notieren.

Begründung / Rechenweg für $\gamma(6)$:

5

3B. Ist die folgende Spielsituation eine Gewinnposition?

0		3	4	5	6		9	10	11	12	13	14		17	18

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Ist die folgende Spielsituation eine Gewinnposition?

0	1	2	3		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		18	19	20	21	22	23	

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

3C. In Frage 3B gibt es genau eine Gewinnposition. Nennen Sie hierzu alle Gewinnzüge (als Felder $\{p, p+1\}$, auf die der Dominostein gelegt wird). Begründen Sie Ihre Antwort.

Gewinnzüge:

Begründung:

4

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (11 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	1 \ 2	2 \ 0	1 \ 0	1 \ 1
s_1	0 \ -2	0 \ 2	2 \ 4	0 \ 1

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie Bobs Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.

Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3]$:

Intervall	$0 \le p <$		$< p \le 1$
Antwort			

Eine reine Strategie t von Bob kommt nie als beste Antwort vor. Nennen Sie diese Strategie t, sowie eine gemischte Strategie $t' \in [T]$, die t strikt dominiert:

$t =$ ☐ und $t' =$ ☐

—/7

4B. Bestimmen Sie in jedem dieser drei Fälle alle Nash–Gleichgewichte $(s,t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

4

Aufgabe 5. *Sind Lehrpreise vernünftig?* (10 Punkte)

Jede Dozent:in $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ mit $n \geq 2$ investiert in die Vorbereitung ihrer Lehre den Aufwand $b_i \in \{0, 1, \dots, 200\}$, gleichzeitig, verdeckt. Die beste Lehre, mit maximalem Aufwand b_i, erhält einen Lehrpreis im Wert von 49.80, bei Gleichstand wird unter den besten geteilt.

5A. Geben Sie die Gewinnfunktion $u : \{0, 1, \dots, 200\}^n \to \mathbb{R}^n$ als explizite Formel an:

Formel:

1

Sie spielen die Dozent:in $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ der höchste Konkurrenzaufwand.

5B. Angenommen, es gilt $c_i \leq 48$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

3

5C. Angenommen, es gilt $c_i \geq 49$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

3

5D. Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels $u : \{0, 1, \ldots, 200\}^n \to \mathbb{R}^n$ oder zeigen Sie, dass es keine Nash–Gleichgewichte gibt.

Begründete Lösung:

$\overline{3}$

Aufgabe 6. *Bayes-Spiele: Grünschnabel gegen Platzhirsch* (12 Punkte)

Die Platzhirsch GmbH und die Grünschnabel & Co KG produzieren dasselbe Zeug. Platzhirsch will ein neues Fabrikgebäude bauen (B, sonst NB). Mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ sind die Baukosten hoch, sonst niedrig. Platzhirsch erfährt die Baukosten, hält sie aber vor Grünschnabel geheim. Grünschnabel möchte in den Markt eintreten (E, sonst NE), ist aber unsicher, ob das profitabel ist. Die Auszahlungen im Falle hoher bzw. niedriger Baukosten sind wie folgt:

H = hohe Baukosten

u^H :

Platz \ Grün	E	NE
B	-2 0	0 12
NB	6 12	0 16

N = niedrige Baukosten

u^N :

Platz \ Grün	E	NE
B	-2 8	0 20
NB	6 12	0 16

6A. Geben Sie für die Harsanyi–Transformierte $\hat{u} : \hat{S}_P \times \hat{S}_G \to \mathbb{R}^2$ explizit die (endlichen) Strategiemengen und die Auszahlungsmatrix an.

Strategiemengen und Auszahlungsmatrix:

6

6B. Bestimmen Sie alle gemischten Bayes–Gleichgewichte, d.h. Nash–Gleichgewichte von $\bar{\bar{u}}$.

Antwort mit Begründung:

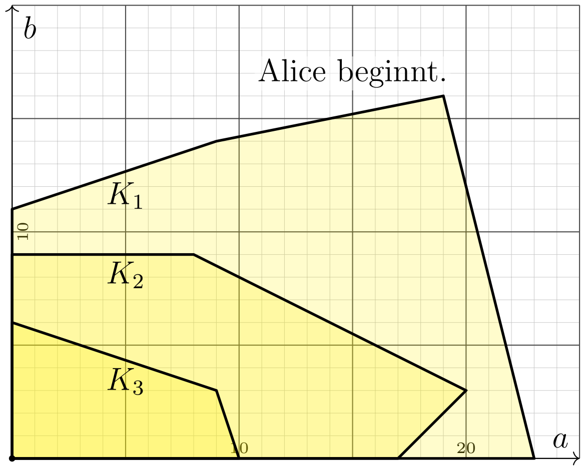
3

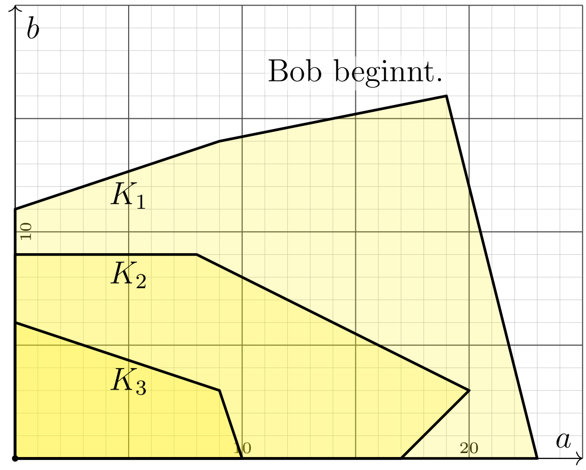
6C. Geben Sie nun alle Spieler und ihre Strategiemengen im Typenmodell $\check{u}$ an sowie alle Nash–Gleichgewichte von $\check{u}$.

3

Aufgabe 7. *Verhandeln durch alternierende Angebote* (10 Punkte)

Alice und Bob verhandeln durch alternierende Angebote $(a, b) \in K_n \subset \mathbb{R}^2$ in Runde $n = 1, 2, 3$.





Dabei ist a der Gewinn für Alice und b der Gewinn für Bob. Die Verhandlungsmenge $K_1 \supset K_2 \supset K_3$ schrumpft wie gezeigt. Ist Alice in Runde n am Zug, so schlägt sie $(a, b) \in K_n$ vor; nimmt Bob dies an, so ist (a, b) die Auszahlung; andernfalls geht das Spiel in die nächste Runde $n + 1$ mit vertauschten Rollen. Nach dreimaliger Ablehnung scheitern die Verhandlungen mit der Auszahlung $(0, 0)$. Bei Indifferenz entscheiden sich die Spieler für das schnellere Ende.

7A. Skizzieren Sie den Spielbaum im Fall, dass Alice beginnt. Zur Abkürzung zeichnen Sie jeweils nur eine Wahl $(a_n, b_n) \in K_n$ als typischen Zug und mögliche Alternativen als „. . . “.

Spielbaum:

2

7B. Alice beginnt. Nennen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht:

1. Runde: A bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. B akzeptiert gdw $b \geq$ ☐.

2. Runde: B bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. A akzeptiert gdw $a \geq$ ☐.

3. Runde: A bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. B akzeptiert gdw $b \geq$ ☐. 3

7C. Bob beginnt. Nennen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht:

1. Runde: B bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. A akzeptiert gdw $a \geq$ ☐.

2. Runde: A bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. B akzeptiert gdw $b \geq$ ☐.

3. Runde: B bietet $a =$ ☐ und $b =$ ☐. A akzeptiert gdw $a \geq$ ☐. 3

7D. Gibt es neben den gezeigten weitere teilspielperfekte Gleichgewichte?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 8. *Shapley–Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 0, \quad \{1,2\} \mapsto 3, \quad \{2,3\} \mapsto 7, \\ \{1\} \mapsto 2, & \{3\} \mapsto 4, \quad \{1,3\} \mapsto 6, \quad \{1,2,3\} \mapsto 12. \end{cases}$$

8A. Schreiben Sie die Funktion v als Linearkombination der Shapley–Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

3

8B. Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge ρ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v)$.

Marginale Mehrwerte:

3

8C. Berechnen Sie zu v den Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley–Werte:

3