

Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

| | |
|-----------------------|------------------------------|
| Name: Musterlösung | Matrikelnummer: Musterlösung |
| Vorname: Musterlösung | Studiengang: Musterlösung |

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

| | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Gesamt |
| /1 | /12 | /13 | /11 | /10 | /12 | /10 | /9 | /78 |

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

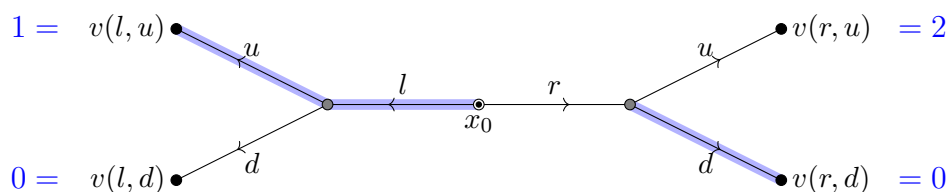
Dies war die fünfte Klausur zu unserer Veranstaltung Spieltheorie. Auch diese Klausur war sehr eng an Vorlesung und Übung angelehnt, so gesehen leicht. Die Fragen waren nicht identisch, die Herausforderung also durchaus real, die erlernten Methoden auf einfache, neue Beispiele anzuwenden. Viele Punkte sind leicht, erfordern aber wie angekündigt Übung und Routine.

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderbare Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).



2A. Gegeben sei der Baum X wie oben gezeigt mit terminalen Auszahlungen $v : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ Spieler. Jeder Strategievektor s definiert einen Spielverlauf $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ mit $x_1 \in \{l, r\}$ und $x_2 \in \partial X = \{l, r\} \times \{u, d\}$. Ist die folgende Aussage wahr? „Der Strategievektor s definiert bereits dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn in jedem aktiven Zustand x_0 und x_1 entlang des Spielverlaufs eine einmalige Abweichung keinen Vorteil bringt.“

| |
|--|
| <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Begründung: |
| Das obige Beispiel widerlegt dies für einen Spieler ($n = 1$) mit den Auszahlungen $v(l, u) = 1$ und $v(r, u) = 2$ sowie $v(l, d) = v(r, d) = 0$. Die vorgeschlagene Strategie $s : \emptyset \mapsto l, l \mapsto u, r \mapsto d$ erfüllt die Voraussetzung, aber nicht die Folgerung: In $x_0 = \emptyset$ und $x_1 = l$ lohnt keine einmalige Abweichung, dennoch ist s kein teilspielperfektes Gleichgewicht, denn $s' : r \mapsto u$ ist besser. |
| <i>Erläuterung:</i> Das Prinzip der einmaligen Abweichung fordert (neben Stetigkeit der Auszahlung v), dass einmalige Abweichung keinen Vorteil bringt in <i>jedem</i> aktiven Zustand. Dies entlang der Spielverlaufs zu prüfen, ist zwar notwendig, aber noch nicht hinreichend! |
| <i>Fun fact:</i> In der Übung kam die Frage auf, ob es wirklich nötig ist, in jedem aktiven Zustand zu prüfen, dass einmalige Abweichung keinen Vorteil bringt. Anhand des Baums in dieser Aufgabe wurde in der Übung nachvollzogen, dass es so ist, mit etwas spektakuläreren Auszahlungen. |

2

2B. Lässt sich jedes korrelierte Gleichgewicht auch mit öffentlichen Signalen erreichen? (Das heißt, jeder Spieler empfängt neben seinem eigenen Signal auch die Signale aller anderen.)

| |
|--|
| <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Begründung: |
| Zu jedem Signal muss ein Nash-Gleichgewicht gespielt werden. Ein öffentlicher Signalgeber kann daher Nash-Gleichgewichte mischen. Korrelierte Nash-Gleichgewichte gehen jedoch darüber hinaus, siehe Feige-oder-Mutig aus der Vorlesung. |
| <i>Erläuterung</i> Konkrete Beispiele kennen Sie aus Vorlesung und Übung. |

2

Wir untersuchen die Hintereinanderausführung der folgenden Spiele $f, g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

f :

| | | Bob | |
|-------|---|-------|--------|
| | | 0 | 1 |
| Alice | 0 | 0, 2 | -1, -1 |
| | 1 | -1, 2 | 3, 3 |

g :

| | | Bob | |
|-------|---|-------|--------|
| | | 0 | 1 |
| Alice | 0 | 0, 2 | -1, -1 |
| | 1 | -1, 2 | 1, 1 |

2C. Wir spielen zuerst f , dann g . Gilt $\text{PNE}(f * g) = \text{NE}(f) * \text{NE}(g)$?

Ja Nein. Begründung:

Das folgt per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo, denn das zweite Spiel g hat nur ein einziges Gleichgewicht (00, Gefangenendilemma).

Erläuterung: Wichtig ist bei diesem Argument, dass in jeder Kopie des Spiels g , egal zu welcher Vorgeschichte, dasselbe Gleichgewicht gespielt werden *muss*. Damit hat das erste Spiel f keinen Einfluss auf den Fortgang, und es gilt $\text{PNE}(f * g) = \text{NE}(f) * \text{NE}(g)$. Das steht im bemerkenswerten Gegensatz zur nachfolgenden Frage 2E.

Bemerkung: Sie kennen den allgemeinen Satz $\text{PNE}(\Gamma_0 * \dots * \Gamma_n) = \text{PNE}(\Gamma_0) * \dots * \text{PNE}(\Gamma_n)$, falls $\text{PNE}(\Gamma_1), \dots, \text{PNE}(\Gamma_n)$ nur einelementig sind. Sie erkennen hier einen einfachen Spezialfall.

2

2D. Wir spielen zuerst g , dann f . Gilt die Inklusion $\text{PNE}(g * f) \supseteq \text{NE}(g) * \text{NE}(f)$?

Ja Nein. Begründung:

Diese Inklusion folgt allgemein per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo.

Bemerkung: Auch hierzu kennen Sie aus der Vorlesung die allgemein gültige Inklusion $\text{PNE}(\Gamma_0 * \dots * \Gamma_n) \subseteq \text{PNE}(\Gamma_0) * \dots * \text{PNE}(\Gamma_n)$. Sie erkennen hier einen Spezialfall.

2

2E. Wir spielen zuerst g , dann f . Gilt die Inklusion $PNE(g * f) \subseteq NE(g) * NE(f)$?

| |
|---|
| <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Begründung: |
| Hier hat g nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, doch f hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky. Neben den offensichtlichen Gleichgewichten aus 2D hat $g * f$ noch weitere: Alice und Bob spielen 11 im ersten Spiel g und 11 im zweiten Spiel f genau dann, wenn 11 in g gespielt wurde, sonst spielen sie 00 in f . Das hebt 11 zu einem Nash-Gleichgewicht in der ersten Runde. |
| <i>Erläuterung:</i> Dasselbe gelingt für 01 und 10; die Belohnung aus f macht diese Strategiepaare lukrativ. Wenn Sie möchten, können Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte systematisch aufzählen, die Menge $PNE(g * f)$ ist bereits erstaunlich groß. Auf diesem Phänomen beruht die Komplexität und die Schönheit wiederholter Spiele, die wir in Vorlesung und Übung ausgiebig diskutiert haben. Sie sind zwar einfach strukturiert, doch die möglichen Lösungen sind erstaunlich vielfältig. |

2

2F. Wir wiederholen unendlich oft das obige Spiel $g : A = \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Auszahlung $u : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g(x_n)$, also geometrisch summiert, aber nicht normiert.

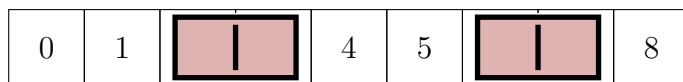
Lässt sich $(2, 2)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren?

| |
|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Begründung: |
| Die Grim-Trigger-Strategie (ewige Verdammnis) ist hier ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht. Sie führt zum Spielverlauf 11 11 11 ... und somit zur Auszahlung $(2, 2)$. |
| <i>Erläuterung:</i> Der Diskont beträgt hier $\delta = 1/2$, und die Geduldsschwelle $\underline{\delta} = 1 - 1/\alpha = 1/2$ ist gerade noch erfüllt. Man sieht dies auch ganz direkt: Jeder Spieler wird verlockt durch Betrug mit dem kurzfristigen Gewinn 2, doch die geduldige Einhaltung der Vereinbarung liefert langfristig genau dieselbe Auszahlung 2. |

2

Aufgabe 3. *Sprague–Grundy: eindimensionales Fliesentetris* (13 Punkte)

Alice und Bob spielen auf einem Spielbrett bestehend aus einem Streifen von n Feldern. Sie legen abwechselnd Dominosteine auf das Spielbrett, jeder Stein bedeckt zwei noch freie Felder. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. *Beispiel:* Die Abbildung zeigt das Spielbrett für $n = 9$, auf das bereits zwei Dominosteine auf die Felder $\{2, 3\}$ bzw. $\{6, 7\}$ gelegt wurden.



3A. Sei $\gamma(n)$ die Grundy–Zahl des Spiels mit n Feldern, auf die noch kein Dominostein gelegt wurde. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

| | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $n =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\gamma(n) =$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 |

Erklären Sie, wie Sie den Wert $\gamma(6)$ bestimmt haben. *Tipp:* Für anschließende Fragen ist es hilfreich, wenn Sie sich auch Ihre Rechnungen für $\gamma(4)$ und $\gamma(10)$ notieren.

| |
|---|
| <p>Begründung / Rechenweg für $\gamma(6)$:</p> <p>Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\gamma(n) = \text{mex}\{ \gamma(k) \oplus \gamma(n - 2 - k) \mid 0 \leq k \leq n - 2 \}$. Legen wir den Dominostein auf $\{k+1, k+2\}$, so bleiben links k Felder frei und rechts $n - 2 - k$. Die Grundy–Zahl dieses Zustands ist $\gamma(k) \oplus \gamma(n - 2 - k)$. Darüber bilden wir das mex.</p> <p>Rekursiv ergibt dies, insbesondere für $n = 6$ wie gefragt:</p> $\gamma(0) = \text{mex}\{ \} = 0$ $\gamma(1) = \text{mex}\{ \} = 0$ $\gamma(2) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 0 \} = 1$ $\gamma(3) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(1), \gamma(1) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 0, 0 \} = 1$ $\gamma(4) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(2), \dots, \gamma(2) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 1, 0, 1 \} = 2$ $\gamma(5) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(3), \dots, \gamma(3) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 1, 1, 1, 1 \} = 0$ $\gamma(6) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(4), \gamma(1) \oplus \gamma(3), \gamma(2) \oplus \gamma(2), \gamma(3) \oplus \gamma(1), \gamma(4) \oplus \gamma(0) \}$ $= \text{mex}\{ 0 \oplus 2, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 0, 2 \oplus 0 \} = \text{mex}\{ 2, 1, 0, 1, 2 \} = 3$ $\gamma(7) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(5), \dots, \gamma(5) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 0, 2, 0, 0, 2, 0 \} = 1$ $\gamma(8) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(6), \dots, \gamma(6) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 3, 0, 3, 0, 3, 0, 3 \} = 1$ $\gamma(9) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(7), \dots, \gamma(7) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1 \} = 0$ $\gamma(10) = \text{mex}\{ \gamma(0) \oplus \gamma(8), \dots, \gamma(8) \oplus \gamma(0) \} = \text{mex}\{ 1, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 1 \} = 3$ <p><i>Erläuterung:</i> Die gegebenen Werte der Tabelle können zur Probe genutzt werden. Zur Vereinfachung waren nur die Werte $\gamma(4)$, $\gamma(6)$, $\gamma(10)$ gefragt, die Begründung / Rechnung nur für $\gamma(6)$. Die Rechnung ist jedoch in allen Fällen sehr ähnlich und leicht, daher führen wir alle Fälle hier aus. Diese Daten helfen auch als Grundlage in den weiteren Rechnungen.</p> <p><i>Übung:</i> Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie als lehrreiche Fingerübung ein Python-Skript schreiben, das die obige Tabelle berechnet und fortführt. In der Klausur mussten Sie die drei Beispiele mit Stift und Papier selbst rechnen, auch das ist sehr lehrreich. Sobald Sie es verstanden haben, können Sie die Rechnung an einen Computer delegieren.</p> |
|---|

3B. Ist die folgende Spielsituation eine Gewinnposition?

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|----|----|
| 0 | █ | 3 | 4 | 5 | 6 | █ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | █ | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|----|----|

Ja Nein. Begründung:

Dieser Zustand ist die Summe der Spiele mit 1, 4, 6, 2 freien zusammenhängenden Feldern. Die Grundy-Zahl ist $0 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 1 = 0$. Dies ist eine Verlustposition.

2

Ist die folgende Spielsituation eine Gewinnposition?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | █ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | █ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | █ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|---|

Ja Nein. Begründung:

Dieser Zustand ist die Summe der Spiele mit 4, 10, 6 freien zusammenhängenden Feldern. Die Grundy-Zahl ist $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2 \neq 0$. Dies ist eine Gewinnposition.

2

3C. In Frage 3B gibt es genau eine Gewinnposition. Nennen Sie hierzu alle Gewinnzüge (als Felder $\{p, p + 1\}$, auf die der Dominostein gelegt wird). Begründen Sie Ihre Antwort.

Gewinnzüge:

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\{1, 2\}$ | $\{6, 7\}$ | $\{7, 8\}$ | $\{9, 10\}$ |
| $\{11, 12\}$ | $\{13, 14\}$ | $\{14, 15\}$ | $\{19, 20\}$ |
| | | | $\{21, 22\}$ |

Begründung:

Wir reduzieren die Grundy-Zahl von $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2$ auf 0. Erster Summand von 2 auf 0: nur ein möglicher Zug. Zweiter Summand von 3 auf 1: weitere 6 mögliche Züge. Dritter Summand von 3 auf 1: weitere 2 mögliche Züge.

Erläuterung: Hier zählt sich aus, dass wir zuvor die Berechnung der Grundy-Zahlen gut dokumentiert haben.

Um von $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2$ auf die Grundy-Zahl 0 zu kommen, müssen wir die Grundy-Zahl 2 (im Spiel mit 4 freien Feldern) auf 0 reduzieren oder die Grundy-Zahl 3 (im Spiel mit 6 bzw. 10 freien Feldern) auf 1.

Bei der Bestimmung der Grundy-Zahlen in Frage A haben wir die Grundy-Zahlen der Folgezustände für $n = 4, 6, 10$ bestimmt (für $n = 6$ sogar ausführlich beschrieben). Dort können wir nun die Gewinnzüge ablesen:

Im Teil mit vier freien Feldern müssen wir den Dominostein in die Mitte legen, sodass je 1 Feld am Rand frei bleibt. Im Teil mit zehn freien Feldern dürfen 8, 7/1 bzw. 5/3 Felder am Rand frei bleiben. Im Teil mit sechs freien Feldern müssen 3/1 Felder frei bleiben.

4

Aufgabe 4. Nash-Gleichgewichte (11 Punkte)

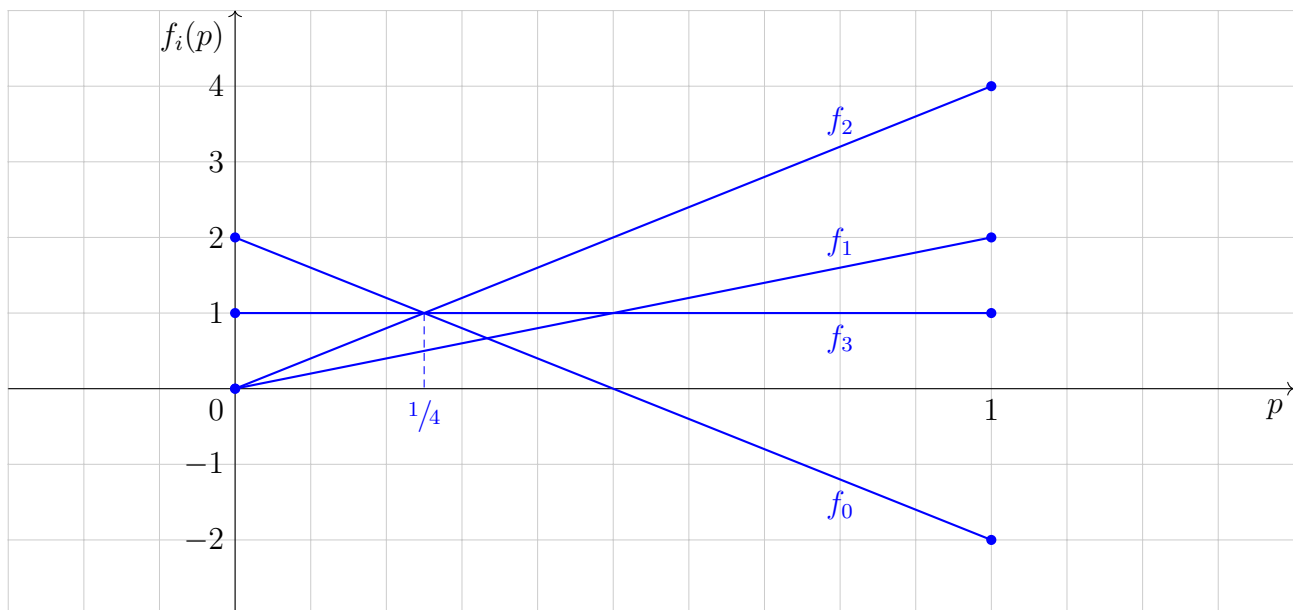
Wir untersuchen das folgende Spiel $g: S \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g}: [S] \times [T] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

| | | | | | |
|-------|-------|---------|--------|--------|--------|
| | | Bob | | | |
| | | t_0 | t_1 | t_2 | t_3 |
| Alice | s_0 | 2 1 | 0 2 | 0 1 | 1 1 |
| | s_1 | -2 0 | 2 0 | 4 2 | 1 0 |

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash-Gleichgewichte $(s, t) \in \text{NE}(g)$, ohne Beweis:

| |
|--|
| Reine Gleichgewichte: |
| Die reinen Gleichgewichte sind $\text{NE}(g) = \{(s_0, t_0), (s_1, t_2)\}$. |
| <i>Erläuterung:</i> Reine Gleichgewichte sind leicht zu finden. Wir suchen Spaltenmaxima für Alice und Zeilenmaxima für Bob. Wo beide zusammenfallen, da haben wir ein Nash-Gleichgewicht! |

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie Bobs Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.



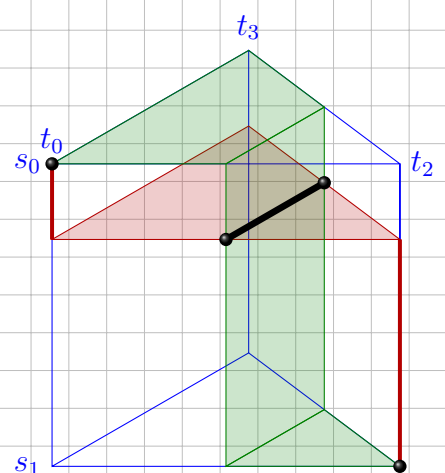
Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3]$:

| | | | |
|-----------|------------------|-------------------|------------------|
| Intervall | $0 \leq p < 1/4$ | $p = 1/4$ | $1/4 < p \leq 1$ |
| Antwort | $\{t_0\}$ | $[t_0, t_2, t_3]$ | $\{t_2\}$ |

Eine reine Strategie t von Bob kommt nie als beste Antwort vor. Nennen Sie diese Strategie t , sowie eine gemischte Strategie $t' \in [T]$, die t strikt dominiert:

$$t = \boxed{t_1} \quad \text{und} \quad t' = \boxed{\begin{array}{l} \frac{3}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_0 \text{ oder } (1 - \varepsilon)t_2 + \varepsilon t_0 \text{ für } \varepsilon \in]0, 1/3[\\ \text{oder } (1 - \varepsilon)t_2 + \varepsilon t_3 \text{ für } \varepsilon \in]0, 2/3[\text{ oder } \dots \end{array}}$$

4B. Bestimmen Sie in jedem dieser drei Fälle alle Nash-Gleichgewichte $(s, t) \in \text{NE}(\bar{g})$.

| | |
|---|---|
| <p>Gleichgewichte: Alice spielt $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Fallunterscheidung:</p> | |
| <p>1. Fall: Hier gilt $0 \leq p < 1/4$. Bob spielt $t = t_0$. Wegen $g_A(s_0, t) = 1 > g_A(s_1, t) = 0$ ist Alice beste Antwort darauf s_0. So erhalten wir das Nash-Gleichgewicht (s_0, t_0).</p> | |
| <p>2. Fall: Hier gilt $p = 1/4$. Bob spielt $t = q_0t_0 + q_2t_2 + q_3t_3$. Alice bekommt $\bar{g}_A(s_0, t) = q_0 + q_2 + q_3 = 1$ bzw. $\bar{g}_A(s_1, t) = 2q_2$. Es muss $\bar{g}_A(s_0, t) = \bar{g}_A(s_1, t)$ gelten, also $q_2 = 1/2$. Wir erhalten die Nash-Gleichgewichte $(s_{1/4}, qt_0 + 1/2t_2 + (1/2 - q)t_3)$ mit $q \in [0, 1/2]$.</p> | |
| <p>3. Fall: Hier gilt $p > 1/4$. Bob spielt $t = t_2$. Alice bekommt $g_A(s_0, t) = 1$ bzw. $g_A(s_1, t) = 2$. Ihre beste Antwort ist s_1. Wir erhalten das Nash-Gleichgewicht (s_1, t_2).</p> | |
| <p>Zusammenfassung: Nash-Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte (s_0, t_0) und (s_1, t_2) sowie das Intervall aller Punkte $(s_{1/4}, t)$ mit $t = qt_0 + 1/2t_2 + (1/2 - q)t_3$ und $q \in [0, 1/2]$.</p> | |
| <p><i>Erläuterung:</i> Dies sind <i>gegenseitig</i> beste Antworten, genau wie die Definition von Nash-Gleichgewicht es verlangt. Hierzu ist jeweils eine kleine Rechnung notwendig. Jedes so gefundene Gleichgewicht können Sie nun leicht in die Gleichgewichtsdefinition einsetzen und überprüfen. Diese <i>Punktprobe</i> ist eine leichte Routine. Unsere Rechnung zeigt noch mehr: Weitere Nash-Gleichgewichte gibt es tatsächlich nicht.</p> | |
| <p><i>Zusatz:</i> Als besonderen Bonus haben wir für Sie eine erklärende Skizze angefertigt:</p> | |
|  | <p>Die rote Reaktionsfunktion für Bob erhalten wir aus Frage ???A. Bobs Strategie t_1 wird strikt dominiert und kommt daher in keinem Nash-Gleichgewicht vor. Spielt Bob die Strategie $t = q_0t_0 + q_2t_2 + q_3t_3$, dann erhält Alice die Auszahlung 1, wenn sie s_0 spielt, und $2q_2$, wenn sie s_1 spielt. Demnach ist s_0 die beste Antwort, falls $q_2 < 1/2$, und s_1 ist die beste Antwort, falls $q_2 > 1/2$. Im Fall $q_2 = 1/2$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 eine beste Antwort. So erhalten wir die Reaktionsfläche für Alice. Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen ist die Menge der Nash-Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.</p> |
| <p><i>Erläuterung:</i> Ebenso können Sie alle $2 \times n$-Spiele lösen. Im generischen Falle, wenn beide Auszahlungsmatrizen algebraisch regulär sind, gibt es hierzu höchstens $1+n$ Nash-Gleichgewichte, also nur wenige isolierte Punkte, und ihre Anzahl ist zudem immer ungerade. Im allgemeinen, eventuell nicht-regulären Falle müssen Sie mit Komplikationen rechnen, so wie hier.</p> | |

Aufgabe 5. Sind Lehrpreise vernünftig? (10 Punkte)

Jede Dozent:in $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ mit $n \geq 2$ investiert in die Vorbereitung ihrer Lehre den Aufwand $b_i \in \{0, 1, \dots, 200\}$, gleichzeitig, verdeckt. Die beste Lehre, mit maximalem Aufwand b_i , erhält einen Lehrpreis im Wert von 49.80, bei Gleichstand wird unter den besten geteilt.

5A. Geben Sie die Gewinnfunktion $u: \{0, 1, \dots, 200\}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als explizite Formel an:

Formel: Mit $M = \{i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j\}$ gilt

$$u_i : \{0, 1, \dots, 200\}^n \rightarrow \mathbb{R} : b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{49.8}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

1

Sie spielen die Dozent:in $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ der höchste Konkurrenzaufwand.

5B. Angenommen, es gilt $c_i \leq 48$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

Die beste Antwort ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn $49.8 - b_i = 48.8 - c_i \geq 0.8$.

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \geq c_i + 2$ ist der Gewinn $49.8 - b_i \leq 47.5 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $49.8/|M| - b_i \leq 24.9 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \leq 0$, also kleiner.

3

5C. Angenommen, es gilt $c_i \geq 49$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

Die beste Antwort ist $b_i = 0$ mit Gewinn $u_i(b) = 0$.

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $49.8/|M| - b_i \leq 24.9 - 49 < 0$, also kleiner.
Für $b_i > c_i$ ist der Gewinn $49.8 - b_i \leq 49.8 - 50 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

3

5D. Bestimmen Sie alle (reinen) Nash-Gleichgewichte dieses Spiels $u: \{0, 1, \dots, 200\}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder zeigen Sie, dass es keine Nash-Gleichgewichte gibt.

| |
|--|
| Begründete Lösung: |
| Wir zeigen im Folgenden, dass es keine (reinen) Nash-Gleichgewichte gibt! |
| Angenommen $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1, \dots, 200\}^n$ wäre ein Nash-Gleichgewicht. |
| Wir betrachten die erste Dozent:in $i \in I$ mit dem maximalen Aufwand $b_i = \max_j b_j$. |
| Nach obigem Muster unterscheiden wir zwei Fälle und nutzen unsere Vorbereitung: |
| Gilt $b_i \leq 48$, dann kann sich jede andere Dozent:in $j \in I \setminus \{i\}$ verbessern (dank 5B). |
| Also ist b , entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht. |
| Gilt $b_i \geq 49$, dann wählen alle anderen Dozent:innen $b_j = 0$ (dank 5C). |
| Somit kann i sich verbessern, und b ist kein Gleichgewicht. |
| <i>Erläuterung:</i> Dies ist ein erschütterndes Ergebnis, aber in diesem Modell leicht nachzurechnen. Es handelt sich um eine perfide Auktion, bei der alle Bieter bezahlen, engl. <i>all pay auction</i> . Das Kapitel über Auktionen ist für diese Aufgabe allerdings gar nicht notwendig, denn wir nutzen hier nur den Begriff des Nash-Gleichgewichts und sorgfältige Fallunterscheidungen. Der grundlegende Satz der Auktionstheorie, Vickreys Satz zur Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgsames Arbeiten. |
| <i>Interpretation:</i> Da es gar kein Gleichgewicht gibt, ist rationales Verhalten hier erschwert. Der Anreiz des Lehrpreises soll vielleicht irrationales Verhalten fördern und die Dozent:innen zu unrentabel hohem Aufwand verleiten. Nach dem Semester führt dies zu Enttäuschung und Verbitterung: „Viel Mühe, wenig Ertrag: Die Lehre ist ein undankbares Geschäft.“ – „Hätte ich das gewusst, dann hätte ich mir nicht so viel Mühe gegeben.“ Hätte..., hätte...! Bei Nash-Gleichgewichten kann das nicht passieren! |
| <i>Kurzum:</i> Der Mechanismus der Lehrpreise klingt zwar zunächst verlockend, erweist sich aber als eine perfide <i>all pay auction</i> . Wer gute Leistung dauerhaft fördern möchte, muss sie ausreichend entlohnen und anerkennen. Alles andere ist kurzfristige Augenwischerei. |

Aufgabe 6. Bayes-Spiele: Grünschnabel gegen Platzhirsch (12 Punkte)

Die Platzhirsch GmbH und die Grünschnabel & Co KG produzieren dasselbe Zeug. Platzhirsch will ein neues Fabrikgebäude bauen (B , sonst NB). Mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ sind die Baukosten hoch, sonst niedrig. Platzhirsch erfährt die Baukosten, hält sie aber vor Grünschnabel geheim. Grünschnabel möchte in den Markt eintreten (E , sonst NE), ist aber unsicher, ob das profitabel ist. Die Auszahlungen im Falle hoher bzw. niedriger Baukosten sind wie folgt:

| | | | |
|---------|----------------------|--------------------------|------|
| | $H =$ hohe Baukosten | $N =$ niedrige Baukosten | |
| | Grün | E | NE |
| $u^H :$ | Platz | -2 | 0 |
| | B | 0 | 12 |
| | NB | 6 | 0 |

| | | | |
|---------|-------|------|------|
| | Grün | E | NE |
| $u^N :$ | Platz | -2 | 0 |
| | B | 8 | 20 |
| | NB | 6 | 0 |

6A. Geben Sie für die Harsanyi-Transformierte $\hat{u} : \hat{S}_P \times \hat{S}_G \rightarrow \mathbb{R}^2$ explizit die (endlichen) Strategiemengen und die Auszahlungsmatrix an.

Strategiemengen und Auszahlungsmatrix:

Zu der Spielermenge $I = \{P, G\}$ sind die Strategiemengen $S_P = \{B, NB\}$ und $S_G = \{E, NE\}$ gegeben. Je nach Baukosten $\Omega = \{H, N\}$ haben wir die Auszahlungsmatrizen u^H und u^N .

Die Harsanyi-Transformierte ist demnach:

$$\hat{S}_P = \{\hat{s}_P : \Omega \rightarrow S_P\} = \{(s_P^H, s_P^N) \in S_P^\Omega\} = \{(B, B), (B, NB), (NB, B), (NB, NB)\}$$

$$\hat{S}_G = S_G = \{E, NE\}$$

$$\hat{u} : \hat{S}_P \times \hat{S}_G \rightarrow \mathbb{R}^2 : ((s_P^H, s_P^N), s_G) \mapsto 3/4 \cdot u^H(s_P^H, s_G) + 1/4 \cdot u^N(s_P^N, s_G)$$

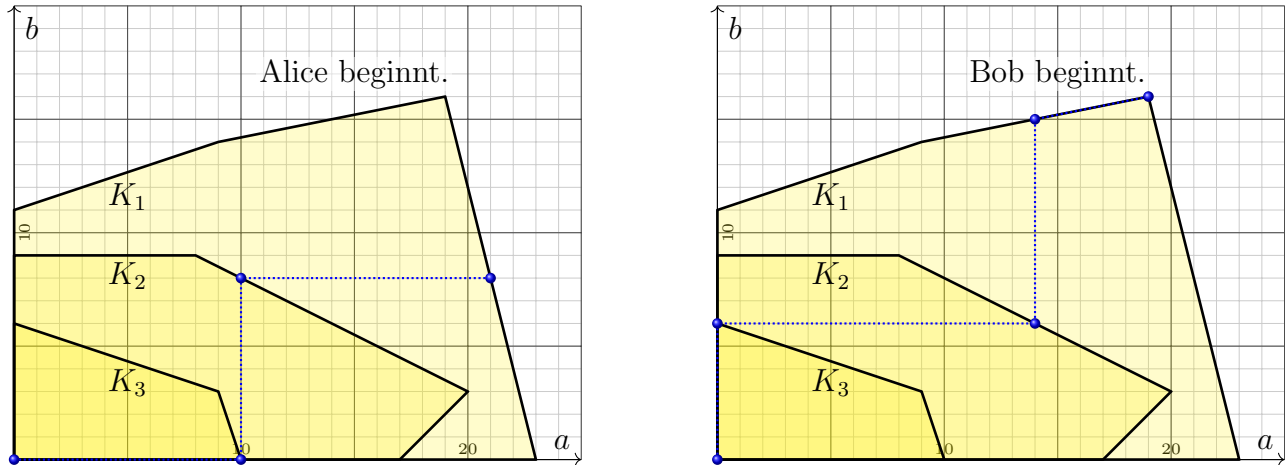
Auf diese Weise erhalten wir die Auszahlungsmatrix

| | | | |
|------------|------|------|------|
| | Grün | E | NE |
| Platz | | -2 | 0 |
| (B, B) | 2 | 14 | 0 |
| (B, NB) | 3 | 13 | 0 |
| (NB, B) | 11 | 17 | 0 |
| (NB, NB) | 12 | 16 | 0 |

Erläuterung: Platzhirsch kann auf die Information der Baukosten reagieren, Grünschnabel verfügt nicht über diese Information. Die Harsanyi-Transformierte \hat{u} codiert diese Informationsasymmetrie geschickt in ein (größeres) Spiel in strategischer Normalform. Dieses können wir nun mit unseren bewährten Methoden lösen.

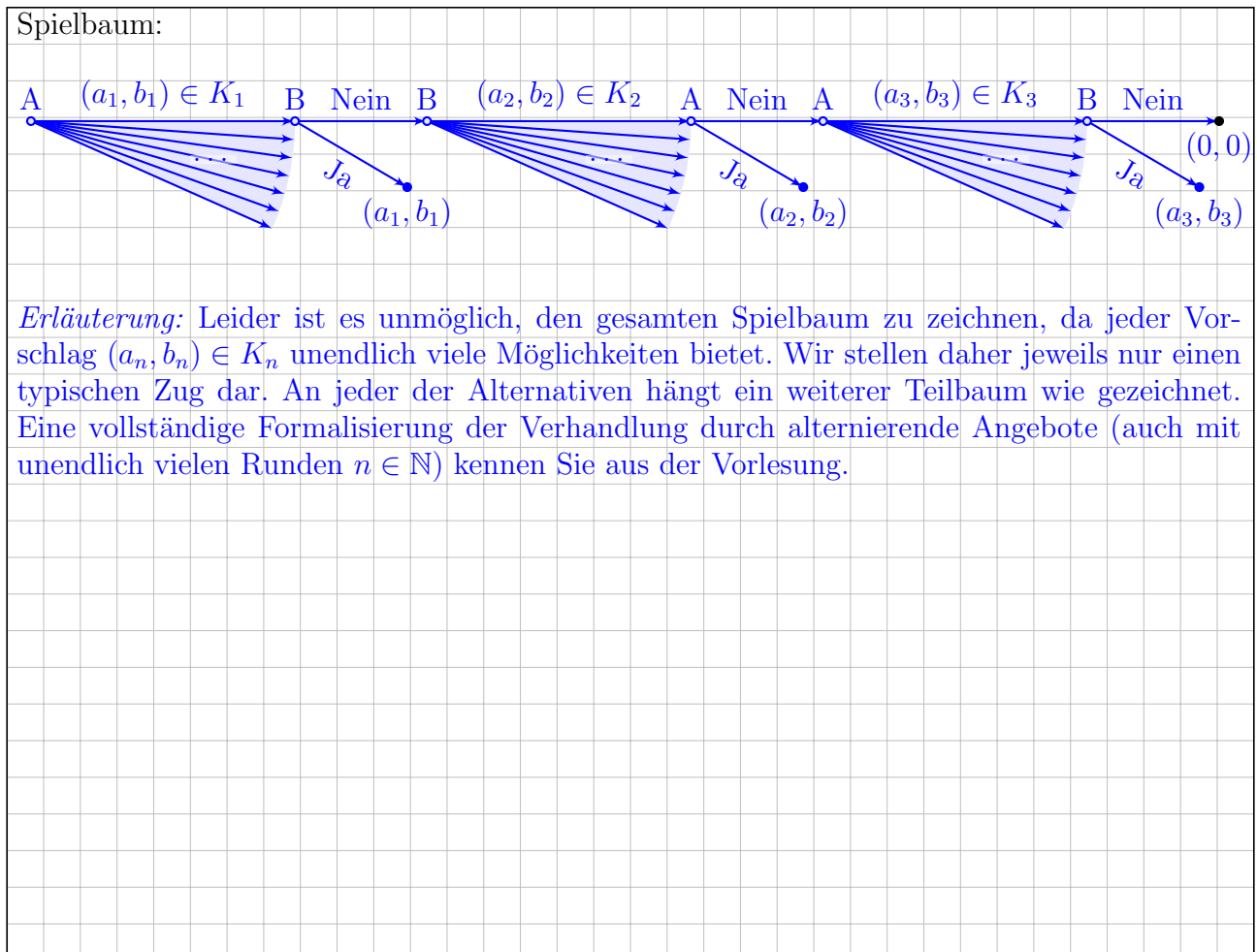
Aufgabe 7. *Verhandeln durch alternierende Angebote* (10 Punkte)

Alice und Bob verhandeln durch alternierende Angebote $(a, b) \in K_n \subset \mathbb{R}^2$ in Runde $n = 1, 2, 3$.



Dabei ist a der Gewinn für Alice und b der Gewinn für Bob. Die Verhandlungsmenge $K_1 \supset K_2 \supset K_3$ schrumpft wie gezeigt. Ist Alice in Runde n am Zug, so schlägt sie $(a, b) \in K_n$ vor; nimmt Bob dies an, so ist (a, b) die Auszahlung; andernfalls geht das Spiel in die nächste Runde $n + 1$ mit vertauschten Rollen. Nach dreimaliger Ablehnung scheitern die Verhandlungen mit der Auszahlung $(0, 0)$. Bei Indifferenz entscheiden sich die Spieler für das schnellere Ende.

7A. Skizzieren Sie den Spielbaum im Fall, dass Alice beginnt. Zur Abkürzung zeichnen Sie jeweils nur eine Wahl $(a_n, b_n) \in K_n$ als typischen Zug und mögliche Alternativen als „...“.



7B. Alice beginnt. Nennen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht:

1. Runde: A bietet $a =$ und $b =$. B akzeptiert gdw $b \geq$.
2. Runde: B bietet $a =$ und $b =$. A akzeptiert gdw $a \geq$.
3. Runde: A bietet $a =$ und $b =$. B akzeptiert gdw $b \geq$.

3

7C. Bob beginnt. Nennen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht:

1. Runde: B bietet $a =$ und $b =$. A akzeptiert gdw $a \geq$.
2. Runde: A bietet $a =$ und $b =$. B akzeptiert gdw $b \geq$.
3. Runde: B bietet $a =$ und $b =$. A akzeptiert gdw $a \geq$.

3

7D. Gibt es neben den gezeigten weitere teilspielperfekte Gleichgewichte?

Ja Nein. Begründung:

Rückwärtsinduktion über $n = 3, 2, 1$ ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.

Erläuterung: Ohne unser Zutun ist das Gleichgewicht ohne Gedächtnis. Die Spieler könnten, aufgrund des Spielbaums, ihre Aktionen in jeder Runde n abhängig machen von den vorigen Runden (rückblickend als Belohnung oder Bestrafung, vorausschauend als Drohung oder Lockung, so wie in 2C, 2D, 2E). Davon wird im Gleichgewicht jedoch kein Gebrauch gemacht.

Alle relevanten Daten liegen offen vor, die Spieler verhalten sich rational, daher verlaufen die Verhandlungen ohne langes Feilschen vollkommen geräuschlos und effizient.

2

Aufgabe 8. *Shapley-Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 0, & \{1, 2\} \mapsto 3, & \{2, 3\} \mapsto 7, \\ \{1\} \mapsto 2, & \{3\} \mapsto 4, & \{1, 3\} \mapsto 6, & \{1, 2, 3\} \mapsto 12. \end{cases}$$

8A. Schreiben Sie die Funktion v als Linearkombination der Shapley-Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

$$v = + 2 \cdot e_{\{1\}}^{\subseteq} + 0 \cdot e_{\{2\}}^{\subseteq} + 4 \cdot e_{\{3\}}^{\subseteq} \\ + 1 \cdot e_{\{1,2\}}^{\subseteq} + 0 \cdot e_{\{1,3\}}^{\subseteq} + 3 \cdot e_{\{2,3\}}^{\subseteq} \\ + 2 \cdot e_{\{1,2,3\}}^{\subseteq}$$

Erläuterung: Die Koeffizienten für die einelementigen Mengen sind klar. Danach arbeitet man sich vor über Mengen der Mächtigkeit 2, 3, ... und korrigiert jeweils zu dem gewünschten Wert.

3

8B. Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge ρ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v)$.

Marginale Mehrwerte:

| Reihenfolge ρ | Spieler $i =$ | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|----------------------|------|------------|------|
| (1, 2, 3) | $\Delta_i^\rho(v) =$ | 2 | 1 | 9 |
| (1, 3, 2) | | 2 | 6 | 4 |
| (2, 1, 3) | | 3 | 0 | 9 |
| (2, 3, 1) | | 5 | 0 | 7 |
| (3, 1, 2) | | 2 | 6 | 4 |
| (3, 2, 1) | | 5 | 3 | 4 |
| Mittelwert | $\bar{v}(i) =$ | 19/6 | 16/6 = 8/3 | 37/6 |

Erläuterung: Formal ist $\rho: I \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$ eine Abzählung / Reihenfolge aller Spieler. Zur Koalition $S_i^\rho = \{j \in I \mid \rho(j) \leq \rho(i)\}$ kam zuletzt der Spieler i . Er trägt den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \setminus \{i\})$ bei. Der Shapley-Wert ist der Mittelwert über alle ρ .

Achtung: Das Ausfüllen der Tabelle erfordert Konzentration.

3

8C. Berechnen Sie zu v den Shapley-Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley-Werte:

Wir finden $\bar{v}(1) = 19/6 = 3^1/6$ und $\bar{v}(2) = 8/3 = 2^2/3$ und $\bar{v}(3) = 37/6 = 6^1/6$.

Erläuterung: Dies können Sie hier auf zwei Arten berechnen: Als Mittelwert der *marginalen Mehrwerte* oder durch Aufteilung der *Harsanyi-Dividenden*, also den Koeffizienten bezüglich der obigen Shapley-Basis. Dazu wurden beide Datensätze in den vorigen Fragen vorbereitet.

3