# Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

## partielle Differentialgleichungen


Marco Boßle    Jörg Hörner

Mathematik–Online


Frühjahr 2011

# Zusammenfassung

Partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\partial_t u(t,x) + a\partial_x u(t,x) + bu(t,x) = f(t,x)$$

Anfangsbedingung: $u(0,x) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$
Lösungsformel:

$$u(t,x) = e^{-bt} g(x - at) + \int\limits_0^t f(r, x - a(t-r)) e^{-b(t-r)}\, dr$$

(Allgemeine Lösung mit beliebiger Anfangswert-Funktion $\tilde{g}$)

## Partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a\partial_x u(x,y) + b\partial_y u(x,y) = f(x,y)$$

Substitution:

$$\begin{array}{rclcrcl} v & = & bx + ay & \qquad & x & = & \frac{v+w}{2b} \\ w & = & bx - ay & \qquad & y & = & \frac{v-w}{2a} \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$$u(x,y) = \tilde{u}(v,w) = \int \frac{1}{2ab} \tilde{f}(v,w)\, dv + h(w)$$

(Anfangsbedingungen ergeben $h$.)

partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (spezielle Typen):

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= a_1\partial_{xx}u(t,x) + a_2\partial_x u(t,x) + a_3 u(t,x) + f(t,x)\\ \partial_{tt} u(t,x) &= a_1\partial_{xx}u(t,x) + a_2\partial_x u(t,x) + a_3 u(t,x) + f(t,x)\end{aligned}$$

mit Randbed. (RB) $u(t,x_0) = u(t,x_1) = 0$
und Anfangsbed. (AW), z.B. $u(t_0,x) = h_0(x)$ oder/und $u_t(t_0,x) = h_1(x)$
Lösungsmethode: **Separationsansatz**

1. Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ für homogenes Problem
2. Trennung der Variablen $\rightsquigarrow$ 2 gewöhnliche Dgl
3. Lösungen $w_n(x)$ des RWP, zugehörige Konstanten $c_n$
4. Lösungen $v_n(t)$ und Superposition
5. Partikulärlösung des inh. Problems: Variation der Konstanten
6. AW: Reihenentwicklung

# Aufgabe I1016 V2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$2u_x - 4u_y = 6e^y$$

sowie die Lösung zu der Anfangsbedingung $u(x, 1) = e^x$.

# Lösung I1016 V2

$$2u_x - 4u_y = 6e^y \Rightarrow a = 2\,,\ \ b = -4$$

Substitution:

$$\begin{array}{rcccc} x & = & \frac{v+w}{2b} & = & \frac{v+w}{-8} \\ y & = & \frac{v-w}{2a} & = & \frac{v-w}{4} \end{array}$$

$$r(x,y) = 6e^y \Rightarrow \tilde{r}(v,w) = 6\exp((v-w)/4)$$

$$\tilde{u}(v,w) = \int \frac{1}{2\cdot 2\cdot(-4)}\,6\exp((v-w)/4)\,dv = \frac{-3}{8}\,4\exp((v-w)/4)+h(w)$$

Rücksubstitution:

$$\begin{array}{rcccc} v & = & bx + ay & = & -4x + 2y \\ w & = & bx - ay & = & -4x - 2y \end{array}$$

Allgemeine Lösung

$$u(x, y) = -\frac{3}{2}e^{y} + h(-4x - 2y)$$

Anfangsbedingung

$$u(x, 1) = -\frac{3}{2}e + h(-4x - 2) \stackrel{!}{=} e^{x}$$

$$w = -4x - 2 \Rightarrow x = -(w + 2)/4 \Rightarrow h(w) = \exp(-(w + 2)/4) + \frac{3}{2}e$$

Lösung:

$$u(x, y) = -\frac{3}{2}e^{y} + h(-4x - 2y) = -\frac{3}{2}e^{y} + \exp(x + y/2 - 1/2) + \frac{3}{2}e$$

## Anderer Weg - Mit Lösungsformel

$$2u_x - 4u_y = 6e^y\,, \quad u(x,1) = e^x$$

Substitution $y = t + 1$

$$2u_x - 4u_t = 6e^{t+1}\,, \quad u(x,0) = e^x$$

Umformen:

$$u_t - \frac{1}{2}u_x = -\frac{3}{2}e^{t+1}$$

$$a = -1/2\,,\ b = 0\,, f(t,\cdot) = -\frac{3}{2}e^{t+1}\,,\ g(x) = e^x$$

Lösungsformel:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^0 g(x+t/2) + \int_0^t f(r,\cdot)e^0\,dr = e^{x+t/2} + \int_0^t -\frac{3}{2}e^{r+1}\,dr \\ &= e^{x+t/2} - \frac{3}{2}e^{t+1} + \frac{3}{2}e \end{aligned}$$

Rücksubstitution $t = y - 1$

$$u(y,x) = e^{x+y/2-1/2} - \frac{3}{2}e^{y} + \frac{3}{2}e$$

# Aufgabe I1445

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) + u(x,t), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad u_t(x,0) = \sin(2x). \end{aligned}$$

# Lösung I1445

Produktansatz: $u(x,t) = w(x)v(t)$ einsetzen

$$v''w = vw'' + vw \Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{w''}{w} + 1 = c\,.$$

Gleichung für $w$:
Nicht-triviale Lösungen mit $w(0) = w(\pi) = 0 \Rightarrow$ Sinus-Funktionen
$w'' = (c-1)w \Rightarrow w_n(x) = \sin(nx)\,, \quad c_n = 1 - n^2$
$v$-Gleichung für $c_n$: $v'' + (n^2 - 1)v = 0$
Lösungen:

$$\begin{aligned} n = 1: &\qquad v_1(t) = a_1 + b_1 t \\ n > 1: &\qquad v_n(t) = a_n \cos(\sqrt{n^2-1}\,t) + b_n \sin(\sqrt{n^2-1}\,t) \end{aligned}$$

Superposition:

$$u(x,t) = (a_1 + b_1 t)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(\sqrt{n^2-1}\, t) + b_n \sin(\sqrt{n^2-1}\, t)\sin(nx)$$

Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$:

$$u(x,0) = a_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a_n = 0 \; \forall n$$

Anfangsbedingung $u_t(x,0) = \sin(2x)$:

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= b_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sqrt{n^2-1} \sin(nx) \stackrel{!}{=} \sin(2x) \\ &\Rightarrow b_2 = 1/\sqrt{3},\, b_n = 0 \,\text{sonst} \end{aligned}$$

## Lösung insgesamt

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}\,t) \sin(2x)$$