Prüfungsvorbereitungskurs Höhere Mathematik 3

Integral-Transformationen

Marco Boßle   Jörg Hörner

Mathematik–Online

Frühjahr 2011

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation $\hat{f} = \mathcal{F} f$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i} y x)\, dx$$

Inverse Fourier-Transformation $f = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \exp(\mathrm{i} x y)\, dy$$

Spezielle Funktionen

$f(x)$	$\hat{f}(y)$
$x^n \operatorname{sign}(x)$	$2n!/(\mathrm{i}y)^{n+1}$
$e^{-a\|x\|}$	$2a/(a^2+y^2)\,, \quad a>0$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a}\, e^{-y^2/(4a)}$
$\chi_{[-1/2,1/2]}(x)$	$\operatorname{sinc}(y/2) = \sin(y/2)/(y/2)$

Regeln für Fourier-Transformation

$\varphi(x)$	$\hat{\varphi}(y)$
$af(x) + bg(x)$	$a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$
$f(ax)$	$\hat{f}(y/a)/\lvert a\rvert, \quad a \neq 0$
$f(x-a)$	$\exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y)$
$\exp(\mathrm{i}ax)f(x)$	$\hat{f}(y-a)$
$f'(x)$	$\mathrm{i}y\hat{f}(y)$
$xf(x)$	$\mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$
$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$

Laplace-Transformation

Laplace-Transformation $U = \mathcal{L}u$

$$U(s) = \int_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$$

Inverse Laplace-Transformation $u = \mathcal{L}^{-1}U$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)e^{st}\,ds$$

Spezielle Funktionen

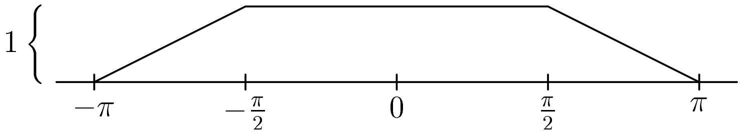
$u(t)$	$U(s)$
$t^n \exp(at)$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$

Regeln für Laplace-Transformation

φ	$\Phi = L\varphi$
$au(t) + bv(t)$	$aU(s) + bV(s)$
$u^{(n)}(t)$	$s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$
$t^n u(t)$	$(-1)^n U^{(n)}(s)$
$u'(t)$	$sU(s) - u(0)$
$u''(t)$	$s^2 U(s) - su(0) - u'(0)$
$H(t-a)u(t-a)$	$\exp(-as)U(s)\,, \quad a \geq 0$
$\exp(at)u(t)$	$U(s-a)$
$u(at)$	$U(s/a)/a\,, \quad a > 0$
$\int_0^t u(r)\,dr$	$U(s)/s$
$\int\limits_0^t v(t-r)u(r)\,dr$	$U(s)V(s)$

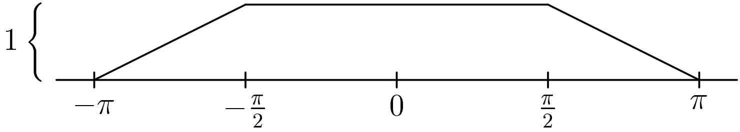
Aufgabe I541

Berechnen Sie die Fourier–Transformierte der abgebildeten Funktion:



Lösung

$f(x)$ ist stückweise lineare Funktion:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x+\pi)\,, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1\,, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi)\,, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fourier-Transformation:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{2}{\pi}(x+\pi) e^{-\mathrm{i}yx}\ dx \ + \ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, e^{-\mathrm{i}yx}\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\pi}(\pi - x) e^{-\mathrm{i}yx}\ dx$$

Stammfunktionen:

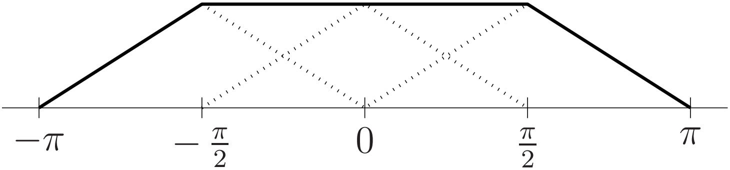
$$\int_a^b e^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \left[\frac{i}{y}\, e^{-\mathrm{i}yx}\right]_a^b, \quad \int_a^b x e^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \left[\frac{ixy+1}{y^2}\, e^{-\mathrm{i}yx}\right]_a^b$$

$$\hat{f}(y) = \frac{2}{\pi y^2}\left(e^{\mathrm{i}y\pi/2} + e^{-\mathrm{i}y\pi/2} - e^{\mathrm{i}y\pi} - e^{-\mathrm{i}y\pi}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi y^2}\left(\cos\frac{\pi y}{2} - \cos(\pi y)\right)$$

Mit Transformationsregeln: Ausgangspunkt Dreiecksfunktion

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)\,, & -1 \le x < 0 \\ (1-x)\,, & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \hat{g}(y) = \frac{2}{y^2}(1-\cos y)$$



Skalierung:

$$g\left(\underbrace{\frac{2}{\pi}}_{a} x\right) \to \hat{g}(y/a)/|a| = \frac{2a^2}{ay^2}(1-\cos(y/a)) = \frac{4}{\pi y^2}(1-\cos(\pi y/2))$$

Verschiebung:

$$h\,(x-a) \to e^{-\mathrm{i}ay}\hat{h}(y)$$

Summe:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \frac{4}{\pi y^2}(1-\cos(\pi y/2))(e^{\mathrm{i}\pi y/2}+1+e^{-\mathrm{i}\pi y/2}) \\
&= \frac{4}{\pi y^2}(1-\cos(\pi y/2))(1+2\cos(\pi y/2)) \\
&= \frac{4}{\pi y^2}(\cos(\pi y/2)-\cos(\pi y))
\end{aligned}$$

Aufgabe I479

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0\,, \quad u(0) = 0,\, u'(0) = u''(0) = 1\,.$$

a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation $\mathcal{L}: \; u(t) \mapsto U(s)$ über?

b) Lösen Sie diese Gleichung nach $U(s)$ auf.

c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die reelle Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems.

Lösung

Teil a)

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0\,, \quad u(0) = 0,\; u'(0) = u''(0) = 1$$

- Laplacetransformation der Ableitung

$$\mathcal{L}[u^{(n)}](s) = s^n U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} u^{(i)}(0)$$

- Damit

$$\begin{aligned} u'''(s) &\overset{\mathcal{L}}{\to} s^3 U(s) - u''(0) - su'(0) - s^2 u(0) = s^3 U(s) - 1 - s \\ 1 &\overset{\mathcal{L}}{\to} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-ts}\, dt = s^{-1} \end{aligned}$$

- Insgesamt

$$u'''(t) - u(t) - 1 = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad s^3 U(s) - 1 - s - U(s) - \frac{1}{s} = 0$$

Teil b)

- Umformen

$$
\begin{aligned}
s^3 U(s) - 1 - s - U(s) - \frac{1}{s} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad U(s) &= \frac{1 + s + \frac{1}{s}}{s^3 - 1}
\end{aligned}
$$

- Vereinfachen

$$
U(s) = \frac{1 + s + \frac{1}{s}}{s^3 - 1} = \frac{\frac{s^2+s+1}{s}}{s^3 - 1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^3 - 1)}
$$

Teil c)

- $(s^2+s+1)(s-1) = s^3-1$:

$$U(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^3-1)} = \frac{1}{s(s-1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

- Rücktransformation

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U](t) = e^t - 1$$