Blatt 14: Alles hat ein Ende, außer geschlossene Flächen!

1. Aufschneider und Ankleber aller Flächen, vereinigt euch!

1.1. Beim Bastelbogen 1 fügen sich die neun Vierecke isometrisch zu einer geschlossenen Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Welche? *Empirisch:* Sie können's basteln! *Systematisch:* Schreiben Sie das Flächenwort und bringen Sie es in Standardform.

1.2. Bestimmen Sie für jede Ecke p dieser Fläche F die Krümmung $\kappa(p) = 2\pi -$ (Winkelsumme um p). Für jede geschlossene Fläche F garantiert der Satz von Gauß–Bonnet die Gesamtkrümmung $\kappa(F) = 2\pi\chi(F)$. Prüfen Sie dies hier nach!

1.3. Schneiden Sie im Bastelbogen 2 die durchgezogenen Linien aus; Sie erhalten eine zu $\mathbb{D}^2$ homöomorphe Fläche. *Systematisch:* Lesen Sie das Flächenwort w am Rand ab. Ist $F = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ eine Fläche? geschlossen? orientierbar? Bringen Sie w per Flächenkalkül in Standardform. Zu welcher Modellfläche $F^{\varepsilon}_{g,r}$ ist F homöomorph? *Empirisch:* Sie können's basteln und Kanten paarweise verkleben.

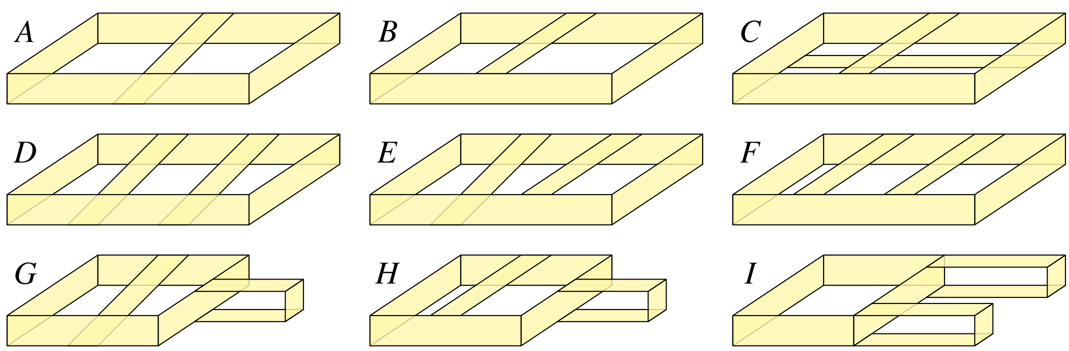
1.4. *Satz von Dyck:* Entfernen Sie aus einem Torus eine Kreisscheibe und kleben Sie ein Möbiusband ein. *Anschaulich:* Welche Fläche F entsteht? *Systematisch:* Formulieren Sie F als Flächenwort und bringen Sie es in Standardform.

1.5. Konstruieren Sie möglichst explizit folgende Homöomorphismen:
[6P]
- (a) $\mathbb{D}^2/\langle\, aa^{-1} \,\rangle \cong \mathbb{S}^2$ (zweidimensionale Sphäre)
- (b) $\mathbb{D}^2/\langle\, aa \,\rangle \cong \mathbb{RP}^2$ (reell-projektive Ebene)
- (c) $\mathbb{D}^2/\langle\, aba^{-1}b^{-1} \,\rangle \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (zweidimensionaler Torus)
- (d) $\mathbb{D}^2/\langle\, abab^{-1} \,\rangle \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/_{\sim}$ (Kleinsche Flasche)
  mit $(x_1,x_2) \sim (y_1,y_2) \iff (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ oder $(x_1,x_2) = (-y_1,\overline{y_2})$, diese Relation identifiziert antipodale Punkte im Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$.

1.6. *Ungleichung von Heawood:* Sei K ein Simplizialkomplex mit f–Vektor (f_0, f_1, f_2)
[3P] und Euler–Charakteristik $\chi = f_0 - f_1 + f_2$. Sei $|K|$ eine geschlossene Fläche. Warum gilt $2f_1 = 3f_2$ und $f_1 \le \binom{f_0}{2}$? Folgern Sie $2f_0 \ge 7 + \sqrt{49 - 24\chi}$.

2. Berandete Flächen: nur biegen, nicht brechen!

2.1. Bestimmen Sie für die folgenden Flächen jeweils die Anzahl der Randkomponen-
[3P] ten, die Euler–Charakteristik sowie die Orientierbarkeit. Welche dieser Flächen sind homöomorph? Können Sie einen Homöomorphismus anschaulich machen?



Zeichnen Sie jeweils eine homöomorphe Modellfläche $F^{\varepsilon}_{g,r}$.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1 & 2: Die Einleitung zur Vorlesung präsentierte Ihnen als Motivation und Ausblick die Klassifikation der kompakten zusammenhängenden (triangulierten) Flächen. Sie kennen nun den Beweis in voller Pracht und Schönheit. Er besteht aus drei Teilen:

(0) Wir konstruieren als Beispiele zunächst unsere Modellflächen $F_{g,r}^{\varepsilon}$.
(1) Wir weisen nach, dass unsere Liste keine Dopplungen enthält: Invarianten!
(2) Wir zeigen schließlich, dass unsere Liste vollständig ist: Schneiden und Kleben!

Als Satz zusammengefasst: Jede kompakte zusammenhängende (triangulierte) Fläche F ist homöomorph zu genau einer unserer Modellflächen $F_{g,r}^{\varepsilon}$ mit $g, r \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Das ist ein Musterbeispiel einer Klassifikation! Die Fläche F wird bis auf Homöomorphie eindeutig durch drei simple Invarianten charakterisiert: ihre Orientierbarkeit $\varepsilon(F) \in \{\pm\}$, die Anzahl $r(F) \in \mathbb{N}$ ihrer Randkomponenten sowie ihre Euler–Charakteristik $\chi(F) \in \mathbb{Z}$. Letztere lässt sich leicht in das Geschlecht $g(F) \in \mathbb{N}$ umrechnen. Diese Invarianten beweisen (1); zusammen mit (2) lösen sie das Homöomorphieproblem kompakter Flächen! Wir beweisen (2) durch eine genial-einfache Technik: *Schneiden und Kleben*. Diese Kulturtechnik nutzen Sie seit Schulzeiten (auch digital als *copy and paste*). Es funktioniert hier wunderbar, und löst auch sonst viele weitere Probleme, besonders in der Topologie.

Konkret nutzen wir Flächenwörter w zur Beschreibung von Flächen $F = \mathbb{D}^2/\langle w \rangle$: Diese Notation ist kurz, präzise und flexibel. Anfangs hatten wir nur unsere Anschauung (intuitiv, aber vage! ☹) und kommunizierten notgedrungen durch Zeichnungen (schön, aber mühsam! ☹). Nun haben wir eine geeignete Schreibweise (bequem! ☺) und einen einfachen Kalkül (effizient! ☺). Warum gelingt am Ende alles so einfach? Nun ja, weil wir alle Techniken sorgsam vorbereitet haben, und das ursprüngliche geometrisch-topologische Problem schließlich in einen einfachen kombinatorischen Kalkül übersetzen konnten. Diesen Kalkül und seine Anwendungen können und sollen Sie mit diesen Aufgaben üben.

Zu Notation und Kalkül schrieb Alfred North Whitehead: *By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems, and in effect increases the mental power of the race. Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division even of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, the whole population of Western Europe, from the highest to the lowest, could perform the operation of division for the largest numbers. (…) Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.* Das Wahre, Gute, Schöne obsiegt? O möge er doch Recht behalten!

Mathematik umschrieb man einst als die Lehre von Zahlen und Figuren. Diese Zusammenfassung zweier grundlegender Aspekte hat noch immer ihren Platz, insbesondere ihr gegenseitiger Nutzen in der Topologie: Bilder betonen die wesentliche Idee, Formeln liefern die unverzichtbare Präzision. Viele topologische Argumente lassen sich auf beide Weisen darstellen. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander zu übersetzen. Idealerweise soll die Topologie Sie zur Zweisprachigkeit erziehen!

DIE MORAL DER TOPOLOGIE. . . UND DER MATHEMATIK

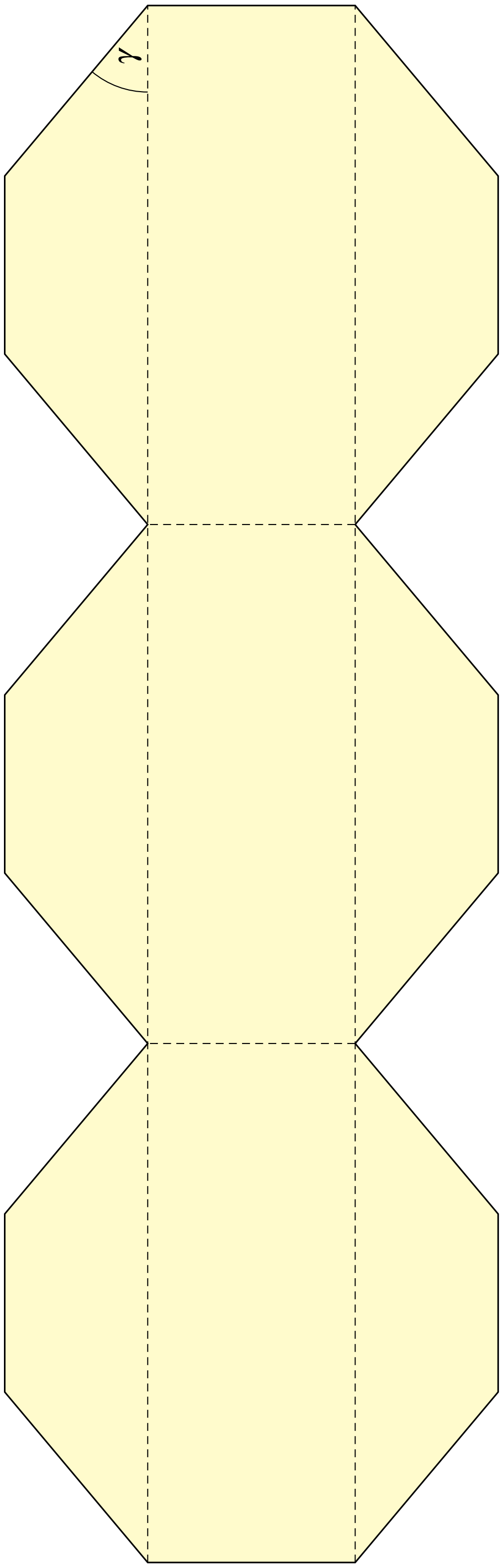
Herr: es ist Zeit. Das Semester war sehr lang. Beweis den letzten Sätzen, wahr zu sein.
Auch diese Vorlesung kommt zu ihrem guten Ende. Sie war so angelegt, dass ehrliche Beispiele und die nötige Theorie zugleich aufgebaut werden. Das ist anstrengend, doch lohnend. Illustrationen aus der Vorlesung und Übungsaufgaben zeigen geometrische Phänomene und konkrete Berechnungen. Durch Konstruktionen (euklidische Räume, Triangulierung, etc.) und Invarianten (Euler–Charakteristik, Abbildungsgrad, etc.) können Sie zahlreiche Problemstellungen erfassen und lösen.

Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung. Sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein. Mathematik erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Das Gegenteil trifft zu: Abstraktion strukturiert und vereinfacht; eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Die sollen Sie natürlich nicht ignorieren, sondern richtig verstehen; hierzu brauchen Sie Überblicks- und Detailwissen zugleich.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Sie dient der Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Theorie und Anwendung arbeiten nur gemeinsam effizient zusammen, wie linke und rechte Hand. Geben Sie sich auch in Zukunft nicht mit weniger zufrieden! Bleiben Sie ehrlich, neugierig, engagiert!

Bastelbogen 1: Star Lord's Orb



Bastelbogen 2: Gamora's surface

Schneiden Sie den Bastelbogen entlang der durchgezogene Linien. Gestrichelte Linien stehen für Talfalten, Strich-Punkt-Linien für Bergfalten. Identifizieren Sie gleich beschriftete Kanten, orientiert gemäß der Pfeile, und fixieren Sie diese mit Klebestreifen.