Blatt 13: Mannigfaltige Anwendungen

1. Borsuk heisst Dachs, Ulam heisst Pforte

1.1. [4P]
(a) Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$. Ist f surjektiv?
(b) Zeigen Sie den Satz von Lusternik–Schnirelmann: Sei $\mathbb{S}^n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ eine abgeschlossene Überdeckung. Dann enthält mindestens eine der Mengen A_k antipodale Punkte, d.h. $A_k \cap (-A_k) \neq \emptyset$. Betrachten Sie dazu die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k(x) = \operatorname{dist}(x, A_k)$ und Punkte x mit $f(x) = f(-x)$.
(c) Finden Sie eine abgeschlossene Überdeckung $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$, bei der keine Menge A_k antipodale Punkte enthält. (Mein Hut, der hat vier Ecken...)

2. Am Rande des Wahnsinns... und mitten im Inneren

2.1. Für jede nicht-leere n–Mannigfaltigkeit M gilt:
(a) Das Innere $\operatorname{Int} M$ ist eine nicht-leere n–Mannigfaltigkeit ohne Rand.
(b) Der Rand ∂M ist eine $(n-1)$–Mannigfaltigkeit ohne Rand, also $\partial\partial M = \emptyset$.
(c) Im Raum M ist das Innere $\operatorname{Int} M$ offen und der Rand ∂M abgeschlossen.
(d) Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, dann ist auch der Rand ∂M kompakt.

2.2. [4P]
(a) Sei $f : M \xrightarrow{\sim} N$ ein Homöomorphismus von Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie $f(\partial M) = \partial N$, und dass $f|_{\partial M}^{\partial N} : \partial M \xrightarrow{\sim} \partial N$ ein Homöomorphismus ist.
(b) Sind die Räume $X = \mathbb{D}^3 \setminus \frac{1}{2}\mathbb{B}^3$ und $Y = \mathbb{D}^3 \setminus \big((\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 + \frac{1}{2}e_1) \cup (\frac{1}{4}\mathbb{B}^3 - \frac{1}{2}e_1)\big)$ homöomorph? Sind dies Mannigfaltigkeiten? Was sind ihre Ränder?

3. Furven und Klächen

3.1.
(a) Klassifizieren Sie (bis auf Isomorphie) alle Simplizialkomplexe K, deren Realisierung $X = |K|$ eine zusammenhängende Kurve (1–Mannigfaltigkeit) ist.
(b) Klassifizieren Sie diese Räume $X = |K|$ bis auf Homöomorphie.

3.2. [4P] Sei $K \neq \{\emptyset\}$ ein simplizialer Komplex. Der topologische Raum $|K|$ ist genau dann eine Fläche (2–Mannigfaltigkeit), wenn K folgende Bedingungen erfüllt:
(a) Jeder Simplex ist in einem 2-Simplex enthalten. (Invarianz der Dimension)
(b) Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes. (Jordanscher Satz)
(c) Zu jeder Ecke a lassen sich alle 2-Simplizes $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, die a enthalten, so anordnen, dass jeweils Δ_i und Δ_{i+1} eine gemeinsame Kante haben.

4. Realität ist Projektion, Komplexität auch.

4.1. Zeigen / beantworten Sie: (a) Der Raum $\mathbb{RP}^n$ ist kompakt.
(b) Konstruieren Sie eine Einbettung $\tilde{f} : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $m = n+1$. Betrachten Sie dazu für $v \in \mathbb{S}^n$ die Spiegelung $f(v) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : x \mapsto x - 2\langle x \mid v \rangle v$.
(c) Der Raum $\mathbb{RP}^n$ ist hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
(d) In $\mathbb{RP}^n$ ist die Teilmenge $U_k = \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_k = 1 \}$ offen ($k = 0, 1, \dots, n$).
(e) Es gilt $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{k=0}^n U_k$ mit $h_k : U_k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$: Diese Karten bilden einen Atlas.
(f) Bestimmen Sie hierzu explizit die Kartenwechsel $h_{ij} : \mathbb{R}^n \supset V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji} \subset \mathbb{R}^n$.
(g) Ist $\mathbb{RP}^n$ mit diesem Atlas $\mathscr{A} = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit?
(h) Welchen Raum erhält man als Komplement von U_k in $\mathbb{RP}^n$?

Motivation zu den Aufgaben

Zu Beginn der Vorlesung haben wir Ihnen als Motivation und Ausblick die Klassifikation der (triangulierten kompakten zusammenhängenden) Flächen vorgestellt. Das Ergebnis konnten Sie damals bereits verstehen und wertschätzen, so hoffen wir. Flächen können wir als Teilräume des $\mathbb{R}^n$ auffassen und unmittelbar begreifen, auch das Homöomorphie-Problem konnten wir direkt formulieren, doch *lösen* konnten wir es anfangs noch nicht. Genauer: Wir konnten das Entscheidungsverfahren verstehen und *anwenden*, aber seine Richtigkeit noch nicht *beweisen*. Die Zeit ist gekommen, dieses Versprechen einzulösen.

Aufgabe 1: Auf $\mathbb{S}^2 \cong$ Erdoberfläche betrachten wir die drei (abgeschlossenen) Mengen $A_0 =$ Land, $A_1 =$ Pazifik, $A_2 =$ andere Meere; damit gilt $\mathbb{S}^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Bevor Sie den Globus konsultieren: Enthält eine der Mengen antipodale Punkte? Mit Globus: Welche? Wenn Sie Geographie mögen: `findlatitudeandlongitude.com/antipode-map`

Schöne Beispiele für A_0 sind die Hauptstädte Madrid (Spanien) – Wellington (Neuseeland), Taipei (Taiwan) – Asunción (Paraguay), Lima (Perú) – Phnom Penh (Kambodscha), A_1: Küste vor Vietnam – Küste vor Peru / Chile, A_2: Golf von Mexiko – Indischer Ozean.

Aufgabe 2: Mit unseren Kenntnissen über $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ sind wir nun gerüstet, Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, etwa $\mathbb{S}^n$, heißt *geschlossen*. Eine nicht-kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, etwa $\mathbb{R}^n$, heißt *offen*. Eine Mannigfaltigkeit M mit $\partial M \neq \emptyset$ nennen wir *berandet*. All dies tritt natürlich auf, das wollen wir hier illustrieren. Oft ist gerade das Zusammenspiel zwischen Mannigfaltigkeit M und Rand ∂M interessant und nützlich, hierzu dienen die Aufgaben 2.1 und 2.2.

Aufgabe 3.1: Hier dürfen Sie triangulierte 1–Mannigfaltigkeiten klassifizieren. Es ist leicht doch lehrreich, und Sie lernen, sauber zu argumentieren. Zur Flächenklassifikation nutzen wir denselben Zugang, Sie können hier in Miniatur schon einmal alles einüben. Zur Info: *Alle* Kurven und Flächen sind triangulierbar, aber das ist schwierig zu zeigen.

Aufgabe 3.2: Diese Aufgabe ist der erste Schritt zur Klassifikation der Flächen. Sie sind zwar recht einfache Objekte, doch ihre präzise Behandlung mobilisiert nahezu all unsere topologischen Techniken, im Rückblick und umgekehrter Reihenfolge: Topologie des $\mathbb{R}^n$, insbesondere der Ebene, Triangulierungen, Kompaktheit und Zusammenhang, Teilräume und Quotienten, Produkte und Summen, stetige Abbildungen und Homöomorphismen, topologische und metrische Räume. Das alles haben Sie schrittweise erlernt, schließlich werden Sie auf unseren Weg zurückblicken und sagen: Die Mühe hat sich gelohnt!

Aufgabe 4.1: Ah, jetzt, ja, der projektive Raum! Nach den Sphären $\mathbb{S}^n$ sind die reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ und die komplex-projektiven Räume $\mathbb{CP}^n$ die wichtigsten Beispiele geschlossener Mannigfaltigkeiten. Sie sind überaus interessant und gar nicht so schlimm, wie manche behaupten. Gut, zugegeben, schon $\mathbb{RP}^2$ können wir nicht mehr so recht zeichnen, aber gerade für solche Situationen haben wir uns wochenlang vorbereitet: Wir haben alle nötigen topologischen Werkzeuge! Wir können lokal in Koordinaten arbeiten und auch global einen guten Überblick gewinnen, zum Beispiel als Atlas. Hierzu dient diese Aufgabe: Nutzen Sie sie, um sich mit den projektiven Räumen anzufreunden.

Das nützt bereits bei der Flächenklassifikation: Die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist das einfachste Beispiel einer nicht-orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit.