Blatt 12: Auf dem Weg zum höheren (Ab)Bildungsgrad

1. Radikaler Fundamentalismus

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt: Zu jedem Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ existieren Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sodass $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$. Dank Polynomdivision genügt es hierzu, *eine* Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $F(z_n) = 0$ zu finden.

1.1. [6P] Beweisen Sie die folgenden Aussagen über bzw. mittels

$$H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} : (t,z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\deg(H_0)$ und $\deg(H_1)$, wobei $c_n \neq 0$.

(b) Die Abbildung H ist ein Polynom in z und t und somit stetig.

(c) Folgern Sie den Fundamentalsatz: Hat F keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $n = 0$.

(d) Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ geschlossene Wege, so auch ihr punktweises Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Es gilt $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.

(e) Sei $R = [a,b,c,d] \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a,b,c,d,a|$ der positiv orientierte Weg längs des Randes ∂R. Hat F keine Nullstellen auf ∂R, so gilt

$$\mathop{\#}_{\text{mult}} \{ z \in R \mid F(z) = 0 \} = \deg(F \circ \gamma).$$

Hinweis: Der Fall $n = 1$ ist leicht, für $n \geq 2$ hilft (d) und der Fundamentalsatz.

(f) Das Extrablatt zeigt Randwege γ von Quadraten $R \subset \mathbb{C}$ und ihre Bilder $F \circ \gamma$. Bestimmen Sie $\deg(F \circ \gamma)$ und lokalisieren Sie Nullstellen von F.

2. Sammeln Sie fix Punkte?

2.1. [2P] Finden Sie zu $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ fixpunktfrei eine explizite Formel für die Retraktion $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, die im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer verwendet wird.

2.2. Sei $D = \{ x \in \ell^2 \mid |x| \leq 1 \}$ der Einheitsball in $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit ℓ^2-Norm. Ist $f : D \to D : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto \big((1 - |x|^2)^{1/2}, x_0, x_1, \ldots \big)$ stetig? Welche Fixpunkte hat f? Gibt es eine stetige Retraktion $r : D \to S$ auf die Sphäre $S = \{ x \in \ell^2 \mid |x| = 1 \}$?

2.3. (a) Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig und fixpunktfrei. Zeigen Sie $f \simeq -\mathrm{id}_{\mathbb{S}_n}$. Was ist $\deg(f)$?

(b) Folgern Sie: Ist $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ stetig, dann gibt es ein $x \in \mathbb{S}^{2n}$ mit $f(x) \in \{\pm x\}$.

3. Vorsicht, Funktor! Der oder das Funktor?

3.1. Sei $Z \in \mathtt{Top}$. Wir definieren $\mathscr{C}(Z, -) : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ für Räume durch $X \mapsto \mathscr{C}(Z, X)$. Für $f : X \to Y$ stetig sei $\mathscr{C}(Z, f) = f_* : \mathscr{C}(Z, X) \to \mathscr{C}(Z, Y) : h \mapsto f \circ h$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}(Z, -)$ ein kovarianter Funktor ist. Ebenso für $[Z, -] : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$. Entsprechend kontravariant $\mathscr{C}(-, Z)$ mit $f^* : \mathscr{C}(Y, Z) \to \mathscr{C}(X, Z) : h \mapsto h \circ f$ und $[-, Z] : \mathtt{hTop} \to \mathtt{Set}$. Gelingt diese Konstruktion für jede Kategorie $\mathtt{C}$ nach $\mathtt{Set}$?

3.2. [3P] Äquivalent sind: (a) Die Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.
(b) Für jeden Raum Z ist $[f]_* : [Z, X] \to [Z, Y] : [h] \mapsto [f \circ h]$ eine Bijektion.
(c) Für jeden Raum Z ist $[f]^* : [Y, Z] \to [X, Z] : [h] \mapsto [h \circ f]$ eine Bijektion.

3.3. [1P] Bestimmen Sie $[\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\}]$ und $[\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}]$ möglichst explizit: Nennen Sie zu jeder Homotopieklasse genau einen Repräsentanten.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1: Der Fundamentalsatz der Algebra ist Ihr treuer Begleiter seit dem ersten Semester, egal ob Sie Mathematik studieren, oder Physik oder jedes andere technische Studienfach. Er wird nahezu überall benötigt und genutzt, vielleicht am wenigsten in der Algebra, vor allem in den zahllosen Anwendungen, in denen nicht-lineare Gleichungen gelöst werden müssen, zum Beispiel charakteristische Gleichungen zur Bestimmung von Eigenwerten. Es gibt daher genug gute Gründe, diesen Satz ernsthaft zu studieren.

Sie dürfen hier den Fundamentalsatz beweisen. (Dazu erklingen Chöre und Trompeten.) Das anschauliche Argument vorweg: Sei $n \ge 1$ und $c_n \ne 0$. Zum Radius $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ definieren wir $\gamma_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_r(s) = F(rs)$. Für große r dominiert der Term $r^n s^n$, und so umläuft γ_r den Nullpunkt n mal. Für kleine r dominiert der konstante Term c_n, und so umläuft γ_r den Nullpunkt keinmal. Alle γ_r sind untereinander homotop, aber in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ kann sich die Umlaufzahl nicht ändern. Also muss F mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ haben.

Die Fragen (a–c) führen dies sauber aus und beweisen die *Existenz* der Nullstellen. Die Fragen (d–f) lösen das praktische Problem der *Lokalisierung*: So erhalten Sie obendrein einen handfesten Algorithmus! Mit weiteren Rechentricks ist dies sogar der schnellste globale Algorithmus zur Lokalisierung komplexer Nullstellen. Haben wir alle Nullstellen lokalisiert und ausreichend fein voneinander getrennt, so können wir zum Newton–Verfahren übergehen: Es muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle gestartet werden, konvergiert dann aber blitzschnell gegen diese Nullstelle (Satz J1Z): Jede Newton–Iteration verdoppelt die Anzahl gültiger Ziffern!

Ist das angewandte Topologie oder reine Numerik? Ist das Algebra oder Analysis? Ist das Kunst oder kann das weg? Wir glauben, Mathematik ist Vielfalt und bildet doch eine Einheit. Spezialisierung ermöglicht Vertiefung, aber auch Verarmung, schnell ergeht es uns wie den Blinden und dem Elefanten. Befreien wir uns vom Kastendenken, bewundern wir die Schönheit der Mathematik von allen Seiten!

Aufgabe 2: Wer bei Brouwers Fixpunktsatz denkt „War doch klar.“, der wird hier eines Besseren belehrt. Wer kann sich schon alle stetigen Abbildungen $f : \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$ vorstellen? Oder den 4–dimensionalen Ball $\mathbb{D}^4$? Irgendwo auf dem Weg $1, 2, 3, \dots, \infty$ geht's dann auch schief. In dieser Aufgabe können Sie also wieder viel Schönes lernen.

Aufgabe 3: Hom-Funktoren sind sehr natürlich. Sie kennen sie zuerst aus der linearen Algebra: Jedem K–Vektorraum V ordnen Sie den Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ zu, und jeder K–linearen Abbildung $f : V \to W$ die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^* : h \mapsto h \circ f$. Dieselbe Konstruktion gelingt in jeder (lokal kleinen) Kategorie $\mathtt{C}$ und liefert zu jedem Objekt $Z \in \mathtt{C}$ den kovarianten Funktor $\mathtt{C}(Z, -) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$ und den kontravarianten Funktor $\mathtt{C}(-, Z) : \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$. Diese Aufgabe erklärt erste Rechenregeln am Beispiel der Kategorien $\mathtt{Top}$ und $\mathtt{hTop} = \mathtt{Top}/\text{Homotopie}$.