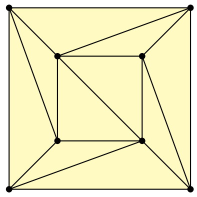
Blatt 11: Lernen Sie, mit Ihren Komplexen umzugehen!

1. Approximate yourself! Simpl(ex)ify your life!



1.1. (a) Liefert die Triangulierung des Quadrats rechts eine Triangulierung des Torus, wenn man gegenüberliegende Seiten des Quadrats identifiziert? mit wie vielen Ecken?
(b) Finden Sie eine Triangulierung $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ des Torus mit 9 Ecken. Geht es auch mit 8 Ecken? mit 7 Ecken?

1.2. Zeigen Sie, dass für alle Simplizialkomplexe K und L gilt:
[6P] (a) Die geometrische Realisierung $|K|$ ist hausdorffsch.
(b) Genau dann ist $|K|$ kompakt, wenn der Komplex K endlich ist.
(c) Ist K endlich und L abzählbar, so ist $[|K|,|L|]$ abzählbar.
(d) Sei $\dim K < m,n$. Wie viele Elemente hat $[|K|,\mathbb{S}^m]$ und $[|K|,\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n]$?

1.3. Wir triangulieren den Raum $\mathbb{R}$ durch $\mathscr{K} = \{\, [k],[k,k+1] \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$. Zeichnen Sie $\mathscr{P} = \mathscr{K} \boxtimes \mathscr{K}$ sowie $\mathscr{P}' = \beta(\mathscr{P})$ und $\mathscr{L} = \beta(\mathscr{P},\mathscr{P}_{\le 1})$. Triangulieren diese $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$? Schreiben Sie den kombinatorischen Komplex L zu $\mathscr{L}$ explizit aus.

1.4. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2\pi i t}$ und $K = \langle \{ \frac{k-1}{4}, \frac{k}{4} \} \mid k = 1,2,3,4 \rangle$ und L aus 1.3. Wie
[3P] viele simpliziale Approximationen $\varphi : \beta^m K \to L$ gibt es zu f für $m = 0,1,2,3$?

2. Mein Freund, der Baum — Heimat des Juchtenkäfers

2.1. Im Simplizialkomplex K heißen zwei Ecken a,b *verbindbar*, wenn ein Kantenzug $a = v_0, v_1, \dots, v_\ell = b$ existiert mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in K$ für $i = 1,\dots,\ell$. Der Komplex $K \supsetneq \{\emptyset\}$ heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Ecken verbindbar sind. Zeigen Sie: Genau dann ist $|K|$ (weg-)zusammenhängend, wenn K zusammenhängend ist.

2.2. Ein Graph K heißt *zykelfrei*, wenn für jede Kante $\{a,b\} \in K_1$ die Ecken a,b nicht in $K \smallsetminus \{\{a,b\}\}$ verbindbar sind. Im Folgenden sei K ein zusammenhängender Graph und $K_{\le 0} \le T \le K$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(a) T ist ein Baum, d.h. zusammenhängend und zykelfrei.
(b) T ist zykelfrei und maximal mit dieser Eigenschaft.
(c) T ist zusammenhängend und minimal mit dieser Eigenschaft.
Ein solcher Teilgraph $T \le K$ heißt *Spannbaum* von K. Folgern Sie, dass jeder zusammenhängende Graph K mindestens einen Spannbaum enthält.

3. Malen nach Zahlen

3.1. In der Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist $G = \{\, 2^\ell \mathrm{e}^{\pi i k/3} \mid k,\ell \in \mathbb{Z} \,\}$ eine Untergruppe. Skizzieren Sie zwei (alle?) G–invariante Triangulierungen K des Raums $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ mit Eckenmenge $\Omega(K) = G$ sowie jeweils einen Spannbaum $K_{\le 0} \le T \le K_{\le 1}$ des 1–Skeletts.

3.2. Sei $K = \langle \{0, 3k+1\}, \{3k+1, 3k+2\}, \{3k+2, 0\} \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$. Konstruieren Sie einen
[3P] Homöomorphismus $(f,g) : \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z} \cong |K|$. Stimmen für das Polyeder $|K|$ simpliziale und metrische Topologie überein? Geben Sie einen Spannbaum von K an.

3.3. Sei K ein Simplizialkomplex mit $\Omega(K) \subset \mathbb{N}$ und Dimension $\dim K \le d$.
(a) Ist $f : K \to \mathbb{R}^{2d+1} : k \mapsto (k^1, k^2, \dots, k^{2d+1})$ eine Darstellung?
(b) Genau dann existiert eine Einbettung $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$, wenn K lokal-endlich ist.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Simpliziale Komplexe machen komplexes simpel. Ja, Sie lesen richtig: *nicht* umgekehrt! Wer das Gegenteil befürchtet oder behauptet, sollte es unbedingt einmal ausprobieren...

Wir können stetig-topologische Probleme nun diskret-kombinatorisch umformulieren: Wir beschreiben topologische Räume X durch simpliziale Komplexe K (per Triangulierung $|K| \xrightarrow{\sim} X$) und stetige Abbildungen $f : X \to Y$ durch simpliziale $\varphi : K \to L$ (per simplizialer Approximation $f \simeq |\varphi|$). Auf topologischen Räumen führen wir so (lokal) affine Koordinaten ein und nutzen die bewährten Methoden der linearen Algebra!

Aufgabe 1.1: Viele für uns wichtige Räume lassen sich triangulieren. Es ist jedoch nicht ganz so einfach, solche Triangulierungen zu finden und korrekt anzugeben. Ein erster einfacher Testfall ist der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$: Es gelingt leicht mit 9 Ecken, für 8 oder 7 Ecken muss man etwas experimentieren (b) und Fehlversuche wie in (a) erkennen.

Aufgabe 1.2: Simplizialkomplexe haben viele schöne Eigenschaften: (a) Sie sind hausdorffsch, (b) kompakt bedeutet endlich, lokal-kompakt bedeutet lokal-endlich, und (c,d) die kombinatorische Struktur hilft unserem Verständnis. Alles ist gut!

Aufgabe 1.3 und 1.4: Simpliziale Approximation ist ein starkes Hilfsmittel, erfordert aber etwas Übung. Die Aufgabe 1.2 ist etwas abstrakter, die Aufgaben 1.1, 1.3 und 1.4 sind wunderbar konkret, so lernen Sie alle Aspekte kennen. *Hinweis:* Als hilfreiche Zeichenvorlage finden Sie unser topologisches Mandala im Anhang. So nett sind wir!

Aufgabe 2: Ein *(simplizialer) Graph* ist ein Simplizialkomplex K mit $\dim K \leq 1$. Aus topologischer Sicht sind Graphen denkbar einfach gebaut. Aus kombinatorischer Sicht sind sie jedoch bereits sehr interessant: Die Graphentheorie ist grundlegend in Kombinatorik und Informatik, als Forschungsgegenstand und als Werkzeug. Auch die algebraische Topologie nutzt Spannbäume, zum Beispiel bei der Berechnung der Fundamentalgruppe.

Aufgabe 3.1: Laut Vorlesung sind alle offenen Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ triangulierbar (Runge). Es ist lehrreich, dies in einfachen Fällen explizit auszuführen, etwa für $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3.2: Das unendliche Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ kennen Sie schon, es diente uns bereits als einfaches doch verblüffendes Beispiel zum Verständnis von Quotienten. Um Ihre Investition zu amortisieren, betrachten wir es hier erneut, diesmal als Simplizialkomplex.

Aufgabe 3.3: Sie wissen aus der Vorlesung, wie Sie jeden Simplizialkomplex K kanonisch realisieren können durch $|K| \subset \mathbb{R}^{(\Omega)}$. Das gelingt immer auf dieselbe „kanonische“ Weise, man muss nicht jedesmal kreativ sein oder gar neu nachdenken. So weit, so gut.

Die Dimension $\dim \mathbb{R}^{(\Omega)} = |\Omega|$ ist im Allgemeinen jedoch verschwenderisch und viel zu groß! Zum Beispiel können Sie jeden endlichen Graphen ($\dim K = 1$) affin im Raum $\mathbb{R}^3$ realisieren, dafür ist offensichtlich genug Platz, unabhängig von der Eckenzahl $|\Omega|$. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ hingegen gelingt dies nicht für alle, sondern nur für „planare“ Graphen.

Wir können jeden lokal-endlichen Simplizialkomplex K der Dimension $\leq d$ möglichst sparsam im euklidischen Raum $\mathbb{R}^{2d+1}$ einbetten — nicht mehr kanonisch, dafür aber ökonomisch. Das ist die simpliziale Fassung von Whitneys berühmtem Einbettungssatz.