Blatt 10: Komponierst du noch oder deformierst du schon?

1. Buchstabensuppe mit Fortsetzung in der Besenwirtschaft

1.1. Die 26 Buchstaben betrachten wir als kompakte Teilräume der Ebene:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Nennen Sie Homöomorphieklassen / Invarianten in folgenden Situationen:

(a) Jeder Buchstabe sei ideal dünn. *Hinweis:* Zusammenhangseigenschaften.
(b) Jeder Buchstabe sei realistisch dick. *Hinweis:* Flächenklassifikation.
(c) Welche Klassen ergeben sich bezüglich Homotopie-Äquivalenz?

1.2. Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to X$ ist genau dann nullhomotop, $f \simeq *$, wenn eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ existiert.

1.3. [6P]
(a) Wir betrachten die Menge $A = \{\, 0, 1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \,\} \times \{0\}$ und das Zentrum $b = (0,1)$. Skizzieren Sie den Kegel $B = \{\, (1-t)a + tb \mid a \in A,\ t \in [0,1] \,\}$.
(b) Ist $\iota : A \hookrightarrow B^* := B \smallsetminus \{b\}$ ein starker Deformationsretrakt? Bestimmen Sie $\pi_0(A)$ und $\pi_0(B^*)$. Ist $\pi_0(\iota)$ bijektiv? Welche Komponenten sind offen? In welchen Punkten sind A bzw. B lokal wegzusammenhängend?
(c) Gilt $B \simeq *$? Ist $\{b\} \hookrightarrow B$ ein Deformationsretrakt? stark? und $\{(0,0)\} \hookrightarrow B$? *Hinweis:* Sei $H : [0,1] \times B \to B$ eine starke Retraktionsdeformation. Wie hilft das Tubenlemma (Blatt 7) für $H^{-1}(U)$ und $(0,0) \in U \subset B^*$?

2. Gram–Schmidt muss mit!

2.1. Sei $B_n^+(\mathbb{K}) = \{\, R = (r_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid r_{ij} = 0 \text{ für } i > j \text{ und } r_{ii} \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$. Zeigen Sie:

(a) $h : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times B_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (Q,R) \mapsto QR$ ist ein Homömomorphismus. Das Gram–Schmidt–Verfahren liefert die Umkehrabbildung $g : A \mapsto (Q,R)$. *Illustration:* Schreiben Sie diese Zuordnung g für $n = 1,2,3$ explizit aus.
(b) $\{1_{n\times n}\} \subset B_n^+(\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind starke Deformationsretrakte. Bestimmen Sie damit $\pi_0(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$. *Zugabe:* Ebenso $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

3. Der kategorische Imperativ

3.1.
(a) Sei $\mathtt{C} = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ eine Kategorie. Zeigen Sie: Isomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf Ob und ebenso auf Mor.
(b) Nennen Sie die Isomorphieklassen von Objekten / Morphismen in $\mathtt{FinVec}_K$, indem Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Repräsentantensystem angeben.

3.2. [6P] In $\mathtt{C}$ heißt ein Morphismus $f : X \to Y$ *linkskürzbar* oder *Monomorphismus*, wenn für alle $g,h : Z \to X$ gilt: Aus $f \circ g = f \circ h$ folgt $g = h$. Stärker heißt f *linksinvertierbar*, wenn es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt. Entsprechend sind *rechtskürzbar / Epimorphismus* und *rechtsinvertierbar* definiert. Zeigen Sie:

(a) f linksinvertierbar $\Rightarrow$ f linkskürzbar, f rechtsinvertierbar $\Rightarrow$ f rechtskürzbar.
(b) In $\mathtt{Top}$ gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ f linkskürzbar $\Leftarrow$ f linksinvertierbar. Nennen Sie eine Einbettung, die nicht linksinvertierbar ist.
(c) In $\mathtt{Top}$ gilt: f surjektiv $\Leftrightarrow$ f rechtskürzbar $\Leftarrow$ f rechtsinvertierbar. Nennen Sie eine Identifizierung, die nicht rechtsinvertierbar ist.
(d) Warum gilt in $\mathtt{Haus}$ nicht mehr f rechtskürzbar $\Rightarrow$ f surjektiv?

Motivation zu den Aufgaben

Aufgabe 1: Die Aufgabe „Buchstabensuppe“ ist ein Klassiker zur Klassifikation. Sie erledigen diese Aufgabe erfolgreich und treffsicher seit Sie lesen lernten. Während Sie diese Zeilen lesen, vollführt Ihr Gehirn eine überaus effiziente Mustererkennung. . . .

Die topologische Klassifikation hängt vom gewählten Zeichensatz ab, zum Beispiel:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

Aus topologischer Sicht können Sie hier sowohl Ihre Anschauung üben, als auch präzise Argumente zum Zusammenhang. Zunächst bilden Sie Klassen und prüfen, dass die Buchstaben einer Klasse tatsächlich homöomorph sind. Umgekehrt sollen Buchstaben aus unterschiedlichen Klassen nicht homöomorph sein: Zur Unterscheidung können Sie zählen, wie viele Punkte man entfernen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören, und wie viele Punkte es gibt, die kleine zusammenhängende Umgebungen in $1, 3, 4$ Komponenten trennen. Diese topologischen Invarianten genügen hier bereits zur Unterscheidung.

Aufgabe 2: Die *klassischen Gruppen* sind, wie auf dem letzten Blatt bereits beworben, allgegenwärtig in Mathematik und Physik und nahezu allen Anwendungen. Das Gram–Schnidt–Verfahren kennen und lieben Sie aus der Linearen Algebra. Hier feiern Sie es nochmal vom topologischen Standpunkt. Explizite Formeln haben ihren eigenen Reiz! Wenn Sie die Formeln erst einmal aufgeschrieben haben, dann lösen sich alle Fragen wie Stetigkeit, Surjektivität, Injektivität, etc. in Wohlgefallen auf.

Aufgabe 3: Kategorien nutzen Sie überall in der Mathematik, wenn auch nicht immer unter diesem Namen. Inzwischen kennen Sie genügend Beispiele aus Algebra, Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Numerik und auch Topologie. Damit ist es möglich und sinnvoll, von Beispielen zu abstrahieren und die gemeinsame Struktur zu systematisieren.

Die Sprache der *Kategorien* dient dazu, häufig wiederkehrende Sachverhalte, Strukturen und Argumente effizient zu formulieren. Dies ist Ziel und Kennzeichen jeder hochentwickelten Sprache: Sie ermöglicht uns, verschiedene Phänomene einheitlich zu beschreiben und Gemeinsamkeiten zu erfassen. Sinnvolle Abstraktion hilft und vereinfacht.

Wir wollen nicht den Eindruck erwecken, Kategorien und Funktoren seien der wesentliche Aspekt: *Abstract general nonsense* vereinfacht und strukturiert, er formuliert die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten und blendet die Feinstruktur aus, das ist sein Zweck, dafür wurde er erfunden: Er trennt die allgemeingültigen von den speziellen Eigenschaften.

Aufgabe 3.1: Aussage (a) gilt in jeder Kategorie, die konkrete Anwendung (b) erfordert Kenntnisse der untersuchten Kategorie $\mathtt{FinVec}_K$. Zugegeben, der Gauß–Algorithmus ist wesentlich tiefsinniger als unsere bescheidene Kategorientheorie. Umgekehrt erlaubt die Sprache der Kategorien präzise und elegante Formulierungen.

Aufgabe 3.2: Die invertierbaren Morphismen heißen *Isomorphismen*. Oft sind Morphismen, zum Beispiel stetige Abbildungen in $\mathtt{Top}$, nur links- oder rechtsinvertierbar, oder nur links- oder rechtskürzbar (Mono-/Epimorphismen). Das ist eine schwache aber dennoch nützliche Information, und Sie sollen sie treffsicher und fehlerfrei einsetzen lernen.