Blatt 9: Wannkönnenwirlokalendlichwiederkompaktzusammenabhängen?

1. Die Klassiker, der X-Factor, und alles in Stereo

1.1. [3P] (a) Wir betrachten den Matrizenring $(\mathbb{K}^{n\times n},+,\cdot)$ über $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$. Konstruieren Sie Homöomorphismen $(f,g):\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\cong\mathbb{S}^1$ sowie $(f,g):\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})\cong\mathbb{S}^3$.
(b) Bestimmen Sie die euklidische Norm $|A|$ von $A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und $A\in\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ kompakt sind.

1.2. Gegeben seien nicht-leere topologische Räume X_λ mit $\lambda\in\Lambda$. Zeigen Sie, dass das Produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ genau dann lokal-kompakt ist, wenn jeder Faktor X_λ lokal-kompakt ist und fast alle X_λ kompakt sind (das heißt: alle bis auf endlich viele).

1.3. [1P] Ist der Raum $\mathbb{R}^p\sqcup\mathbb{R}^q$ hausdorffsch? kompakt? lokal-kompakt? Geben Sie seine Alexandroff-Kompaktifizierung an. Skizzieren Sie das Ergebnis für $(p,q)=(1,2)$.

1.4. Dieselben Fragen aus **1.3** für die Räume $(\mathbb{D}^2\smallsetminus\{0\})\sqcup(\mathbb{D}^2\smallsetminus\{0\})$ und $\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$.

2. Nur beschränkt und abgeschlossen genügt noch lange nicht!

2.1. [6P] Wir betrachten den Banach–Raum $X=\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm $\|-\|$.
(a) Zu $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n\in X$ gegeben durch $f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}:x\mapsto\sin(2^nx)$. Finden Sie zu $p<q$ in $\mathbb{N}$ ein $x\in[0,2\pi]$ mit $|f_p(x)-f_q(x)|=1$.
(b) Besitzt die Funktionenfolge $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge?
(c) Ist $(\bar{B}(f_n,1/3))_{n\in\mathbb{N}}$ lokal-endlich? Wie viele schneidet $B(g,1/6)$ höchstens?
(d) Ist der Einheitsball $K=\{\,f\in X\mid\|f\|\le 1\,\}$ abgeschlossen? beschränkt? Finden Sie eine offene Überdeckung von K ohne endliche Teilüberdeckung.

3. LA Pride – Lineare Algebra und stolz darauf

3.1. Wir bestimmen $\pi_0\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\pi_0\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ wie in der Vorlesung skizziert:
(a) Finden Sie in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ je einen Weg von I zu $S_i(\lambda)=I+(\lambda-1)E_{ii}$, $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, zu $R_{ij}(\mu)=I+\mu E_{ij}$, $\mu\in\mathbb{R}$, $i\neq j$, und zu $T_{ij}=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}-E_{ji}$. Dies sind die guten alten Elementarmatrizen mit positiver Determinante.
(b) Zeigen Sie, dass der Gauß–Algorithmus mit den Operationen $S_i(\lambda)$, $R_{ij}(\mu)$, T_{ij} einen Weg von jeder Matrix $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ nach $\mathrm{diag}(\pm1,1,\dots,1)$ liefert.
(c) Bestimmen Sie damit $\pi_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$. *Zugabe:* Ebenso $\pi_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$.

4. Topologisches Karussell: Anhalten, mir wird schwindelig!

4.1. Konstruieren Sie für $k=1,2,3$ eine Einbettung $f_k:\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{C}$, sodass $\mathbb{C}\smallsetminus f_k(\mathbb{R})$ genau k Wegkomponenten hat. Bestaunen Sie den Fall $k=3$! Hier die Anleitung:
(a) Skizzieren Sie $h:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\,]1,3[\,:t\mapsto 2+t/(1+|t|)$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:t\mapsto h(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Färben Sie die Ebene gemäß der Zerlegung $\pi_0(\mathbb{C}\smallsetminus f(\mathbb{R}))$. *Zugabe:* Beweis?
(b) Sei $U=\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<3\}$. Zeigen Sie, dass $\rho:U\to U:z\mapsto z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}(|z|)}$ ein Homöomorphismus ist mit $\rho(]1,3[)=f(\mathbb{R})$. Folgern Sie, dass f eine Einbettung ist und $V=U\smallsetminus f(\mathbb{R})\cong U\smallsetminus\,]1,3[$ (weg)zusammenhängend ist.
(c) Ist der Abschluss von V in $X=\mathbb{C}\smallsetminus f(\mathbb{R})$ zusammenhängend? und X?

4.2. [2P] Seien $A,B\subset X$ beide offen oder beide abgeschlossen. Zeigen Sie: Sind $A\cap B$ und $A\cup B$ zusammenhängend, dann auch A und B. Gilt das auch für $A,B\subset X$ beliebig?

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1.1: Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ betrachten wir die $\mathbb{K}$–Algebra $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ aller $n \times n$–Matrizen mit der euklidischen Norm $|(a_{ij})_{ij}|^2 = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2$. Auf der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ sind Multiplikation und Inversion stetig, da rationale Funktionen. Gleiches gilt für die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \{\, A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1 \,\}$, hier genügen sogar Polynomfunktionen. Als weitere Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ betrachten wir die *allgemeine/spezielle orthogonale/unitäre Gruppe*. Sie heißen *klassische Gruppen*, zusammen mit weiteren ihrer Schwestern. Diese Gruppen sind faszinierende und nützliche Objekte. Auch uns werden sie in dieser Vorlesung noch vielfach beschäftigen.

Aufgabe 1.2: Hier üben Sie Kompaktheit und Produkttopologie und ihr Zusammenspiel.

Aufgabe 1.3 & 1.4: Die Alexandroff–Kompaktifizierung ist die einfachste und sparsamste aller Kompaktifizierungen: Es genügt ein einziger weiterer Punkt. Sie kennen schon länger die Kompaktifizierung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$, sie wurde in der Vorlesung sogar geturnt! Der Vergleich zeigt: Es ist dieselbe! (Bis auf Homöomorphie, na klar.) Man kann dies abstrakt als Eindeutigkeitssatz sehen, oder die beiden Topologien explizit ausschreiben und vergleichen: Es ist wirklich derselbe Raum (bis auf den Namen „∞“ des zugefügten Punktes).

Aufgabe 2: Um es nochmal zu betonen: Nein, *kompakt* ist nicht definiert als *beschränkt und abgeschlossen*. Sondern: Kompaktheit ist die endliche Überdeckungseigenschaft. Der Satz von Heine–Borel enthüllt hierauf aufbauend eine Besonderheit für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist kompakt äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen. Dieses einfache Kriterium ist oft bequem und daher nützlich, siehe Aufgabe 1. Es ist wirklich eine spezielle Aussage über den Raum $\mathbb{R}^n$! Dass dies in $\mathbb{Q}^n$ nicht gilt, haben wir bereits am Beispiel $[0,1]_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$ diskutiert. Vollständigkeit ist tatsächlich nötig, doch das allein genügt noch nicht. Diese Aufgabe zeigt ein einfaches doch drastisches Beispiel in unendlicher Dimension. Sie können an solchen expliziten Beispielen viel lernen, nicht nur über die großen Vektorräume der Funktionalanalysis, sondern im Rückblick auch, wie schön einfach doch alles im guten alten euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist.

Für jeden *metrischen* Raum ist Kompaktheit äquivalent zu Folgenkompaktheit; das nutzen Sie dankend in der Analysis. Satz F3G erklärt die wichtigsten Äquivalenzen verschiedener Kompaktheitsbegriffe. Allgemein für topologische Räume ist und bleibt die endliche Überdeckungseigenschaft die grundlegende Definition.

Aufgabe 3: Analysis und Lineare Algebra liefern uns schlagkräftige Methoden, auch Beispiele und Fragen: Welche Wegkomponenten hat die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$? und $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}$? Was gilt für $\mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ sowie $\mathrm{U}_n\,\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$? Die gute Nachricht: Diese topologischen Fragen können Sie mit linearer Algebra beantworten!

Aufgabe 4.1: Pathologische Beispiele wie dieses oder die Sinuskurve des Topologen sind manchmal belustigend, manchmal beängstigend, aber immer lehrreich. Sie sollen sie mit Ihren bewährten bzw. neu erworbenen topologischen Methoden bearbeiten lernen.

Aufgabe 4.2: Die Aufgabe klingt leicht, ist sie auch, aber Sie müssen genau hinschauen und die präzisen Begriffe / Definitionen / Methoden der Topologie auch präzise einsetzen.