Blatt 8: Wiederholung ‖:Wiederholung:‖

1. Auf das richtige Ambiente kommt es an!

1.1. [4P] Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum und $D \subset X$ dicht in $(X,\mathcal{T})$. Zeigen Sie:
- (a) Ist $O \subset X$ offen, also $O \in \mathcal{T}$, dann gilt $\overline{D \cap O} = \overline{O}$ in $(X,\mathcal{T})$.
- (b) Ist $O \subset X$ offen, dann ist $D \cap O$ dicht im Teilraum $(O,\mathcal{T}_O)$.
- (c) Gelten die Folgerungen (a) und (b) auch, wenn $O \subset X$ nicht offen ist?
- (d) Jeder offene Teilraum eines separablen Raums ist separabel.

1.2. Sei $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
- (a) Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X.
- (b) Für jede abgeschlossene Menge B in Y ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.
- (c) Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$.
- (d) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2. Unboxing the box topology

2.1. [2P] Auf dem Folgenraum $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ definieren wir die *Box-Topologie* $\mathcal{T}_{\text{box}}$ wie folgt: Sei $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \{ \prod_{k\in\mathbb{N}} U_k \mid U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \}$.
- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ die Eigenschaften (B1–2) einer topologischen Basis erfüllt und somit durch alle Vereinigungen eine Topologie $\mathcal{T}_{\text{box}}$ auf X definiert.
- (b) Ist die Abbildung $f : (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}) \to (X,\mathcal{T}_{\text{box}}) : t \mapsto (t)_{k\in\mathbb{N}} = (t,t,t,\dots)$ stetig? Und $p_i : (X,\mathcal{T}_{\text{box}}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}) : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto x_i$? Und $p_i \circ f : (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$?
- (c) *Zugabe:* Ist der so definierte Raum $(X,\mathcal{T}_{\text{box}})$ hausdorffsch? erstabzählbar? zweitabzählbar? metrisierbar? separabel?

3. Innere Leere?

3.1. Seien X und Y topologische Räume, sowie $A \subset X$ und $B \subset Y$. Zeigen Sie:
- (a) $\overline{A \sqcup B} = \overline{A} \sqcup \overline{B}$, $(A \sqcup B)^\circ = A^\circ \sqcup B^\circ$ und $\delta(A \sqcup B) = \delta A \sqcup \delta B$.
- (b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ und $\delta(A \times B) = (\delta A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \delta B)$.

3.2. Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume und $A_i \subset X_i$.
- (a) Zeigen Sie $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ und $(\prod_{i\in I} A_i)^\circ \subset \prod_{i\in I} A_i^\circ$.
- (b) Was ist das Innere $(\prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1])^\circ$ von $\prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1]$ in $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$?

4. Hat das Dual eine Wahl?

4.1. [6P] Zu jeder stetigen Abbildung $\varphi : X \to Y$ definieren wir die duale Abbildung

$$\varphi^* : \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(X,\mathbb{R}) : f \mapsto f \circ \varphi.$$

Ist zum Beispiel $\varphi : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Inklusion, dann ist $\varphi^*(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. Aus den Quizzen kennen Sie ebenso die Illustrationen $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$. Im Folgenden seien die Räume X und Y normal, d.h. sie erfüllen T_1 und T_4. Zeigen Sie:
- (a) Genau dann ist $\varphi(X)$ dicht in Y, wenn φ^* injektiv ist.
- (b) Ist die duale Abbildung φ^* surjektiv, dann ist φ injektiv.
- (c) Ist φ injektiv und abgeschlossen, dann ist φ^* surjektiv.

Motivation zu den Aufgaben

Aufgabe 1: Topologische Konstruktionen wie das Innere $\mathring{M}$ in $(X,\mathcal{T})$, der Abschluss $\overline{M}$ in $(X,\mathcal{T})$, der Rand δM in $(X,\mathcal{T})$, oder Eigenschaften wie „M ist dicht in $(X,\mathcal{T})$" sind bezüglich des umgebenden Raumes $(X,\mathcal{T})$ definiert. Wenn dieser ambiente Raum unmissverständlich klar ist, dann unterdrückt man seine Nennung meist zwecks Bequemlichkeit.

Sobald mehr als ein Raum in Frage steht, hier etwa der gesamte Raum $(X,\mathcal{T})$ und ein Teilraum $(O,\mathcal{T}_O)$, muss man besonders genau arbeiten – sowohl in der Formulierung der Aussage als auch in der Argumentation des Beweises. Bitte üben Sie von Anfang an eine angemessen genaue Schreib- und Sprechweise. Lässigkeit, leider auch Nachlässigkeit, kommt im Laufe der Zeit von ganz allein. Erst einmal müssen Sie aber verstehen, wo Präzision nötig und wo Lässigkeit möglich ist. Wählen Sie im Zweifel die Präzision.

Aufgabe 2: Die Vorlesung erklärt die Produkttopologie von $(X,\mathcal{T}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{T}_i)$ als eine grundlegende Konstruktion. Was könnte man von einer solchen Topologie fordern? Am besten die „universelle Abbildungseigenschaft", dass wir beliebige stetige Funktionen $f_i : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X_i,\mathcal{T}_i)$ komponentenweise zu einer stetigen Funktion $f : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T})$ zusammensetzen können. Naiv würde man für $\mathcal{T}$ auf die Box-Topologie tippen, die Sie hier untersuchen sollen. Leider hat $\mathcal{T}_{\text{box}}$ nicht die gewünschten Eigenschaften, siehe (b).

In dieser Aufgabe werden viele Grundbegriffe der Topologie illustriert und geübt. Sie kennen ähnliche Beweise aus der Vorlesung, diese können Sie anpassen. Wie beweist man, dass ein Raum $(X,\mathcal{T})$ erstabzählbar ist? Nach Definition genügt es, zu jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis zu konstruieren. Wie beweist man, dass ein Raum $(X,\mathcal{T})$ nicht erstabzählbar ist? Hierzu genügt es, einen Punkt $a \in X$ vorweisen, der keine abzählbare Umgebungsbasis erlaubt: Zu jeder beliebigen abzählbaren Familie $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Umgebungen von a finde man eine Umgebung U von a mit $U^n \not\subset U$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wie beweist man, dass $(X,\mathcal{T})$ separabel ist? Nach Definition genügt es, eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$ anzugeben. Wie beweist man, dass $(X,\mathcal{T})$ nicht separabel ist? Eine Möglichkeit ist, eine überabzählbare Familie $(U_a)_{a\in A}$ disjunkter offener Mengen $U_a \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$ anzugeben: Jede dichte Teilmenge $D \subset X$ muss jedes U_a schneiden, daraus erhalten wir eine Surjektion $D \twoheadrightarrow A$, und somit ist D überabzählbar.

Aufgabe 3: Abschluss und Inneres sind zentrale Begriffe, hier üben Sie dies in Summen und Produkten. Pikantes Detail: Wie in Aufgabe 1 kommt es auch hier auf das richtige Ambiente an! In der Aussage $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ ist der erste Abschluss in $X \times Y$, der zweite in X, der dritte in Y. Klar, wo sonst? Es ist üblich, das „Offensichtliche" nicht weiter zu betonen, aber die Entschlüsselung bedarf anfangs sicherlich der Übung.

Für endliche und vor allem unendliche Produkte müssen Sie die Definition der Produkttopologie genau lesen und verstehen. Die Berechnung von $(\prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1])^\circ$ zwingt zu dieser Genauigkeit, und das Ergebnis ist einigermaßen überraschend. Intuition? Definition!

Aufgabe 4: Diese Dualisierung ist eine topologische Entsprechung der Dualisierung aus der Linearen Algebra: Zu jedem K–Vektorraum V erhalten Sie den dualen K–Vektorraum $V^* := \operatorname{Hom}_K(V,K)$. Zu jedem $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(U,V)$ erhalten Sie $\varphi^* \in \operatorname{Hom}_K(V^*,U^*)$ durch $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Genau dann ist φ^* surjektiv / rechtsinvertierbar, wenn φ injektiv / linksinvertierbar ist. Genau dann ist φ^* injektiv, wenn φ surjektiv ist.