Blatt 7: Kompakte Fragen, kompakte Antworten

1. Welchen Donut hätten Sie gern?

1.1. „Die" Torusfläche kann man auf verschiedene Arten definieren und betrachten. Zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph sind, indem Sie möglichst explizite (und möglichst wenige) Homöomorphismen konstruieren:

(a) $T_a = \left\{ \begin{pmatrix} (2+\cos(\pi t))\cos(\pi s) \\ (2+\cos(\pi t))\sin(\pi s) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (s,t) \in [-1,1]^2 \right\}$.

(b) $T_b = [-1,1]^2/_\sim$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt wird von $(s,-1) \sim (s,1)$ und $(-1,t) \sim (1,t)$ für $s,t \in [-1,1]$.

(c) $T_c = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$ als Produkt von zwei Kreislinien.

(d) $T_d = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ bezüglich der Äquivalenzrelation $x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$.

2. Kennst du das Land, wo die Quotienten blühen?

2.1. [4P] Gegeben sei im Folgenden der topologische Raum X mit Äquivalenzrelation $\sim$. Bestimmen Sie den Quotientenraum $X/_\sim$ explizit durch einen Homöomorphismus $\bar{f} : X/_\sim \xrightarrow{\sim} Y \subset \mathbb{R}^n$: Finden Sie Y (etwa $\mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{D}^n$, $\mathbb{B}^n$, etc.) sowie eine geeignete Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$, und weisen Sie nach, dass f in der kanonischen Faktorisierung einen Homöomorphismus $\bar{f} : X/_\sim \xrightarrow{\sim} Y$ induziert. Nutzen Sie Kompaktheit! *Zugabe:* Gelingt zu $\hat{f} : X \to Y$ ein Schnitt $g : Y \to X$?

(a) $X = \mathbb{D}^2$ mit $x \sim y \iff x_1 = y_1$ oder $|x_1| = |y_1| = 1$,

(b) $X = \mathbb{R}^3$ mit $x \sim y \iff \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot x = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot y$ und $\min\{|x|,1\} = \min\{|y|,1\}$,

(c) $X = \mathbb{S}^2$ mit $\sim$ erzeugt von $(x,y,z) \sim (x,y,-z)$.

(d) $X = \mathbb{S}^2$ mit $\sim$ erzeugt von $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$.

3. Geht's noch kompakter?

3.1. (a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines topologischen Raums $(X,\mathcal{T})$ kompakt ist. Gilt das auch für die Vereinigung von beliebig vielen kompakten Teilmengen?

(b) Zeigen Sie, dass in einem Hausdorff–Raum der Durchschnitt von beliebig vielen kompakten Teilmengen wieder kompakt ist. Gilt das auch in nicht-hausdorffschen Räumen, wie der Gerade mit doppeltem Ursprung?

(c) Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $x_\infty \in X$ konvergiert. Ist die Menge $K = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x_\infty\}$ kompakt?

3.2. [6P] Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ kompakt. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder Umgebung W von $\{x\} \times Y$ in $X \times Y$ existiert eine offene Umgebung U von $x \in X$, sodass $\{x\} \times Y \subset U \times Y \subset W$ gilt (Tubenlemma).

(b) Die Projektion $p : X \times Y \to X : (x,y) \mapsto x$ ist abgeschlossen.

(c) Gilt Tubenlemma und Abgeschlossenheit auch, wenn Y nicht kompakt ist?

3.3. [2P] Zeigen Sie: Kompakte Hausdorff–Räume $(X,\mathcal{T})$ sind im perfekten Gleichgewicht:

(a) Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt.

(b) Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Ah, Kompaktheit, ein wunderbares Thema! Kompaktheit ist die geeignete topologische Formulierung von Endlichkeit. Bitte machen Sie sich mit diesem zentralen Begriff und seinen Anwendungen möglichst umfassend vertraut. Die Übungen sollen Ihnen helfen.

Aufgabe 1: Sie kennen den Torus $T_a \subset \mathbb{R}^3$ spätestens seit der ersten Topologievorlesung (manche bereits aus Kindertagen vom Strandurlaub oder aus der Schule, etwa dem Englischunterricht :-). Sie können ihn auf viele Weisen konstruieren / herstellen / backen oder sich vorstellen / zeichnen / visualisieren, und jede hat ihre Vorzüge.

Nun haben wir alle nötigen Techniken beisammen: Teilräume, Quotienten, Produkte, wunderbar! Konstruieren Sie möglichst explizite Homöomorphismen zwischen den vier angegebenen Räumen; jeder ist eine Reinkarnation des Torus. Beim Nachweis, dass dies tatsächlich Homöomorphismen sind, hilft Kompaktheit!

Wir werden alle Sichtweisen nutzen: T_a ist die anschaulichste. Schneiden und Kleben wie für T_b verwenden wir in der Flächenklassifikation. Die Produktdarstellung T_c ist speziell aber bequem. Der Quotient $T_d = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist für Überlagerungen die beste Sichtweise.

Aufgabe 2: Quotientenräume fördern unsere Vorstellungskraft... und geeignete mathematische Techniken. Hier können Sie die kanonische Faktorisierung nutzen. Zu jeder stetigen Abbildung f erhalten Sie eine stetige Bijektion $\bar{f}$. Wie können Sie nun sicherstellen, dass $\bar{f}$ ein Homöomorphismus ist? Auf Blatt 5 haben wir gesehen, dass es zum Beispiel reicht, einen Schnitt zu $\hat{f}$ anzugeben. Leider gibt es nicht immer einen Schnitt. Nun haben wir mit Kompaktheit ein neues und starkes Werkzeug zur Hand. Probieren und bewundern Sie selbst, wie Ihnen Kompaktheit hier hilft. Wie immer hilft: üben, üben, üben!

Aufgabe 3: Aufgabe 3.1: Hier geht es darum, die grundlegenden Definitionen und Sätze zur Kompaktheit zu verstehen und richtig anzuwenden. Machen Sie es sich leicht und verwenden Sie die passenden Ergebnisse der Vorlesung!

Aufgabe 3.2: Sie können / sollen beim Tubenlemma einen Beweis der Vorlesung recyclen und anpassen. Die Projektion $p : X \times Y \twoheadrightarrow X$ ist immer offen (warum?), und das schöne Tubenlemma garantiert zudem Abgeschlossenheit, falls Y kompakt ist.

Aufgabe 3.3: Die Hausdorff–Eigenschaft benötigt möglichst viele offene Mengen, um je zwei Punkte durch disjunkte Umgebungen zu trennen (mehr ist leichter). Die Kompaktheit hingegen benötigt möglichst wenige offene Mengen, damit jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält (weniger ist leichter).

Jeder kompakte Hausdorff–Raum $(X, \mathcal{T})$ ist im perfekten Gleichgewicht: Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist ist immer noch kompakt, aber nicht mehr hausdorffsch. Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist immer noch hausdorffsch, aber nicht mehr kompakt. Ommm, kompakt und hausdorffsch zum inneren Gleichgewicht.

Diese Aufgabe können Sie ungeschickt anpacken, wie immer, wenn Sie unbedingt wollen. Geschickt ist, wie so oft, das Kompakt-Hausdorff-Kriterium aus der Vorlesung.