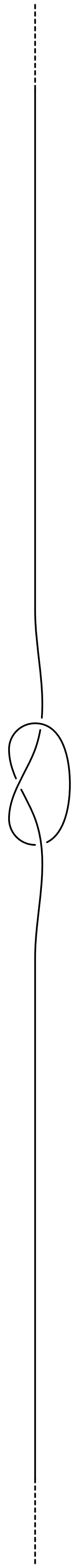

Blatt 6: Topologische Seifenoper: Verbindung, Trennung, Fortsetzung

1. Verkleben topologischer Räume: Cho ain Cheibenkleista!

1.1. Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{D}^n$. Auf $X = X_1 \sqcup X_2$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(1,x) \sim (2,x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Konstruieren Sie explizit Homöomorphismen $(f,g) : X/_\sim \cong \mathbb{S}^n$ durch Zerlegen und Verkleben. *Zugabe:* Gelingt das rational?

1.2. [5P] Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n$. Auf $X = X_1 \sqcup X_2$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(1,x) \sim (2, x/|x|^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Konstruieren Sie explizit Homöomorphismen $(f,g) : X/_\sim \cong \mathbb{S}^n$ durch Zerlegen und Verkleben. *Den fünften Punkt in dieser Aufgabe gibt es für die übersichtliche Darstellung der Lösung.*

1.3. Seien $(f_i, g_i) : X_i \cong Y_i$ Homöomorphismen. Konstruieren Sie hieraus Homöomorphismen $(f,g) : X_1 \sqcup X_2 \cong Y_1 \sqcup Y_2$, kanonisch, ohne offene Mengen zu betrachten.

2. First Aid: Universell hilft schnell!

2.1. Zeigen Sie $X := \mathbb{R}^{n+m} \smallsetminus (\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geq 1$, $m \geq 0$. Für $(n,m) = (1,0)$ ist das Betrag und Vorzeichen, für $(2,0)$ sind dies Polarkoordinaten: Betrag und Richtung, für $(2,1)$ sind dies Zylinderkoordinaten.

2.2. [4P] Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Der *Graph* einer Abbildung $f : X \to Y$ ist die Teilmenge $\Gamma_f = \{ (x,y) \in X \times Y \mid f(x) = y \}$ im Produktraum $X \times Y$. Weiter sei $\pi : \Gamma_f \to X : (x,y) \mapsto x$ die Projektion auf X. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung π ist bijektiv und stetig.
(b) Die Abbildung π ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig ist.
(c) Ist f stetig und Y hausdorffsch, dann ist der Graph Γ_f abgeschlossen in $X \times Y$.

3. Trennung ohne Herzschmerz

3.1. [3P] Zeigen Sie: Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ sind äquivalent:

(a) X ist ein T_1-Raum.
(b) Jede einelementige Menge $\{x\} \subset X$ ist abgeschlossen.
(c) Jede Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt all ihrer Umgebungen.

3.2. Zeigen Sie: Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ sind äquivalent:

(a) X ist ein T_2-Raum.
(b) Die Diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen.
(c) Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x ist $\{x\}$.

4. Fortsetzung folgt ...

4.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung mit $|f(x)| \to \infty$ für $x \to \pm\infty$, zum Beispiel $f(x) = (x,0,0)$ für $|x| \geq 1$. Wir werden in Kapitel F mit Kompaktheit zeigen, dass f abgeschlossen ist. Die Skizzen im Rand dieses Aufgabenblattes zeigen vier Beispiele.

(a) Zeigen Sie, mit einem Satz der Vorlesung, dass f eine Retraktion erlaubt.
(b) Man skizziere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{C} : x \mapsto (x, \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x - x^2/100})$ und nenne eine Retraktion.

Motivation zu den Aufgaben

Aufgabe 1: Universelle Abbildungseigenschaften (UAE) sind nützliche Werkzeuge, die Sie kennen und nutzen sollten. Auf den ersten Blick scheinen sie abstrakt, und Sie sehen vielleicht nicht sofort, was Sie damit anfangen können. Wozu also dienen sie? UAE helfen immer dann, wenn Sie stetige Abbildungen definieren / konstruieren wollen, konkret aus einer Summe oder einem Quotienten heraus oder in einen Teilraum oder ein Produkt hinein. Die jeweilige UAE sagt Ihnen, was Sie bereitstellen müssen, egal ob ganz konkret wie in Aufgabe 1.1. und 1.2. oder etwas abstrakter in Aufgabe 1.3.

In dieser Aufgabe sind stetige Abbildungen $X_1 \sqcup X_2/_\sim \to \mathbb{S}^n$ gesucht. Suchen Sie dazu erst geeignete stetige Abbildungen $X_i \to \mathbb{S}^n$. Warum können Sie diese zu einer stetigen Abbildung $X_1 \sqcup X_2 \to \mathbb{S}^n$ und schließlich zur gewünschten Abbidung $X_1 \sqcup X_2/_\sim \to \mathbb{S}^n$ zusammenbauen? Für die Umkehrabbildung $\mathbb{S}^n \to X/_\sim$ genügt *eine* Formel alleine nicht. Auch hier stellt die Vorlesung das passende Werkzeug bereit: den Verklebesatz E1P.

Aufgabe 2: Zylinderkoordinaten sind überall nützlich, auch in Geometrie und Topologie. Zu 2.2 machen Sie sich einige Skizzen zu stetigen und unstetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Für $f(x) = (x, f_2(x), f_3(x))$ ist eine Retraktion nicht schwer zu finden (b). Aber für einen Knoten (a) sieht man zunächst keine Retraktion, vielleicht glaubt man gar nicht daran. Mit den Werkzeugen der Vorlesung können Sie diese Frage kurz und elegant lösen! Wenn die Phantasie versagt, hilft der Fortsetzungssatz von Tietze: Er garantiert uns die Existenz stetiger Abbildungen, die wir sonst nur mühsam beschaffen können. Wenn Sie zusätzlich Anschauung oder Intuition wollen, so kann ich zwei Geschichten anbieten:

Physikalische Intuition: Wir denken uns $A = f(\mathbb{R})$ als Draht mit stetiger Temperaturverteilung $g : A \xrightarrow{\sim} \,]-1,1[$, strikt monoton längs A, zudem zeitlich konstant gehalten. Der umgebende Raum habe anfangs die Temperatur 0. Nun lassen wir die Wärme im $\mathbb{R}^3$ fließen, etwa bis zum Gleichgewicht: In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ herrscht schließlich eine Temperatur $G(x) \in \,]-1,1[$. In $x \in A$ ist dabei $G(x) = g(x)$ die vorgegebene Temperatur. Damit ist $g^{-1} \circ G : \mathbb{R}^3 \to A$ eine Retraktion. Was beweist das? Noch gar nichts. Aber es ist eine schöne Geschichte. Wie jedes Märchen kann und soll es Ihre Phantasie anregen…

Geometrische Intuition: Ist $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ stückweise affin (oder glatt), so existiert eine Schlauchumgebung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x,0,0) = f(x)$. Zudem ist $B = F(\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2)$ eine abgeschlossene Umgebung von A in $\mathbb{R}^3$, $F(\mathbb{R} \times \mathbb{B}^2)$ offen und $F(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ der Rand: Hier können wir es explizit herstellen, später können wir es allgemein folgern aus der Invarianz des Gebietes. Wir können damit $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ konstruieren: Außerhalb von B setzen wir $G = 0$. Auf B setzen wir $G \circ F(x,y,z) = x(1 - y^2 - z^2)$. Die Verklebung ist stetig und erfüllt $G \circ f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Was beweist das? Mehr als nötig! Die Konstruktion von F benötigt Sorgfalt und gelingt nur für zahme Knoten, nicht für wilde wie rechts skizziert. Eine weitere Anregung Ihrer Phantasie…