Blatt 5: Tolopogische Grunzbegriffe

1. Matrizen gehen zu Mitternacht über den Jordan.

1.1. Sei $\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^4$ mit euklidischer Topologie. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge T der (über $\mathbb{R}$ trigonalisierbaren) Matrizen, deren charakteristisches Polynom in $\mathbb{R}$–Linearfaktoren zerfällt, ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Sei S die Teilmenge der (separablen) Matrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerten (in $\mathbb{C}$). Dann ist S offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) In $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist T abgeschlossen und S offen. Ist $S \cap T$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ offen?

(d) Jede ε–Umgebung von $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ enthält eine Matrix $\notin D$ bzw. $\in D$. Die Menge D der über $\mathbb{R}$ diagonalisierbaren Matrizen ist weder offen noch abgeschlossen. Ihr Abschluss ist $\overline{D} = T$, ihr Inneres $D^\circ = S \cap T$.

2. Mutter Topologie und ihre Kinder

2.1. Welche Eigenschaften eines topologischen Raumes vererben sich auf jeden Teilraum: (a) hausdorffsch? (b) metrisierbar? (c) erstabzählbar? (d) zweitabzählbar?

2.2. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Zeigen Sie:

[2P] (a) Zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ ist $Y \setminus f(X)$ diskret in $(Y, f_* \mathcal{T}_X)$.

(b) Ist $f : X \to Y$ surjektiv, dann ist $f : (X, f^* \mathcal{T}_Y) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ offen.

3. Schnitt und Retraktion: Immer dieses Hin und Her!

3.1. (a) Seien $s : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $p : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ stetige Abbildungen mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Man nennt p eine *Retraktion* zu s bzw. s einen *Schnitt* zu p. Zeigen Sie, dass s eine Einbettung und p eine Identifizierung ist.

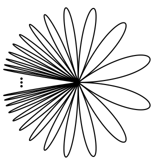
(b) Erlaubt die Einbettung $s : \{-1, 1\} \hookrightarrow [-1, 1] : x \mapsto x$ eine Retraktion?

(c) Erlaubt die Identifizierung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ einen Schnitt?

3.2. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Auf $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir $x \sim y$ durch $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

[3P] (a) Nennen und skizzieren Sie die Äquivalenzklassen für die Fälle $n = 1, 2, 3$.

(b) Konstruieren Sie zueinander inverse Homöomorphismen $(f, g) : X/_\sim \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$.



4. Unendliches Bouquet: X liebt mich, X liebt mich nicht, X liebt mich ...

Der Quotient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z} = \mathbb{R}/_\sim$ entsteht durch Zusammenschlagen von $\mathbb{Z}$, als Quotient von $\mathbb{R}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y$ definiert durch $x = y$ oder $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}$.

4.1. Zu $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir

$$B(\mathbb{Z}, \varepsilon) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(k, \varepsilon(k)) \subset \mathbb{R} \quad \text{und} \quad U(\mathbb{Z}, \varepsilon) = q(B(\mathbb{Z}, \varepsilon)) \subset \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass $U(\mathbb{Z}, \varepsilon)$ eine Umgebung des Punktes $\mathbb{Z} \in \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ ist und das Mengensystem $\{U(\mathbb{Z}, \varepsilon) \mid \varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}\}$ eine Umgebungsbasis von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$.

4.2. (a) Ist der Quotientenraum $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ hausdorffsch?

[7P] (b) Konvergiert in $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ die Folge $[n]_{n \in \mathbb{N}}$? und $[2^{-n}]_{n \in \mathbb{N}}$? und $[n + 2^{-n}]_{n \in \mathbb{N}}$?

(c) Zeigen Sie: Der Raum $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ ist weder erstabzählbar noch zweitabzählbar. *Hinweis:* Nehmen Sie erstabzählbar an und nutzen Sie ein Diagonalargument.

(d) Ist $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ metrisierbar? Können Sie $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten?

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1: Die Rückkehr der Mitternachtsformel! Aus der Schule kennen Sie sehr gut reelle Polynome zweiten Grades. Diese bilden die Menge $\mathbb{R}[X]_2^1 = \{ X^2 + pX + q \} \cong \mathbb{R}^2$ mit euklidischer Topologie. Hierin ist die Teilmenge $D \subset \mathbb{R}[X]_2^1$ aller Polynome mit doppelter Nullstelle abgeschlossen, ebenso die Teilmenge $R \subset \mathbb{R}[X]_2^1$ aller Polynome mit reellen Nullstellen. Das sehen Sie mit Hilfe der Mitternachtsformel und der Diskriminante $\Delta_2 : \mathbb{R}[X]_2^1 \to \mathbb{R} : X^2 + pX + q \mapsto p^2 - 4q$, dank $D = \Delta_2^{-1}(\{0\})$ und $R = \Delta_2^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

Matrizen und Polynome kennen Sie gut aus der linearen Algebra und nutzen Sie überall. Aufgabe 1 ist eine Wiederholung und Präzisierung aus topologischer Sicht. Auch für Matrizen betrachten wir hier den einfachsten Fall: 2×2–Matrizen und quadratische Polynome. Alle Aussagen gelten genauso in beliebiger Dimension, die Beweise sind raffinierter.

Ein Polynom mit lauter verschiedenen Nullstellen (über $\mathbb{C}$) heißt *separabel*. Die Menge dieser Polynome ist offen und dicht, sie sind sozusagen typisch. Die Menge $T \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ besteht aus den über $\mathbb{R}$ *trigonalisierbaren* Matrizen, und $S \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind die *separablen* Matrizen, also solche mit separablem charakteristischen Polynom. Auch S ist offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Die hier gestellten topologischen Fragen werden ganz leicht mit den wunderbaren Werkzeugen der linearen Algebra: charakteristisches Polynom, Diskriminante, Basiswechsel zu einer triangulären bzw. Jordan–Matrix. Die Aufgabe wird über $\mathbb{C}$ noch einfacher. Versuchen Sie es, wenn Sie möchten.

Aufgabe 2: Neue Räume aus alten! Teilräume sind hierzu die einfachste und eine wichtige Möglichkeit. Die Definition der Teilraumtopologie ist sehr naheliegend, bedarf aber etwas Übung. Genau dies leistet diese Aufgabe, zudem werden Hausdorff–Eigenschaft und die Abzählbarkeitsaxiome hier wiederholt und eingesetzt. Viele wichtige Konstruktionen der Topologie nutzen je nach Bedarf *initiale* bzw. *finale Topologien*. Die Teilraumtopologie ist die initiale Topologie bezüglich der Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_x)$.

Aufgabe 3: Neben Teilräumen sind Quotienten eine sehr wichtige und allgegenwärtige Konstruktionen von neuen Räumen aus alten. (Alda, ich schwör!) Diese Aufgabe beginnt mit dem besonders einfachen und sympathischen Fall, dass eine Identifizierung p mit Schnitt s vorliegt, oder äquivalent eine Einbettung s mit Retraktion p. Der topologische Raum X ist dann homöomorph zum Teilraum $s(X) \subset Y$ und zum Quotienten Y/R_p.

Schnitt und Retraktion sind jedoch nicht immer möglich! Grundlegende Beispiele wie $s : \{-1, 1\} \hookrightarrow [-1, 1]$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ sollten Sie genau verstehen und als Freunde fürs Leben ins Herz schließen. Nutzen Sie den Zwischenwertsatz!

Aufgabe 4: Hier geht es um einen Quotientenraum, den wir zwar leicht definieren können, aber nicht ganz so leicht verstehen. Sie erkennen daran bereits gut, dass Quotienten ein bequemes und mächtiges Konstruktionswerkzeug sind. Ihre Intuition und geometrische Anschauung wird Ihnen hier vermutlich wenig helfen, werden aber hoffentlich durch diese Aufgabe wesentlich erweitert und geschärft. Diese Aufgabe ist technisch anspruchsvoll und zwingt zur Präzision in Definition und Argumentation. Das ist volle Absicht, denn man lernt und wächst nur mit seinen Aufgaben. Danach sollten Quotientenräume nichts mystisches mehr sein: Nutzen Sie die passenden Werkzeuge, Definitionen und Sätze!