Blatt 4: Jetzt wird's abstrakt, endlich!

1. Endlich koendlich!

1.1. Zeigen Sie (durch einen Beweis) oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass die folgenden Mengensysteme Topologien sind:
(a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subset X \mid X \smallsetminus O \text{ ist endlich} \,\}$ auf einer beliebigen Menge X,
(b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset\} \cup \{\, O \subset X \mid X \smallsetminus O \text{ ist geradzahlig} \,\}$ auf $X = \{a,b,c,d\}$.

1.2. Sei $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{T}_1^R = \{\emptyset, \mathbb{R},]a,\infty[\mid a \in R\}$ sowie $\mathcal{T}_2^R = \{\emptyset, \mathbb{R}, [a,\infty[\mid a \in R\}$.
[3P] Sind das Topologien auf $\mathbb{R}$? Welche der Axiome (O1–3) sind erfüllt, welche nicht?

2. Topologische Kurvendiskussion und häufige Indikatoren

2.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3(x-1)$. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist f (a) stetig, (b) offen, (c) ein lokaler Homöomorphismus, (d) ein lokaler Diffeomorphimus?

2.2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Eine Teilfolge ist von der Form $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in X$ konvergiert, dann ist a Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls a eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dann gilt auch die Umkehrung.

2.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zu $A \subset X$ ist die Indikatorfunktion
[1P]
$$\mathbf{I}_A : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}_A$ genau dann stetig ist, wenn A offen und abgeschlossen ist.

3. Reihenweise Metriken

Sei $D = (d_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbmetriken $d_i : X \times X \to [0,1]$, notfalls gestutzt, auf einer gemeinsamen Menge X. Auf X wollen wir damit eine Topologie $\mathcal{T}_D$ definieren. Für $a \in X$ und jede endliche Menge $J \subset I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ seien Basisumgebungen gegeben durch
$$U(a;J,\varepsilon) := \left\{\, x \in X \;\middle|\; d_i(x,a) < \varepsilon \text{ für alle } i \in J \,\right\} = \bigcap\nolimits_{i\in J} B_i(a,\varepsilon),$$
sowie die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_a = \{\, U(a;J,\varepsilon) \mid J \subset I \text{ endlich}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$. Man zeigt leicht, dass (UB1-3) erfüllt ist und diese Umgebungsbasen eine Topologie $\mathcal{T}_D$ auf X definieren. Wir wollen nun untersuchen, ob $\mathcal{T}_D$ metrisierbar ist, falls $I = \mathbb{N}$ abzählbar ist. Für $i \in \mathbb{N}$ wählen wir $a_i > 0$ mit $\sum_{i=0}^\infty a_i = 1$, etwa $a_i = 2^{-i-1}$, und definieren
$$d : X \times X \to [0,1] \quad \text{durch} \quad d(x,y) = \sum\nolimits_{i=0}^\infty a_i d_i(x,y).$$

3.1. Zeigen Sie: (a) Die Abbildung d ist wohldefiniert und eine Halbmetrik.
[8P] (b) Zu $J \subset \mathbb{N}$ endlich und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_d(a,\delta) \subset U(a;J,\varepsilon)$, wobei $B_d(a,\delta)$ der offene Ball bzgl. d ist.
(c) Umgekehrt gibt es zu $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Menge $J \subset \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U(a;J,\varepsilon) \subset B_d(a,\delta)$ gilt.
(d) Folgern Sie $\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_d$, das heißt, die Halbmetrik d erzeugt die Topologie $\mathcal{T}_D$.
(e) Äquivalent sind: d ist Metrik $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_D$ ist metrisierbar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_D$ ist hausdorffsch $\Leftrightarrow$ Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(x,y) > 0$.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1: Die Axiome (O1–3) einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X sind zwar denkbar einfach, aber in manchem Beispiel ist ihre Gültigkeit nicht offensichtlich. Wie immer muss man Axiome sorgfältig nachprüfen. Verwundert rufen Sie: „Was, Axiome nachprüfen?“ Ja!

Das betrachtete Axiomensystem bildet das Fundament der aufzubauenden Theorie: Alle Folgerungen werden mit Hilfe logischer Schlussregeln allein aus den Axiomen abgeleitet. In diesem Sinne ist ein Axiom eine Voraussetzung: Sie wird nicht aus anderen Aussagen abgeleitet. Die axiomatisch aufgebaute Theorie besagt dann: Wenn diese und jene Voraussetzungen (Axiome) erfüllt sind, dann gelten diese und jene Folgerungen (Sätze).

Nun ist die Mathematik, allem Anschein oder Aberglauben zum Trotz, nicht nur axiomatisch, sie ist nicht nur Theorie, sondern auch Praxis. Wir wollen auch Beispiele und Anwendungen! Um etwa zu zeigen, dass ein vorgelegtes Mengensystem den Axiomen (O1–3) genügt, müssen wir diese Eigenschaften nachweisen. Ganz einfach. Bei Vorlage eines konkreten Falls hat es nämlich überhaupt keinen Sinn, Axiome zu *fordern*, man muss sich schon die Mühe machen und nachprüfen, ob die gewünschten Eigenschaften hier *gelten*. Erst dann sind die Begriffe und Methoden der Theorie anwendbar.

Aufgabe 2: Aufgabe 2.1 illustriert topologische Eigenschaften anhand einer einfachen reellen Funktion. Weitere Beispiele sind $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$. Diese werden wir später als Beispiele von *Überlagerungen* untersuchen.

In Aufgabe 2.2 wiederholen Sie den Zusammenhang zwischen Häufungspunkten und Teilfolgen. Das kennen Sie gut aus der Analysis. In der Topologie gilt dies fast genauso, Sie benötigen jedoch das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 3: Die dritte Aufgabe erklärt Ihnen eine sehr vielseitige Konstruktion von Metriken. Sie ist anspruchsvoll, insbesondere die Fragen (b) und (c). Doch die gute Nachricht ist: Wenn Sie das können, dann werden ε und δ Sie nie mehr schrecken! „Epsilon, wo ist dein Stachel? Delta, wo ist dein Sieg?“ (1. Kor. 15,55) Sie wiederholen und verfestigen hier nochmals das nötige Vokabular: Frage (a) behandelt einfache Rechnungen zu Metriken und Reihen. Fragen (b), (c) und (d) vergleichen die beiden Umgebungsbasen und die von ihnen erzeugte Topologie. Frage (e) fasst dies als Metrisierungssatz zusammen, das ist sehr nützlich und universell einsetzbar.

Wir werden dieses Ergebnis mehrfach anwenden: Bei der Metrisierung von abzählbaren Produkten, insbesondere beim Metrisierungssatz von Urysohn. Noch konkreter stellt die Vorlesung hierzu die Topologie der kompakten Konvergenz vor, die Sie nun metrisieren können. Die kompakte Konvergenz ist der für Potenzreihen passende Begriff. Es handelt sich also keineswegs um entlegene exotische Fragen, sondern um zentrale Begriffe der Analysis und der Topologie. Diese Konstruktion begegnet Ihnen zum Beispiel in der Funktionalanalysis bei der Metrisierung von Fréchet–Räumen, das sind topologische Vektorräume, die durch eine abzählbare Familie von Halbnormen topologisiert werden.