Blatt 3: Metrische Räume — mit Abstand die beste Distanzlehre!

1. Lernen Sie stetig dazu!

1.1. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:
[2P] Jeder offene Ball $B(a,r)$ in (X,d) ist offen in (X,d). (Kein Scherz!)
Jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}(a,r)$ in (X,d) ist abgeschlossen in (X,d).

1.2. Für jede Abbildung $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ metrischer Räume sind äquivalent:
[6P] (a) Die Abbildung f ist stetig im Sinne der ε-δ-Definition.
(b) Die Abbildung f ist folgenstetig,
das heißt aus $x_n \to a$ in (X,d_X) folgt $f(x_n)\to f(a)$ in (Y,d_Y).
(c) Für jede offene Menge O in (Y,d_Y) ist das Urbild $f^{-1}(O)$ offen in (X,d_X).
(d) Für A abgeschlossen in (Y,d_Y) ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in (X,d_X).

2. Respektieren Sie mathematische Normen!

2.1. Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum und $\langle - \mid - \rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ ein Skalarprodukt.
Zeigen Sie hierfür die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung.

2.2. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\Omega_n=\{-n,\dots,n\}\subset\mathbb{Z}$ und $\Omega_\infty=\mathbb{Z}$. Sei $V_n=\ell^2(\Omega_n,\mathbb{C})$ und hierauf $\langle - \mid - \rangle_n : V_n\times V_n\to\mathbb{C}$ gegeben durch $\langle f \mid g\rangle_n := \sum_{k=-n}^{n}\overline{f(k)}g(k)$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist diese Summe endlich, und $\langle - \mid - \rangle_n$ ist offensichtlich ein Skalarprodukt.
(a) Zeigen Sie: Für $n=\infty$ ist diese Reihe absolut konvergent.
(b) Anschließend: Warum ist auch $\langle - \mid - \rangle_\infty$ ein Skalarprodukt?

2.3. Auf $\mathbb{R}^n$ nutzen wir die ℓ^p–Norm $|-|_p$ für $1\le p\le\infty$. (Dies ist tatsächlich eine Norm und hier nicht zu zeigen.) Zeigen Sie für alle $x\in\mathbb{R}^n$ die Ungleichungen $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le c\cdot|x|_\infty$. Was ist hier die beste Konstante c? Sind die von diesen Normen erzeugten Topologien auf $\mathbb{R}^n$ dieselben?

2.4. Auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ vergleichen wir die ℓ^p–Norm und die ℓ^q–Norm für $1\le p<q\le\infty$. Zu $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $f_n = n^{-1/p}\cdot\mathbf{I}_{\{1,\dots,n\}}$. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty}|f_n|_p$ und $\lim_{n\to\infty}|f_n|_q$. Sind die von diesen Normen erzeugten Topologien dieselben?

2.5. Für $1\le p\le\infty$ betrachten wir $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mit der ℓ^p–Norm. Hierin liegen die Funktionen
[2P]

$$g_n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}:k\mapsto\begin{cases}2^{-k} & \text{falls } k\le n,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge? Konvergiert sie in $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$? Ist $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ vollständig?

3. Klein, aber fein… und insgesamt neun.

3.1. Finden Sie neun Topologien auf einer Menge X mit drei Elementen, sodass die zugehörigen Räume paarweise nicht homöomorph sind. *Hinweis:* Es gibt 29 Topologien auf X, und diese bilden neun Homöomorphieklassen.

3.2. Welche der neun Topologien aus 1.2. sind hausdorffsch? metrisierbar?

3.3. Zeigen Sie, dass ein endlicher topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ genau dann metrisierbar
[2P] ist, wenn $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie ist. Ist eine solche Metrik dann eindeutig?

Motivation zu den Aufgaben

Aufgabe 1: Diese Aufgabe zeigt, wie sich Stetigkeit bezüglich der Metrik d allein mit den offenen Mengen, also mit der Topologie $\mathcal{T}_d$, formulieren lässt. Das ist durchaus bemerkenswert, wenn man's recht bedenkt. Dieser fundamentale Zusammenhang leistet den Übergang vom metrischen Raum (X,d) zum topologischen Raum $(X,\mathcal{T}_d)$, wie in der Vorlesung erklärt.

Die gute Nachricht: Alles bleibt gültig, was Sie bisher über Konvergenz und Stetigkeit gelernt haben: Für $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ usw. benutzen Sie seit jeher die euklidische Metrik (aus der Norm, diese dank Skalarprodukt), und die euklidische Topologie tut genau das richtige. Warum machen wir uns dann die Mühe? Ganz einfach: weil es oft nötig oder zumindest bequemer ist, Topologien statt Metriken zu betrachten.

Aufgabe 2: Normierte Vektorräume sind ein gute Grundlage für die Analysis. Auf jedem endlich-dimensionalen Vektorraum, hier $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, sind je zwei Normen äquivalent, wie wir später dank lokaler Kompaktheit beweisen werden. Sie können dies hier bereits für die ℓ^p–Normen leicht und explizit nachrechnen.

Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gilt die topologische Äquivalenz nicht! Das einfachste Beispiel ist der Raum $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ bzw. $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ der Folgen mit endlichem Träger: Hierauf sind die ℓ^p–Normen definiert, aber je zwei sind topologisch verschieden, wie wir hier sehen. Es gibt demnach auf $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ überabzählbar viele nicht-äquivalente Normen!

Wir arbeiten hier reell $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder komplex $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Typische Mengen sind $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$ für Folgen. Die Vervollständigung von $\mathbb{K}^{(\Omega)}$ bezüglich der ℓ^p–Norm ist der Raum $\ell^p(\Omega;\mathbb{K})$ der p–summierbaren Folgen. Für verschiedene Exponenten $1 \le p < q \le \infty$ sind dies verschiedene Räume $\ell^p(\Omega;\mathbb{K}) \neq \ell^q(\Omega;\mathbb{K})$. Um diese Normen bequem zu vergleichen, nutzen wir hier den gemeinsamen Teilraum $\mathbb{K}^{(\Omega)}$, der in jedem $\ell^p(\Omega;\mathbb{K})$ liegt.

Aufgabe 3: Endliche Topologien sind vor allem als kombinatorische Objekte interessant. Diese Aufgabe soll zunächst illustrieren, dass es viele Topologien gibt, selbst auf kleinen Trägermengen. Zudem sollen Sie hier einige topologische Grundbegriffe einüben.

Endliche Räume sind ein Baby-Beispiel, dafür aber sehr konkret. Für analytische und geometrische Anwendungen betrachten wir vor allem topologische Räume $(X,\mathcal{T})$, deren Trägermenge X und Topologie $\mathcal{T}$ unendlich sind. Eine Aufzählung aller offenen bzw. abgeschlossenen Mengen kommt dann nicht mehr in Frage. Wir entwickeln daher im Folgenden raffiniertere Werkzeuge, um auch mit solchen Objekten umgehen zu können.