Blatt 2: Ich glaub's geht los…

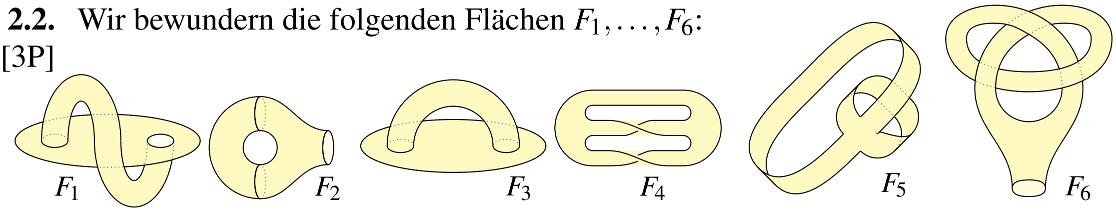
1. Offensichtlich doch nicht ganz leicht

1.1. [3P] (a) Sei $X = \mathbb{R}^2$ oder $X = \mathbb{D}^2$ und $A \subset X$ abzählbar. Ist $X \smallsetminus A$ wegzusammenhängend? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.
(b) Zeigen Sie $\mathbb{R}^1 \ncong \mathbb{R}^2$: Es existiert kein Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$.
(c) Zeigen Sie $\mathbb{S}^1 \ncong \mathbb{D}^2$: Es existiert kein Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2$.

2. Klassifikation der Flächen: nur biegen, nicht brechen!

2.1. Für unsere Modellflächen $F^{\pm}_{g,r}$ gilt $\chi(F^{+}_{g,r}) = 2-2g-r$ und $\chi(F^{-}_{g,r}) = 1-g-r$. Wie können Sie dies berechnen? Nutzen Sie eine von vielen Möglichkeiten!

2.2. [3P] Wir bewundern die folgenden Flächen $F_1, \dots, F_6$:



(a) Alle sechs Flächen haben dieselbe Euler-Charakteristik, welche?
(b) Welche der Flächen sind orientierbar, welche nicht? Bestimmen Sie für jede Fläche F_i die Anzahl der Randkomponenten r_i.
(c) Bestimmen Sie die Modellfläche $F^{\varepsilon_i}_{g_i,r_i}$, zu der die Fläche F_i homöomorph ist. Welche der Flächen $F_1, \dots, F_6$ sind demnach homöomorph, welche nicht?

3. Masslose(s) Euler–Spiegelei

3.1. [2P] Sei $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden. Finden Sie eine Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{B}^2 \subset X \subset \mathbb{D}^2$, sodass X Euler–messbar ist, aber $\tau(X)$ nicht. Was ist $\mu_2(X)$? Ist X sternförmig? konvex?

4. Oh là là, der Eisenbahn!

4.1. [4P] (a) Zeigen Sie, dass die französische Eisenbahnmetrik eine Metrik ist:

$$d = d_{SNCF} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x,y) \mapsto \begin{cases} |x-y|_2 & \text{falls } \mathbb{R}x = \mathbb{R}y, \\ |x|_2 + |y|_2 & \text{falls } \mathbb{R}x \neq \mathbb{R}y. \end{cases}$$

(b) Skizzieren Sie die offenen Bälle $B((2,1),2)$ und $B((0,1),3)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$.
(c) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$ konvergiert.
(d) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) mit $b_n = (\frac{1}{n}, 1)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$ nicht konvergiert.
(e) Zugabe:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} r(x) \cdot \varphi(x) & \text{falls } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } x = (0,0) \end{cases}$$

Zu $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ seien $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi[$ die Polarkoordinaten. Ist die Abbildung f stetig bzgl. $d = d_{SNCF}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Ihr Topologie-Team stellt Ihnen jede Woche gut abgestimmte Aufgaben, damit Sie Ihr mathematisches Handwerk einüben und vertiefen. Unser gemeinsames Ziel ist, dass Sie die Techniken verstehen und beherrschen: selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Wenn Sie wissen wollen, was wir uns zu den Aufgaben gedacht haben, dann sind Sie hier richtig. Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend zu wissen, was hier eigentlich passiert, und wie der größere Zusammenhang aussieht.

Aufgabe 1: Um zu zeigen, dass zwei Räume X und Y homöomorph sind, genügt es, einen Homöomorphismus $(f,g) : X \cong Y$ zu finden und explizit anzugeben. Um hingegen $X \not\cong Y$ zu beweisen, genügt es *nicht*, keinen Homöomorphismus zu finden und erfolglos aufzugeben. Zum Beweis von $X \not\cong Y$ müssen Sie ein Hindernis benennen! In den einfachen Beispielen $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{D}^2$ genügt hierzu der Wegzusammenhang und ein einfacher Trick: Aus $(f,g) : X \cong Y$ folgt $X \smallsetminus A \cong Y \smallsetminus B$ für $A \subset X$ und $B = f(A)$.

Aufgabe 2: Flächen kommen in diversen Formen und sind nicht immer leicht als gleich oder verschieden zu erkennen. In dieser Aufgabe können Sie erste Erfahrungen sammeln. Wenn Sie möchten, können Sie versuchen, Homöomorphismen durch Skizzen zu visualisieren; das ist aber schon in den gezeigten Fällen nicht ganz einfach! Der Flächenklassifikationssatz liefert Ihnen zur Lösung dieses Problems einen erstaunlich einfachen Algorithmus: Es genügt, die Nicht/Orientierbarkeit festzustellen, die Anzahl der Randkomponenten und die Euler–Charakteristik zu berechnen. Noch einfacher geht es nicht!

Aufgabe 3: Das Euler–Maß $\mu_n : \mathscr{M}_n \to \mathbb{Z}$ ist nicht für alle Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert, sondern nur für die Euler–messbaren. Dies beinhaltet alle Polyder $K = |\mathscr{K}| \subset \mathbb{R}^n$, und hier gilt die erstaunliche Gleichung $\mu_n(K) = \chi(\mathscr{K})$. Euler-messbar sind außerdem alle konvex-offenen Mengen, sowie alle polykonvexen Mengen, also endliche Vereinigungen konvexer Kompakta. Jedoch sind nicht alle konvexen Mengen Euler–messbar! Außerdem ist Euler–Messbarkeit nicht stabil unter Koordinatenwechseln, etwa Drehungen und Spiegelungen. In dieser Aufgabe sollen Sie ein schönes Gegenbeispiel finden.

Aufgabe 4: Die französische Eisenbahnmetrik ist ein beliebtes Beispiel für eine ungewöhnliche Metrik auf der Menge $\mathbb{R}^2$: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei französischen Städten x und y führt über Paris, es sei denn beide Städte liegen auf einer gemeinsamen Eisenbahnstrecke nach Paris. Diese Aufgabe soll die Axiome einüben und drastisch illustrieren, dass Metriken sehr vielgestaltig sind.

Anekdote, um auch die Deutsche Bahn zu würdigen: Sei X die Menge der DB-Haltepunkte und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x,y) \mapsto d(x,y)$ der günstigste Fahrpreis von x nach y in Euro. Soweit ich weiß erfüllt dies $d(x,x) = 0$ und $d(x,y) > 0$ für alle $x \neq y$. Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$ ist manchmal verletzt, und erstaunlicherweise auch die Dreiecksungleichung: Manchmal ist es billiger, einen Umweg zu fahren. Demnach ist d keine Metrik!

Zur Parität noch ein schönes Schweizer Beispiel, mit Gruß an unseren lieben helvetischen Kollegen: Sei X die Menge der Berghütten und $d(x,y)$ die Wanderzeit von x nach y; solche Zeitangaben finden Sie auf den Wegweisern entlang der Wanderwege. Dieses realistische und sehr nützliche Abstandsmaß erfüllt (M0,1,3), ist aber nicht symmetrisch!