Blatt 1: Willkommen in der Topologie!

1. BILD UND URBILD DIR DEINE MEINUNG!

1.1. [2P] Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, sowie A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von Y. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Urbilder unter f:

(a) $f^{-1}(Y) = X$

(b) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

(c) $f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

(d) Zugabe: $f^{-1}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

1.2. [2P] Seien nun A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von X. Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen gelten. Wenn nicht, gilt dann zumindest eine der beiden Inklusionen? Gilt Gleichheit, wenn f injektiv bzw. surjektiv ist?

(a) $f(X) \stackrel{?}{=} Y$

(b) $f(A \setminus B) \stackrel{?}{=} f(A) \setminus f(B)$

(c) $f\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \stackrel{?}{=} \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

(d) Zugabe: $f\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \stackrel{?}{=} \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

2. YOU LIKE TO PROVE IT! PROVE IT! YOU LIKE TO...

2.1. Zeigen Sie explizit die Homöomorphie $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ und $]-1,1[^n \cong \mathbb{R}^n$.

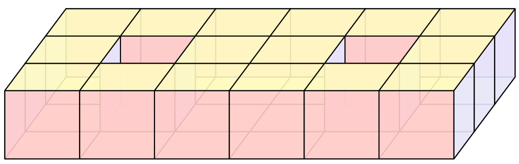
2.2. [4P] Zeigen Sie $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ mit stereographischer Projektion, wobei $p = (0, \dots, 0, 1)$.

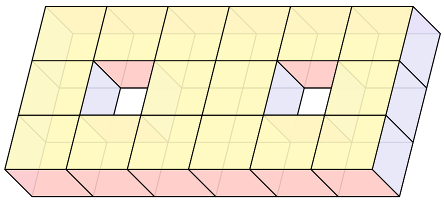
(a) Geben Sie die Abbildungen $f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ explizit an und prüfen Sie alle geforderten Eigenschaften nach.

Haben wir f und g erst einmal vorliegen, dann genügt geduldiges Nachrechnen. Aber wie kommen Sie auf die expliziten Formeln für die Abbildungen f und g?

(b) Machen Sie eine Skizze und leiten Sie die Formeln geometrisch her.

3. SIEBENUNDVIERZIG STUTTGARTER STUDENTEN ZÄHLEN ZWANGHAFT ZELLEN





3.1. [3P] Sei H_2 ein Quader mit zwei Ausbohrungen wie in der Abbildung und $F = F_2^+$ seine Randfläche. Berechnen Sie die Euler–Charakteristik $\chi(F)$ auf zwei Weisen:

(a) Zählen Sie im polytopalen Komplex $\mathscr{K}$ aus der Abbildung die Ecken, Kanten und Quadrate und berechnen Sie die Euler–Charakteristik als Wechselsumme $\chi(\mathscr{K}) = \#\{\text{Ecken}\} - \#\{\text{Kanten}\} + \#\{\text{Quadrate}\}$.

(b) Berechnen Sie das Euler–Maß $\mu_3(F)$. Suchen Sie sich dazu Ihre Lieblingsrichtung aus, und scannen Sie die Fläche F in dieser Richtung, d.h. schneiden Sie die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ mit Ebenen orthogonal zu der gewählten Richtung und berechnen Sie jeweils das Euler–Maß dieser Schnitte.

3.2. [1P] Bestimmen Sie allgemein $\chi(F_g^+)$ mit der Methode Ihrer Wahl. Für das Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ ist $F_g^+ = \partial H_g$ die Randfläche eines Quaders H_g mit g Ausbohrungen.

ABLAUF DER ÜBUNGEN

Die Aufgaben mit Punktzahl sind bis zum Abgabetermin in Ilias hochzuladen. Auf diesem Übungsblatt sind also alle Aufgaben schriftlich abzugeben, außer der Aufgabe 2.1 und den Zugaben 1.1(d) und 1.2(d). Dieses System gilt ebenso für alle weiteren Übungsblätter. Zusätzliche Aufgaben dienen zur Hinführung, Erläuterung oder Ergänzung; sie sollen Ihnen helfen, müssen aber nicht zur Abgabe ausformuliert werden.

Während der Gruppenübung (dieses Semester vorerst virtuell) können und sollen Sie die Aufgaben möglichst gut vorbereiten und anschließend sorgfältig ausarbeiten. Warum? Ganz einfach: Manchem fehlt alleine der Mut oder die Phantasie, die Fragen einfach mal anzupacken, am besten mit dem passenden Werkzeug. Die vorbereitende Gruppenübung soll Ihnen Mut machen und Ihre Phantasie anregen, womöglich auch Ihre Neugier, damit sollte Ihnen die selbstständige Arbeit dann leicht fallen.

Die Vorlesung in Form von Video und Skript erklärt Ihnen die nötigen Werkzeuge (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, ...). Für die Übungen sollen Sie den Inhalt der Vorlesung soweit möglich bereits parat haben und dann anwenden, das heißt zuvor wiederholen oder notfalls parallel nacharbeiten.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1: Zahlreiche Definitionen und Konstruktionen in der Mathematik verwenden Bilder und Urbilder von Abbildungen, dies gilt auch und ganz besonders in der Topologie. Aufgabe 1 übt den sicheren Umgang damit. Im Laufe der Topologievorlesung werden Sie diese Gleichheiten bzw. Inklusionen häufig brauchen. Falls Sie noch mehr üben wollen, dann untersuchen Sie die Zugabe (d) oder denken Sie sich weitere aus.

Tipp: Die behaupteten Gleichungen bzw. Inklusionen helfen Ihnen, viele Rechnungen und Beweise zu vereinfachen. Zum Beweis müssen Sie auf die Elemente zurückgreifen. Die Inklusion „$A \subset B$“ bedeutet: Für jedes $a \in A$ gilt $a \in B$. Die Aussage „$a \in f^{-1}(B)$“ bedeutet $f(a) \in B$. Die Aussage „$b \in f(A)$“ bedeutet: Es existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es zunächst darum zu verstehen, was ein Homöomorphismus ist – aber nicht nur allgemein und abstrakt! Die stereographische Projektion ist ein wichtiges konkretes Beispiel, das Sie häufig benutzen werden. Die Konstruktion ist explizit und vergleichsweise einfach, aber keineswegs offensichtlich!

Aufgabe 3: Die Euler–Charakteristik begegnet Ihnen vielerorts in Geometrie und Topologie: Sie ist eine einfache doch schlagkräftige Invariante, wie Sie bereits erahnen können. In Aufgabe 3 können Sie diese an einem konkreten Beispiel ausrechnen.

(1) Sie ist ein zentrales Hilfsmittel bei der Klassifikation der Flächen.
(2) Sie gibt allgemein Auskunft über die Existenz von Nullstellen von Vektorfeldern (wie später im Satz vom Igel, allgemein im Satz von Poincaré–Hopf).
(3) In der Differentialgeometrie ist sie die topologische Seite des berühmten Satzes von Gauß–Bonnet zur Krümmung von Flächen.
(4) Sie ist zudem Vorbild und Motivation für viele weiterreichende Invarianten.