Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/14	/21	/10	/8	/8	/11	/5	/78

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (14 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ist jede diskrete Teilmenge abzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Für die Topologie des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ ist jede Basis abzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2C. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2D. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Die Einschränkung $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q},\mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist surjektiv. ☐ Ja ☐ Nein

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

2G. Ist (X, d) separabel, dann ist (X, d) zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Ist (X, d) zweitabzählbar, dann ist (X, d) separabel. ☐ Ja ☐ Nein

Sei X ein topologischer Raum.

2I. Ist X metrisierbar, so ist X regulär ($T_1\&T_3$) und zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Ist X zweitabzählbar und regulär ($T_1\&T_3$), so ist X metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Bijektion.

2K. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f offen. ☐ Ja ☐ Nein

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt und nicht-leer.

2M. Jede stetige Abbildung $f : X \to X$ hat mindestens einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

2N. Jede kontraktive Abbildung $f : X \to X$ hat genau einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Topologische Grundbegriffe* (21 Punkte)

3A. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie erstabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

3B. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

3C. Ist für jeden zweitabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum $X/_\sim$ zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

Sei $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume mit $\operatorname{card}(X_i) \geq 2$ für alle $i \in I$.

3D. Sei $d_i : X_i \times X_i \to [0, 1]$ eine Metrik für $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Wann ist der Produktraum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar? Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung sowie eine Metrik.

Bedingung und Metrik:

2

3E. Unter welcher Bedingung ist $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt? (Weiterhin gelte $\operatorname{card}(X_i) \geq 2$.) Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung bezüglich I und $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$.

Bedingung:

1

3F. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subset Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 3

3G. Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 3

3H. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ zusammenhängende Teilräume, $n \geq 1$.
Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

/2

3I. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ abgeschlossen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

/2

3J. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ offen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

/2

Aufgabe 4. *Umlaufzahl und Fundamentalsatz der Algebra* (10 Punkte)

Vorgelegt seien geschlossene Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Dann ist auch ihr punktweises Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}^*$.

4A. Berechnen Sie die Umlaufzahl $\deg(\alpha \cdot \beta)$ aus $\deg(\alpha)$ und $\deg(\beta)$.

Rechnung / Formel und Beweis:

/ 2

Vorgelegt sei das Polynom $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$ sowie

$$H \;:\; [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \;:\; (t,z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

4B. Ist die Abbildung H stetig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2

4C. Hat das Polynom F keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $n = 0$.

Beweis mittels Umlaufzahl:

/ 2

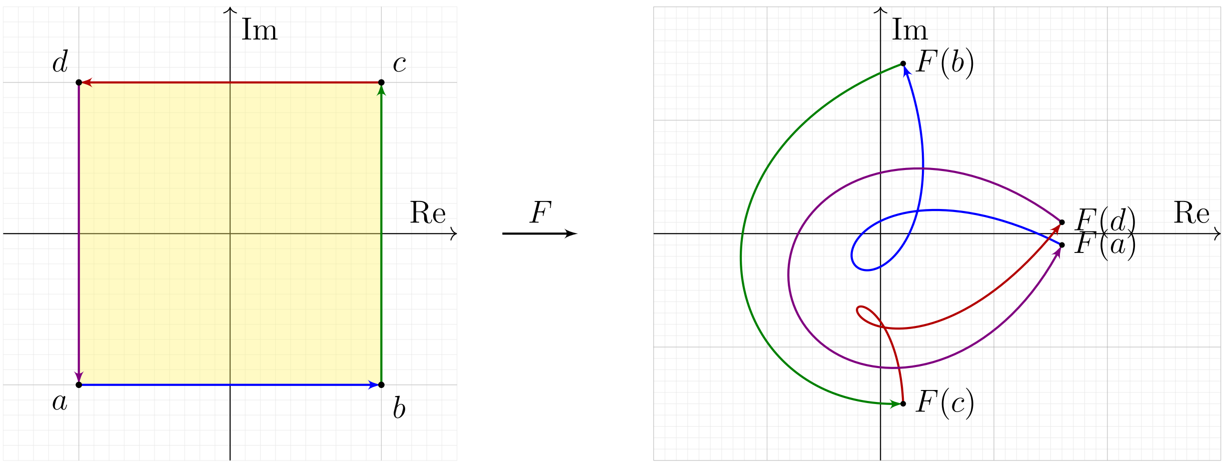
Per Induktion über n folgt: Es existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sodass $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

4D. Sei $R = [a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck und $\gamma = |a, b, c, d, a|$ der positiv orientierte Weg längs des Randes ∂R. Hat F keine Nullstellen auf ∂R, so gilt $\deg(F \circ \gamma) = \sharp\{\, k \mid z_k \in R^\circ \,\}$.

Beweis:

2

Für das Polynom $F(z) = z^5 - (3 + \mathrm{i})z^4 - 4z^2 - 3z - (3 + 4\mathrm{i})$ zeigt die folgende Abbildung den Weg $F \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ entlang des Randes des Rechtecks $R = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{C}$.



4E. Wie viele Nullstellen des Polynoms F liegen im Rechteck R?

Begründete Antwort:

2

Aufgabe 5. *Warum in die Ferne schweifen?* (8 Punkte)

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Wie üblich sei $\mathbb{D}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1 \,\}$ und $\mathbb{B}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \,\}$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$.

5A. Nennen Sie zum Teilraum $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \ge 1\}$ explizit eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : X \hookrightarrow Y$ mit einem euklidischen Teilraum $Y \subset \mathbb{R}^m$ als Ziel.

Raum Y und Abbildung κ:

2

5B. Nennen Sie explizit einen Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$ (ohne Nachweis).

Abbildungen f und g:

2

5C. Nennen Sie die stereographische Projektion $(h, k) : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ mit $p = (0, \dots, 0, 1)$.

Abbildungen h und k:

2

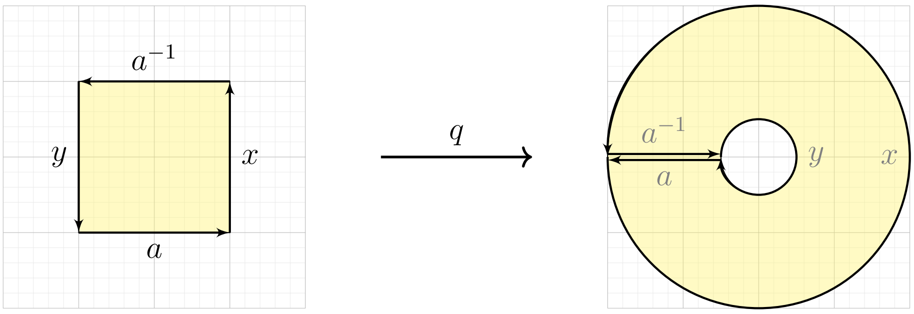
5D. Nennen Sie zum Ball $\mathbb{B}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \,\}$ explizit eine Einpunktkompaktifizierung $\kappa : \mathbb{B}^n \hookrightarrow Z$ mit einem euklidischen Teilraum $Z \subset \mathbb{R}^m$ als Ziel.

Raum Z und Abbildung κ:

2

Aufgabe 6. *Quotienten und Flächen* (8 Punkte)

Wir betrachten den Kreisring $K = \{\, z \in \mathbb{C} \mid {}^1\!/\!_2 \le |z| \le 2 \,\}$. Vermöge Polarkoordinaten $q : [-1,1]^2 \twoheadrightarrow K : (s,t) \mapsto 2^s(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ entspricht dies dem Flächenwort $axa^{-1}y$.



Welche Fläche entsteht als Quotient $K/_\sim$ durch die folgenden Äquivalenzrelationen $\sim$ auf K? Formulieren Sie jeweils ein geeignetes Flächenwort und nennen Sie die Fläche $F_g^\pm$.

6A. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf K werde erzeugt durch $z \sim z/|z|^2$ für $z \in \partial K$.

Flächenwort und Fläche:

/2

6B. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf K werde erzeugt durch $z \sim 1/z$ für $z \in \partial K$.

Flächenwort und Fläche:

/2

6C. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf K werde erzeugt durch $z \sim \overline{z}$ für $z \in \partial K$.

Flächenwort und Fläche:

/2

6D. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf K werde erzeugt durch $z \sim -z$ für $z \in \partial K$.

Flächenwort und Fläche:

/2

Aufgabe 7. *Heawood–Ungleichung für simpliziale Flächen* (11 Punkte)

Sei K eine geschlossene simpliziale Fläche mit f_0 Ecken, f_1 Kanten und f_2 Dreiecken, also der Euler–Charakteristik $\chi = f_0 - f_1 + f_2$. Dann gilt die berühmte Heawood–Ungleichung

$$f_0 \geq \frac{1}{2}\Big[7 + \sqrt{49 - 24\chi}\Big].$$

7A. Leiten Sie diese Ungleichung her.

Herleitung:

5

7B. Lässt sich der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit nur 6 Ecken triangulieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7C. Wie viele Ecken sind mindestens nötig, um die reell-projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ zu triangulieren?

(Optimale) Untere Schranke mit Begründung:

2

Der Rand des Ikosaeders trianguliert die Sphäre $\mathbb{S}^2$. Gewinnen Sie daraus eine minimale Triangulierung der reell-projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$.

Zeichnung (beschriftete Ecken sowie Kanten und Dreiecke):

2

Aufgabe 8. *Gauß–Bonnet für polytopale Flächen* (5 Punkte)

8A. Wir betrachten ein Dreieck $\Delta = [a_1, a_2, a_3] \subset \mathbb{R}^2$ mit Innenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \left]0, \pi\right[$, darüber das Prisma $P = \Delta \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$ und seine Randfläche $F = \partial P$. Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(F, z)$ in jedem Punkt $z \in F$ sowie die Gesamtkrümmung $\kappa(F)$ der Fläche.

Punktweise und gesamte Krümmung:

3

8B. Was besagt der (polytopale) Satz von Gauß–Bonnet?

Aussage des Satzes:

2