

## Klausur zur Topologie

**Aufgabe 1.** Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/14	/21	/10	/8	/8	/11	/5	/78

**Tipp:** Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie sollen Fleiß in den Übungen und Sorgfalt in der Vorbereitung belohnen. Das sind leichte Punkte — leider oft vergeudet. Falls Sie diese Weisheit *vor* Ihrer eigenen Klausur lesen: Nutzen Sie Ihre Übungen!

**Vorwort zur Musterlösung:** Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur.

**Aufgabe 2.** *Topologische Eigenschaften* (14 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr).  
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

**2A.** Im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  ist jede diskrete Teilmenge abzählbar.  Ja  Nein

**2B.** Für die Topologie des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^3$  ist jede Basis abzählbar.  Ja  Nein

**2C.** In jedem Hausdorff-Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen.  Ja  Nein

**2D.** In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.  Ja  Nein

**2E.** Die Einschränkung  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$  ist injektiv.  Ja  Nein

**2F.** Die Einschränkung  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$  ist surjektiv.  Ja  Nein

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

**2G.** Ist  $(X, d)$  separabel, dann ist  $(X, d)$  zweitabzählbar.  Ja  Nein

**2H.** Ist  $(X, d)$  zweitabzählbar, dann ist  $(X, d)$  separabel.  Ja  Nein

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

**2I.** Ist  $X$  metrisierbar, so ist  $X$  regulär ( $T_1$  &  $T_3$ ) und zweitabzählbar.  Ja  Nein

**2J.** Ist  $X$  zweitabzählbar und regulär ( $T_1$  &  $T_3$ ), so ist  $X$  metrisierbar.  Ja  Nein

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Bijektion.

**2K.** Ist  $X$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch, so ist  $f$  abgeschlossen.  Ja  Nein

**2L.** Ist  $X$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch, so ist  $f$  offen.  Ja  Nein

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt und nicht-leer.

**2M.** Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$  hat mindestens einen Fixpunkt.  Ja  Nein

**2N.** Jede kontraktive Abbildung  $f : X \rightarrow X$  hat genau einen Fixpunkt.  Ja  Nein

**Aufgabe 3.** *Topologische Grundbegriffe* (21 Punkte)**3A.** Ist für jeden normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $(V, |\cdot|)$  die induzierte Topologie erstabzählbar?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:
Zu $a \in V$ bilden die Bälle $B(a, 1/n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ eine abzählbare Umgebungsbasis.
<i>Erinnerung:</i> Erstabzählbarkeit gilt allgemein für jeden metrischen Raum. Für jeden topologischen Raum ist sie daher eine notwendige Bedingung / ein Hindernis zur Metrisierbarkeit.

2

**3B.** Ist für jeden normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $(V, |\cdot|)$  die induzierte Topologie zweitabzählbar?

<input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:
Als Gegenbeispiel kennen wir den Vektorraum $V = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Supremums-Norm.
<i>Erinnerung:</i> Stückweise affine Interpolation liefert $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow V$ überabzählbar und diskret. Selbst sehr schöne Räume, etwa Banach-Räume, sind also nicht immer zweitabzählbar.

2

**3C.** Ist für jeden zweitabzählbaren Raum  $X$  auch jeder Quotientenraum  $X/\sim$  zweitabzählbar?

<input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:
Als Gegenbeispiel kennen wir das unendliche Bouquet $\mathbb{R} // \mathbb{Z}$ aus der Übung. (Nicht $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ !)
<i>Erinnerung:</i> Die Quotiententopologie ist nicht erstabzählbar, also auch nicht zweitabzählbar. Das hier benutzte Diagonalargument ist trickreich und eine schöne Übung zur Wiederholung!

2

Sei  $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$  das Produkt topologischer Räume mit  $\text{card}(X_i) \geq 2$  für alle  $i \in I$ .**3D.** Sei  $d_i : X_i \times X_i \rightarrow [0, 1]$  eine Metrik für  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ . Wann ist der Produktraum  $(X, \mathcal{T})$  metrisierbar? Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung sowie eine Metrik.

Bedingung und Metrik:
Notwendig und hinreichend ist, dass $I$ abzählbar ist, also ein <i>abzählbares Produkt</i> vorliegt.
Dann wird der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisiert durch $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sum_{i \in I} a_i d_i(x_i, y_i)$ .
Hierzu sei $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sum_{i \in I} a_i < \infty$ , für $I = \mathbb{N}$ zum Beispiel $a_i = 2^{-1-i}$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = 1$ .

2

**3E.** Unter welcher Bedingung ist  $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$  kompakt? (Weiterhin gelte  $\text{card}(X_i) \geq 2$ .)Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung bezüglich  $I$  und  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  für  $i \in I$ .

Bedingung:
<i>Satz von Tychonoff:</i> Notwendig und hinreichend ist, dass jeder Faktor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist.
(... oder ein $X_i = \emptyset$ , aber diesen Sonderfall haben wir zur Vereinfachung ausgeschlossen.)

1

**3F.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$  kompakt. Ist dann  $f(A) \subset Y$  kompakt?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel: Sei $B = f(A)$ die Bildmenge.
<i>Beweis:</i> Sei $B \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Überdeckung durch offene Mengen $V_i$ in $Y$ . Da $f$ stetig ist, ist das Urbild $U_i = f^{-1}(V_i)$ in $X$ offen für jedes $i \in I$ .
Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ in $X$ . Da $A$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ .
Aus $f(U_i) \subset V_i$ folgt $B \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$ . Somit wird $B$ überdeckt durch eine endliche Teilfamilie von $(V_i)_{i \in I}$ .
<i>Alternative:</i> Statt der stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ können wir auch die Einschränkung $g = f _A^B : A \rightarrow B$ betrachten. Sie ist surjektiv und stetig bezüglich der Teilraumtopologien.
Wir beginnen dann mit einer Überdeckung $B = \bigcup_{i \in I} V'_i$ durch offene Mengen $V'_i$ im Teilraum $(B, \mathcal{T}_B)$ und erhalten die Überdeckung $A = \bigcup_{i \in I} U'_i$ durch die offenen Mengen $U'_i = g^{-1}(V'_i)$ im Teilraum $(A, \mathcal{T}_A)$ . Da der Raum $(A, \mathcal{T}_A)$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, $A = U'_{i_1} \cup \dots \cup U'_{i_n}$ . Aus $f(U'_i) = V'_i$ folgt $B = V'_{i_1} \cup \dots \cup V'_{i_n}$ . Somit wird $B$ überdeckt durch eine endliche Teilfamilie von $(V'_i)_{i \in I}$ . Das bedeutet, der Raum $(B, \mathcal{T}_B)$ ist kompakt.

3

**3G.** Sei  $X$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch. Ist jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  abgeschlossen?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:
<i>Beweis:</i> Sei $A \subset X$ abgeschlossen.
Da $X$ kompakt ist, ist $A$ kompakt (2D).
Da $f$ stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (3F).
Da $Y$ hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2C).

3

**3H.** Seien  $X, Y \subset \mathbb{S}^n$  zusammenhängende Teilräume,  $n \geq 1$ .

Ist jede stetige Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus?

<input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Begründung oder Gegenbeispiel: Gegenbeispiel: Die Räume $X = \{ e^{it} \in \mathbb{S}^1 \mid 0 \leq t < \pi \}$ und $Y = \mathbb{S}^1$ sind zusammenhängend. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y : z \mapsto z^2$ ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus. <i>Bemerkung:</i> Dieses Gegenbeispiel in $\mathbb{S}^1$ existiert ebenso in jeder höheren Sphäre $\mathbb{S}^n \supset \mathbb{S}^1$ . Der Zusammenhang von $Y$ folgt aus dem von $X$ und der stetige Surjektion $f : X \twoheadrightarrow Y$ .
---

2

**3I.** Seien  $X, Y \subset \mathbb{S}^n$  abgeschlossen. Ist jede stetige Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Begründung oder Gegenbeispiel: Der Startraum $X \subset \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt. Der Zielraum $Y \subset \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist hausdorffsch. Dank des Kompakt-Hausdorff-Kriteriums 3G ist $f$ abgeschlossen, also ein Homöomorphismus. <i>Bemerkung:</i> Die Abgeschlossenheit von $Y$ folgt automatisch aus der von $X$ dank 3G.
---

2

**3J.** Seien  $X, Y \subset \mathbb{S}^n$  offen. Ist jede stetige Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Begründung oder Gegenbeispiel: Dank Invarianz des Gebietes ist $f$ offen, also ein Homöomorphismus. (Offenheit ist eine lokale Eigenschaft, wir können die Abbildung $f$ daher in lokalen Karten $\cong \mathbb{R}^n$ betrachten.) <i>Bemerkung:</i> Die Offenheit von $Y$ folgt aus der von $X$ dank Invarianz des Gebietes.
---

2

**Aufgabe 4.** Umlaufzahl und Fundamentalsatz der Algebra (10 Punkte)

Vorgelegt seien geschlossene Wege  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  in  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann ist auch ihr punktweises Produkt  $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^* : t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C}^*$ .

**4A.** Berechnen Sie die Umlaufzahl  $\deg(\alpha \cdot \beta)$  aus  $\deg(\alpha)$  und  $\deg(\beta)$ .

Rechnung / Formel und Beweis: <i>Formel:</i> Es gilt Additivität $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ .
<i>Beweis:</i> Es gibt eine Homotopie $H : \alpha \sim \varphi_k$ geschlossener Wege zur Modellabbildung $\varphi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{2\pi i k t}$ mit $k = \deg(\alpha)$ . Ebenso gilt $K : \beta \sim \varphi_\ell$ mit $\ell = \deg(\beta)$ . Für das Produkt folgt daraus $H \cdot K : \alpha \cdot \beta \sim \varphi_k \cdot \varphi_\ell = \varphi_{k+\ell}$ , also $\deg(\alpha \cdot \beta) = k + \ell$ . Alternativ nutzen wir die Integralformel $\deg(\alpha) = (2\pi i)^{-1} \int_0^1 \alpha'(t)/\alpha(t) dt$ für $\mathcal{C}^1$ -Wege und $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \alpha\beta'$ .
<i>Erläuterung:</i> Die Umlaufzahl kennen wir als Winkelsumme, als Wegintegral, oder als Anzahl der Achsübergänge. Die Parametrisierung durch die Modellabbildung $\varphi_k(t) = e^{2\pi i k t}$ nutzt die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Diese ist surjektiv, aber nicht injektiv, sondern $2\pi i$ -periodisch, und lässt sich nur lokal umkehren. Die Umlaufzahl von Wegen verhält sich wie der ersehnte komplexe Logarithmus, insbesondere gilt $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ .

2

Vorgelegt sei das Polynom  $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  und  $c_n \neq 0$  sowie

$$H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} : (t, z) \mapsto \begin{cases} t^n F(z(1-t)/t) & \text{für } t > 0, \\ z^n & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

**4B.** Ist die Abbildung  $H$  stetig?

<input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Begründung: $H(t, z)$ ist ein Polynom in $t$ und $z$ , somit stetig! Für $t > 0$ gilt:
$H(t, z) = (1-t)^n z^n + c_1(1-t)^{n-1} t z^{n-1} + \dots + c_{n-1}(1-t)t^{n-1} z + c_n t^n \xrightarrow{t \rightarrow 0} z^n$
<i>Warnung:</i> Nach obiger Definition ist $H$ offensichtlich stetig in $z$ bei festem $t$ , und stetig in $t$ bei festem $z$ ; diese partielle Stetigkeit in $z$ und $t$ genügt jedoch nicht zum Beweis der Stetigkeit von $H$ , es gibt einfache Gegenbeispiele wie $X$ ebenso $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$ . Auch der Verklebesatz lässt sich nicht direkt anwenden, denn dazu müssten beide Definitionsbereiche offen oder beide abgeschlossen sein. Die Entwicklung als Polynom löst das Problem.

2

**4C.** Hat das Polynom  $F$  keine Nullstellen in  $\mathbb{C}$ , so gilt  $n = 0$ .

Beweis mittels Umlaufzahl:
Die Umlaufzahl von $H_0, H_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist $\deg H_0 = n$ und $\deg H_1 = 0$ . Hat $F$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ , so ist $H : H_0 \simeq H_1$ eine Homotopie in $\mathbb{C}^*$ . Dank Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl folgt daraus $n = 0$ .
<i>Erläuterung:</i> Die Homotopie $H$ formalisiert das anschauliche Argument: Für großen Radius $r =  z $ dominiert der Term $z^n$ , also Umlaufzahl $n$ . Für kleinen Radius der konstante Term $c_n$ , also Umlaufzahl $0$ .

2

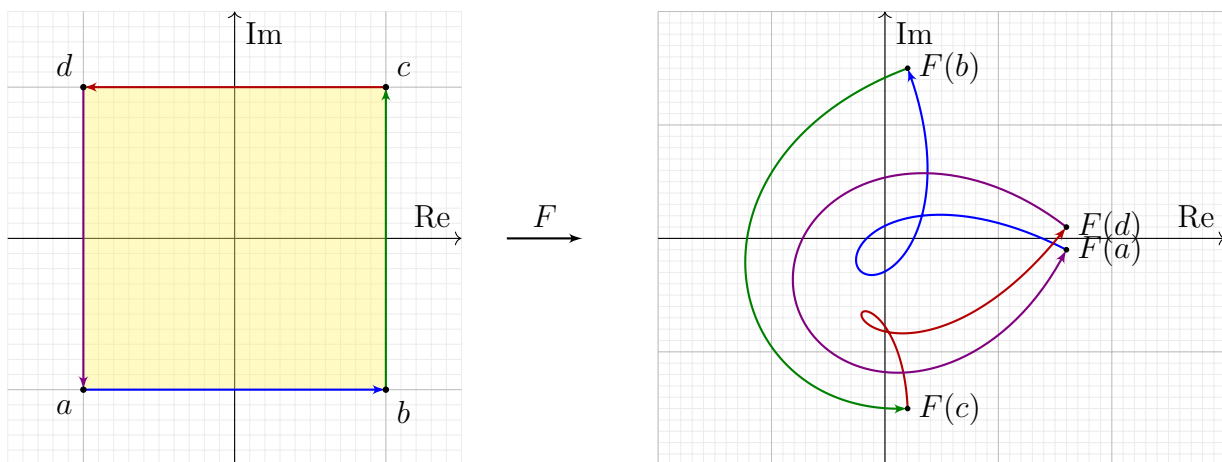
Per Induktion über  $n$  folgt: Es existieren  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  sodass  $F(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ .

**4D.** Sei  $R = [a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$  ein Rechteck und  $\gamma = |a, b, c, d, a|$  der positiv orientierte Weg längs des Randes  $\partial R$ . Hat  $F$  keine Nullstellen auf  $\partial R$ , so gilt  $\deg(F \circ \gamma) = \#\{k \mid z_k \in R^\circ\}$ .

Beweis:
Die Aussage gilt für jeden Linearfaktor $F_k(z) = (z - z_k)$ : $\deg(F_k \circ \gamma) = \deg(\gamma - z_k) = \mathbf{I}_R(z_k)$ . In Worten: Die Umlaufzahl um $z_k$ ist = 1 falls $z_k \in \text{Int } R$ , und = 0 falls $z_k \notin R$ .
Dank 4A gilt die behauptete Gleichung dann auch für das Produkt $F(z) = F_1(z) \cdots F_n(z)$ . In Worten: Die Umlaufzahl $\deg(F \circ \gamma)$ ist die Anzahl der Nullstellen von $F$ in $R$ .
<i>Erläuterung:</i> Die Umlaufzahl von $F$ entlang $\partial R$ zählt die Nullstellen im Rechteck $R$ . Das ist eine wunderschöne und nützliche Eigenschaft: Damit können wir die Nullstellen lokalisieren!
Wir setzen hier $\partial R \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \emptyset$ voraus. Für $z_k \in \partial R$ läuft der Weg $F_k \circ \gamma = \gamma - z_k$ durch 0, ist also kein Weg in $\mathbb{C}^*$ , und die Umlaufzahl ist nicht definiert.

2

Für das Polynom  $F(z) = z^5 - (3 + i)z^4 - 4z^2 - 3z - (3 + 4i)$  zeigt die folgende Abbildung den Weg  $F \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  entlang des Randes des Rechtecks  $R = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{C}$ .



**4E.** Wie viele Nullstellen des Polynoms  $F$  liegen im Rechteck  $R$ ?

Begründete Antwort:
Aus der Graphik lesen wir $\deg(F \circ \gamma) = 3$ ab. Somit liegen genau 3 der 5 Nullstellen von $F$ in $R$ .
<i>Erläuterung:</i> Die Umlaufzahl wurde hier graphisch bestimmt; der Mensch ist ein Augenwesen. Auf einem Computer gelingt die Berechnung entsprechend durch numerische Approximation. Für polygonale Wege ist die exakte Rechnung leicht, und wir haben sie ausführlich behandelt. Für polynomielle Wege genügen wiederholte Polynomdivisionen / Sturmsche Ketten.
Dieser Algorithmus findet / nähert alle Nullstellen des Polynoms $F$ ! Durch wiederholte Viertelung können wir so alle Nullstellen des Polynoms $F$ in $\mathbb{C}$ lokalisieren und hinreichend genau separieren. Mit diesen Daten können wir schließlich das Newton-Verfahren starten.

2

**Aufgabe 5.** *Warum in die Ferne schweifen?* (8 Punkte)

Wir betrachten den Raum  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Wie üblich sei  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$  und  $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$  und  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ .

**5A.** Nennen Sie zum Teilraum  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq 1\}$  explizit eine Einpunktkompaktifizierung  $\kappa : X \hookrightarrow Y$  mit einem euklidischen Teilraum  $Y \subset \mathbb{R}^m$  als Ziel.

Raum $Y$ und Abbildung $\kappa$ : Es genügen $Y = \mathbb{D}^n$ und $\kappa : X \rightarrow Y : x \mapsto x/ x ^2$ .
<i>Erinnerung:</i> Der Zielraum $Y = \mathbb{D}^n$ ist hausdorffsch und kompakt (dank Heine–Borel). Zudem gilt $\kappa(X) = Y' = \mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ . Der hinzugefügte „unendlich ferne Punkt“ ist hier der Nullpunkt: Warum in die Ferne schweifen? Sieh, das Gute liegt so nah! Die Abbildung $\kappa : X \rightarrow Y$ ist die vertraute Inversion an der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ , eingeschränkt auf $X$ und $Y$ . Dies ist eine Einbettung, ausführlich gilt $(\kappa', \lambda) : X \cong Y'$ mit der Einschränkung $\kappa'(x) = x/ x ^2$ und $\lambda(y) = y/ y ^2$ . Alternativ genügt hier auch die stereographische Projektion $k : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ wie in 5C.

2

**5B.** Nennen Sie explizit einen Homöomorphismus  $(f, g) : \mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$  (ohne Nachweis).

Abbildungen $f$ und $g$ : Es genügen $f(x) = x/(1 -  x )$ und $g(y) = y/(1 +  y )$ .
<i>Erinnerung:</i> Dies ist ein grundlegendes Beispiel aus der Einleitung zu Homöomorphismen. Beide Abbildungen sind wohldefiniert und offensichtlich stetig, da Komposition stetiger Abbildungen. Der Nachweis der geforderten Eigenschaften $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{B}^n}$ war hier nicht gefordert. Dies ist eine einfache Rechnung und eine gute Übung zur Wiederholung!

2

**5C.** Nennen Sie die stereographische Projektion  $(h, k) : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$  mit  $p = (0, \dots, 0, 1)$ .

Abbildungen $h$ und $k$ : Diese berühmten Abbildungen sind
$h : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$
$k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{p\} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{ y ^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n,  y ^2 - 1).$
<i>Erläuterung:</i> Beide Abbildungen sind wohldefiniert und stetig. Sie erfüllen $h \circ k = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $k \circ h = \text{id}_{\mathbb{S}^n \setminus \{p\}}$ . Zur Herleitung von $f$ genügt der Strahlensatz, für $g$ die Mitternachtsformel. Weder der Nachweis noch die Herleitung waren hier gefragt: Übung zur Wiederholung!

2

**5D.** Nennen Sie zum Ball  $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$  explizit eine Einpunktkompaktifizierung  $\kappa : \mathbb{B}^n \hookrightarrow Z$  mit einem euklidischen Teilraum  $Z \subset \mathbb{R}^m$  als Ziel.

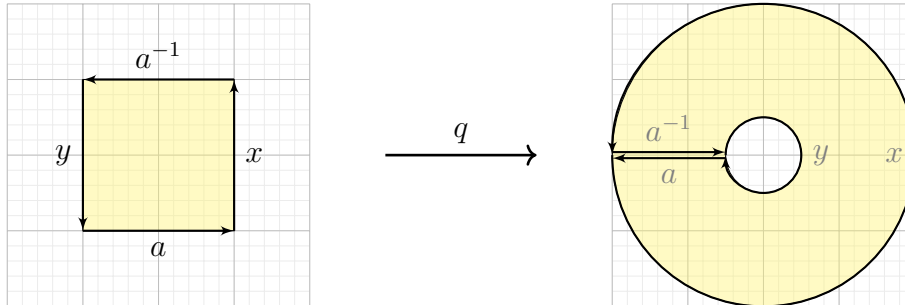
Raum $Z$ und Abbildung $\kappa$ : Es genügen $Z = \mathbb{S}^n$ und $\kappa = k \circ f$ .
<i>Erläuterung:</i> Die Einpunktkompaktifizierung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ , genauer gesagt ist die Abbildung $k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ die gewünschte Kompaktifizierung. Für den homöomorphen Raum $\mathbb{B}^n$ erhalten wir somit $\text{inc} \circ k \circ f : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ .
Für das Komplement $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid  x  \geq 1\}$ hingegen erhalten wir $X \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ wie oben.

2



**Aufgabe 6.** *Quotienten und Flächen* (8 Punkte)

Wir betrachten den Kreisring  $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1/2 \leq |z| \leq 2 \}$ . Vermöge Polarkoordinaten  $q : [-1, 1]^2 \rightarrow K : (s, t) \mapsto 2^s(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$  entspricht dies dem Flächenwort  $axa^{-1}y$ .



Welche Fläche entsteht als Quotient  $K/\sim$  durch die folgenden Äquivalenzrelationen  $\sim$  auf  $K$ ? Formulieren Sie jeweils ein geeignetes Flächenwort und nennen Sie die Fläche  $F_g^\pm$ .

**6A.** Die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $K$  werde erzeugt durch  $z \sim z/|z|^2$  für  $z \in \partial K$ .

Flächenwort und Fläche: Diese Äquivalenzrelation $\sim$ entspricht dem Flächenwort $axa^{-1}x^{-1}$ entlang $\partial[0, 1]^2$ . Der Quotientenraum ist somit homöomorph zum Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Anschauung!
---

2

**6B.** Die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $K$  werde erzeugt durch  $z \sim 1/z$  für  $z \in \partial K$ .

Flächenwort und Fläche: Diese Äquivalenzrelation $\sim$ entspricht dem Flächenwort $axa^{-1}x$ entlang $\partial[0, 1]^2$ . Der Quotientenraum ist somit homöomorph zur Kleinschen Flasche $F_1^- \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\}$ .
---

2

**6C.** Die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $K$  werde erzeugt durch  $z \sim \bar{z}$  für  $z \in \partial K$ .

Flächenwort und Fläche: Diese Äquivalenzrelation $\sim$ entspricht dem Flächenwort $abb^{-1}a^{-1}cc^{-1}$ entlang $\partial[0, 1]^2$ . Der Quotientenraum ist somit homöomorph zur Sphäre $F_0^+ \cong \mathbb{S}^2$ . Anschauung!
---

2

**6D.** Die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $K$  werde erzeugt durch  $z \sim -z$  für  $z \in \partial K$ .

Flächenwort und Fläche: Diese Äquivalenzrelation $\sim$ entspricht dem Flächenwort $abba^{-1}cc$ entlang $\partial[0, 1]^2$ . Der Quotientenraum ist somit homöomorph zur Kleinschen Flasche $F_1^- \cong (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\}$ .
---

2

**Aufgabe 7.** Heawood–Ungleichung für simpliziale Flächen (11 Punkte)

Sei  $K$  eine geschlossene simpliziale Fläche mit  $f_0$  Ecken,  $f_1$  Kanten und  $f_2$  Dreiecken, also der Euler–Charakteristik  $\chi = f_0 - f_1 + f_2$ . Dann gilt die berühmte Heawood–Ungleichung

$$f_0 \geq \frac{1}{2} \left[ 7 + \sqrt{49 - 24\chi} \right].$$

**7A.** Leiten Sie diese Ungleichung her.

Herleitung: Für jede geschlossene simpliziale Fläche $K$ gilt:
(0) $f_1 \leq \binom{f_0}{2}$ : Jede Kante $[a, b]$ wird durch ihre beiden Eckpunkte $\{a, b\}$ festgelegt.
(1) $2f_1 = 3f_2$ : Jede Kante liegt in zwei Dreiecken, und jedes Dreieck hat drei Kanten.
Wir setzen dies in die Definition $\chi := f_0 - f_1 + f_2$ ein und nutzen die Mitternachtsformel:
$\chi = f_0 - f_1 + f_2 = f_0 - \frac{1}{3}f_1 \geq f_0 - \frac{1}{6}f_0(f_0 - 1)$
$\Rightarrow f_0^2 - 7f_0 + 6\chi \geq 0$
$\Leftrightarrow f_0 \geq \frac{1}{2} \left[ 7 + \sqrt{49 - 24\chi} \right] \quad \text{oder} \quad f_0 \leq \frac{1}{2} \left[ 7 + \sqrt{49 - 24\chi} \right]$
Der zweite Fall „ $f_0 \leq \frac{1}{2}[\dots]$ “ ist geometrisch nicht realisierbar, da mit $f_0 \leq 3$ Ecken keine geschlossene Fläche möglich ist. Es bleibt demnach nur „ $f_0 \geq \frac{1}{2}[\dots]$ “, wie behauptet.
<i>Erläuterung:</i> Diese Rechnung ist sehr einfach und ergibt eine sehr nützliche untere Schranke.
Die Heawood–Ungleichung ist scharf für die Sphäre $F_0^+ \cong \mathbb{S}^2 \cong \partial\Delta^3$ und die projektive Ebene $F_0^- \cong \mathbb{RP}^2$ sowie den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ : Diese lassen sich mit 4, 6, 7 Ecken triangulieren. Die nächsten drei Flächen $F_1^-, F_2^+, F_2^-$ benötigen eine Ecke mehr als die Heawood–Schranke.
Nun kommt die Sensation: Die Heawood–Ungleichung ist scharf für <i>alle</i> geschlossenen Flächen mit nur diesen drei Ausnahmen! Gerhard Ringel fand 1955 minimale Triangulierungen für die Flächen $F_g^-$ , und zusammen mit Mark Jungerman 1980 schließlich für die Flächen $F_g^+$ .

**7B.** Lässt sich der Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  mit nur 6 Ecken triangulieren?

Ja  Nein. Begründung:

Es gilt  $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0$ , somit  $f_0 \geq \frac{1}{2}[7 + \sqrt{49 - 24\chi}] = 7$ .

*Erläuterung:* Tatsächlich lässt sich der Torus mit nur 7 Ecken triangulieren, siehe Vorlesung. Alternativ: Versuchen Sie es als Übung! Die Heawood-Ungleichung zeigt, dass 7 optimal ist.

2

**7C.** Wie viele Ecken sind mindestens nötig, um die reell-projektive Ebene  $\mathbb{RP}^2$  zu triangulieren?

(Optimale) Untere Schranke mit Begründung:

Es gilt  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ , somit  $f_0 \geq \frac{1}{2}[7 + \sqrt{49 - 24\chi}] = 6$ .

*Erläuterung:* Tatsächlich lässt sich  $\mathbb{RP}^2$  mit nur 6 Ecken triangulieren. Mit der folgenden Anleitung versuchen Sie es als Aufgabe! Die Heawood-Ungleichung zeigt, dass 6 optimal ist.

2

Der Rand des Ikosaeders trianguliert die Sphäre  $\mathbb{S}^2$ . Gewinnen Sie daraus eine minimale Triangulierung der reell-projektiven Ebene  $\mathbb{RP}^2$ .

Zeichnung (beschriftete Ecken sowie Kanten und Dreiecke):

*Erläuterung:* Wir nutzen den Ikosaederrand  $K$  zur Triangulierung  $h : |K| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ . Kontrolle: Für  $K$  gilt  $f_0(K) = 12$ ,  $f_1(K) = 30$ ,  $f_2(K) = 20$ , also  $\chi(K) = 6 - 5 + 10 = 2$ , wie erwartet.

Der Quotient  $P = K/\{\pm 1\}$  ist wiederum ein Simplizialkomplex. Wir erhalten so die ersehnte 6-Ecken-Triangulierung  $|P| \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2/\{\pm 1\} = \mathbb{RP}^2$  der projektiven Ebene. Kontrolle: Für  $P$  gilt  $f_0(P) = 6$ ,  $f_1(P) = 15$ ,  $f_2(P) = 10$ , also  $\chi(P) = 6 - 5 + 10 = 1$ , wie es sein soll!

2

**Aufgabe 8.** Gauß–Bonnet für polytopale Flächen (5 Punkte)

**8A.** Wir betrachten ein Dreieck  $\Delta = [a_1, a_2, a_3] \subset \mathbb{R}^2$  mit Innenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in ]0, \pi[$ , darüber das Prisma  $P = \Delta \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$  und seine Randfläche  $F = \partial P$ . Bestimmen Sie die Krümmung  $\kappa(F, z)$  in jedem Punkt  $z \in F$  sowie die Gesamtkrümmung  $\kappa(F)$  der Fläche.

Punktweise und gesamte Krümmung: Die Krümmung in der Ecke $z = (a_i, \pm 1)$ ist $\kappa(F, z) = \pi - \alpha_i$ . In allen anderen Punkten $z \in F \setminus A$ außerhalb der Eckenmenge $A = (\{a_1, a_2, a_3\} \times \{\pm 1\})$ ist die Krümmung $\kappa(F, z) = 0$ . Die Gesamtkrümmung der Fläche $F$ ist daher $\kappa(F) = 6\pi - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 4\pi$ . <i>Erläuterung:</i> In unserem Falle haben wir eine polytopale Fläche $F \subset \mathbb{R}^n$ : Die Krümmung ist konzentriert in den Ecken und kann elementar definiert und berechnet werden, wie gesehen. Für jede glatte Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ , etwa Sphären $rS^2 \subset \mathbb{R}^3$ , erklärt die Differentialgeometrie den Begriff der Krümmung in einem Punkt. Dasselbe gelingt für jede glatte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik und ist ein überaus wichtiger Begriff, sowohl für das Verständnis geometrischer Objekte als auch für ihre Anwendungen wie der Allgemeinen Relativitätstheorie.
--

3

**8B.** Was besagt der (polytopale) Satz von Gauß–Bonnet?

Aussage des Satzes: Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine polytopale Fläche und geschlossen, also kompakt und ohne Rand. Dann gilt $\kappa(F) = 2\pi\chi(F)$ : die Gesamtkrümmung ist gleich $2\pi$ mal der Euler–Charakteristik. <i>Erläuterung:</i> Für polytopale Flächen ist dieser bemerkenswerte Satz leicht zu beweisen durch doppelte Summation. Dies ist eine einfache Rechnung und eine gute Übung zur Wiederholung!
---

2