Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

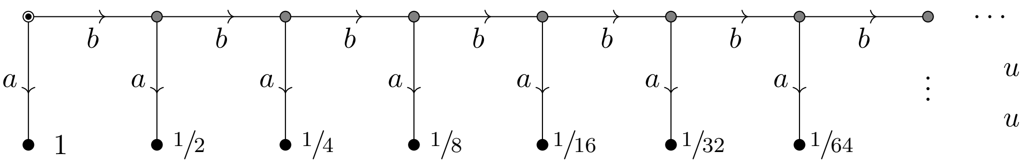
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
/1	/12	/9	/12	/14	/12	/20	/80

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Wir betrachten das folgende dynamische Ein-Personen-Spiel (X, u) in extensiver Form:



$$u(b^n a) = 2^{-n}$$
$$u(b^\infty) = 0.20200902$$

Gibt es eine Strategie $s : X^\circ \to \{a, b\}$, die nicht teilspielperfekt ist, aber dennoch optimal bezüglich einmaliger Abweichung?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2B. Wir wiederholen unendlich oft das folgende Spiel $g : A = \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$

Alice \ Bob	0	1
0	1, 2	5, 0
1	0, 6	3, 4

mit diskontierter Auszahlung
$u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$
für ein $\delta \in [0, 1[$ nahe an 1.

Lässt sich $(4, 5)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren (bis auf einen beliebig kleinen Fehler)?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2C. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_1 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = \{s_1\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2D. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_2 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2E. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, SYM (ohne IIA, also allein durch Invarianz, Pareto–Optimalität und Symmetrie)?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

/2

2F. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, IIA (ohne SYM, also allein durch INV, PAR und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

/2

Aufgabe 3. *Shapley–Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 4, \quad \{1,2\} \mapsto 11, \quad \{2,3\} \mapsto 9, \\ \{1\} \mapsto 4, & \{3\} \mapsto 3, \quad \{1,3\} \mapsto 9, \quad \{1,2,3\} \mapsto 18. \end{cases}$$

3A. Schreiben Sie die Funktion v als Linearkombination der Shapley–Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

3

3B. Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge ρ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v)$.

Marginale Mehrwerte:

3

3C. Berechnen Sie zu v den Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley–Werte:

3

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (12 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
s_0	2 ; 5	4 ; 4	6 ; 1	6 ; -7	6 ; -10
s_1	2 ; -5	4 ; -1	5 ; 1	4 ; 3	4 ; 3

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.

Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$:

Intervall	$p <$		$< p <$		$< p <$		$< p <$	1
Antwort								

6

4B. Bestimmen Sie in jedem dieser Fälle alle Nash–Gleichgewichte $(s,t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

6

Aufgabe 5. *Korrelierte Gleichgewichte* (14 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ suchen wir reine, gemischte und korrelierte Gleichgewichte:

Alice \ Bob	0	1
0	9 p_{00} 9	6 p_{01} 10
1	10 p_{10} 6	0 p_{11} 0

5A. Bestimmen Sie zunächst alle reinen und gemischten Nash–Gleichgewichte.

Nash–Gleichgewichte:

4

5B. Für die Wkten $p_{11}, \dots, p_{22} \geq 0$ gilt wie immer $p_{11} + \dots + p_{22} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

Ungleichungen für Alice:

Ungleichungen für Bob:

4

5C. Welche echt korrelierten Gleichgewichte $p \in \mathrm{CE}(g)$ lassen sich mit einem fairen Münzwurf als Signalgeber realisieren, also mit genau zwei Wkten $= 1/2$?

Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

$\overline{}$ 2

5D. Welche korrelierten Gleichgewichte $p \in \mathrm{CE}(g)$ lassen sich realisieren mit drei Wkten $= 1/3$?

Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

$\overline{}$ 2

5E. Welche korrelierten Gleichgewichte sind von der Form $p_{00} = \alpha$ und $p_{01} = p_{10} = (1-\alpha)/2$?

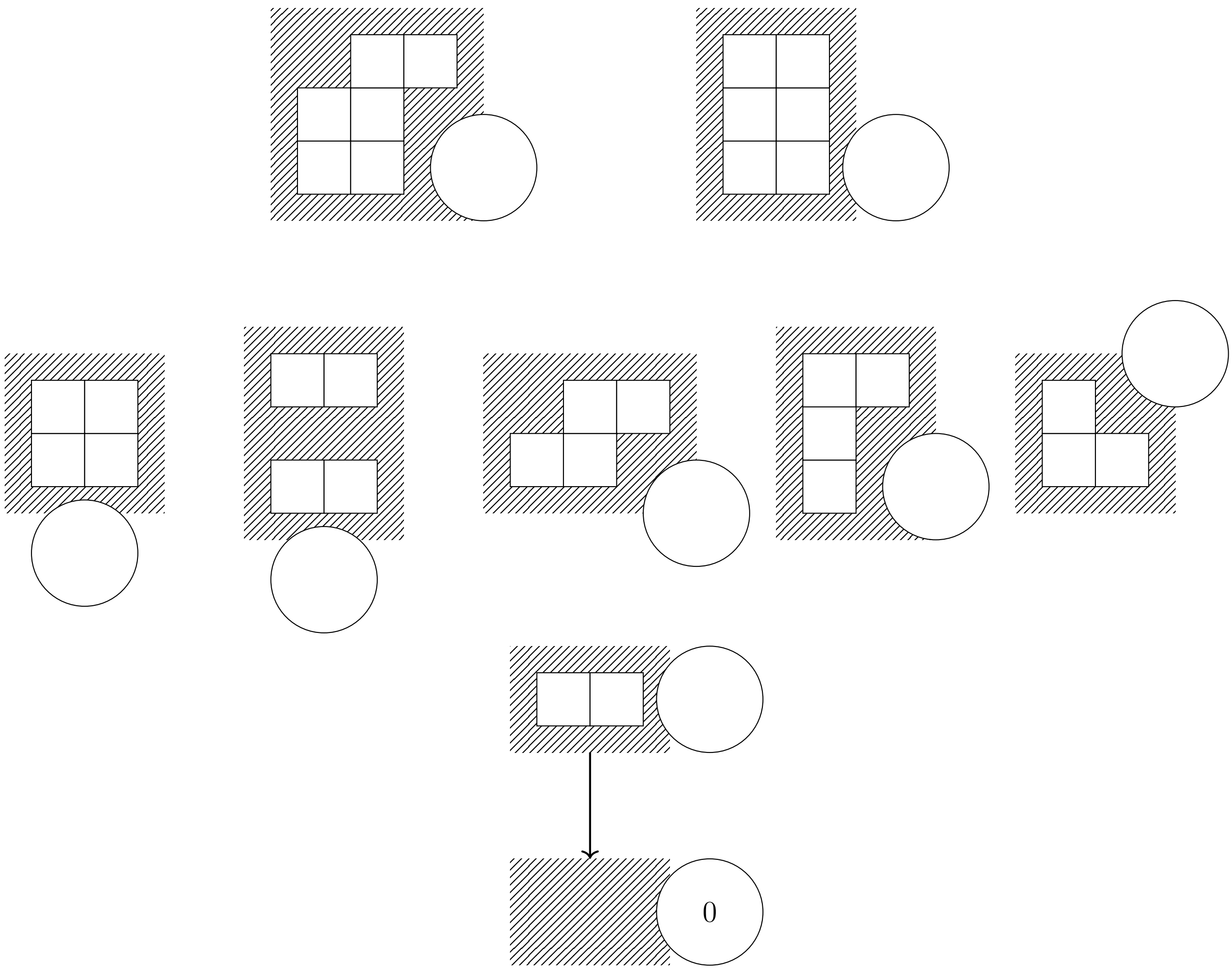
Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 6. *Sprage–Grundy: Fliesentetris, Mario vs Luigi* (12 Punkte)

Mario und Luigi legen abwechselnd Dominosteine auf ein Schachbrett mit 8×8 Feldern. Jeder Dominostein wird dabei auf zwei nebeneinanderliegende Felder gelegt, auf denen noch kein Dominostein liegt. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

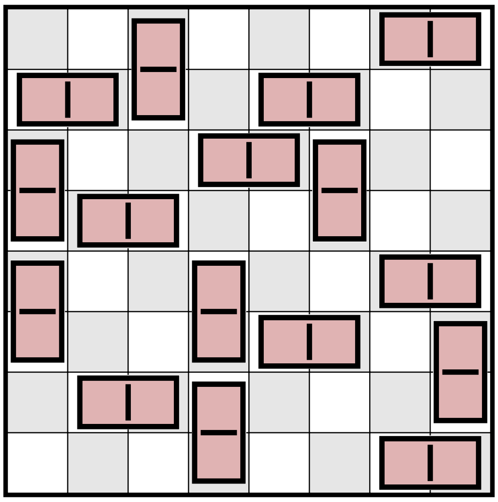
In der folgenden Graphik sind Ecken eines Spielgraphen abgebildet. Jede Ecke zeigt einen Ausschnitt des Schachbretts mit ein oder zwei Inseln freier Felder. Zur Vereinfachung werden Inseln, die durch Rotation oder Verschiebung ineinander übergehen, nur einmal aufgeführt. In einzelne isolierte Felder kann kein Dominostein mehr gelegt werden, daher lassen wir diese weg.

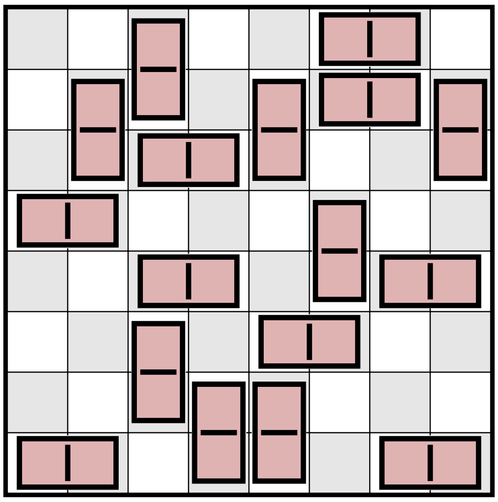


6A. Vervollständigen Sie den Spielgraphen, indem Sie alle Kanten einzeichnen.
Tragen Sie anschließend die Grundy–Zahlen der Zustände in die Kreise ein.

6

In den folgenden beiden Spielständen ist Mario am Zug. Luigi hat gerade den Magic Mushroom gegessen und spielt daher ab jetzt fehlerfrei.





6B. Kann Mario gegen Super Luigi gewinnen? Geben Sie eine Begründung!

Links:

Rechts:

4

6C. Markieren Sie auf dem obigen Spielbrett jeweils einen Gewinnzug, falls einer existiert.

2

Aufgabe 7. *Preiswettbewerb nach Bertrand* (20 Punkte)

Zwei Firmen $i \in \{1, 2\}$ produzieren ein homogenes Gut. Beide haben dabei Produktionskosten von 2 pro Einheit. Beide wählen gleichzeitig und unabhängig einen Preis $p_i \in [0, 8]$, zu dem sie jede Einheit anbieten. Die Kunden kaufen bei der Firma mit dem niedrigeren Preis; haben beide Firmen denselben Preis gewählt, so teilen sich die Kunden hälftig auf. Die Nachfrage richtet sich nach dem Preis: Die Funktion $f : [0, 8] \to \mathbb{R}_{\geq 0} : p \mapsto 8 - p$ gibt an, dass bei einem Preis von p pro Einheit $f(p)$ Einheiten verkauft werden. Der Gewinn für Firma 1 ist somit

$$g_1 \;:\; [0, 8]^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (p_1, p_2) \mapsto g_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - 2) \cdot f(p_1) & \text{falls } p_1 < p_2, \\ \frac{1}{2}(p_1 - 2) \cdot f(p_1) & \text{falls } p_1 = p_2, \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2. \end{cases}$$

Entsprechend sieht der Gewinn für Firma 2 aus: Das Spiel ist symmetrisch in den Spielern.

7A. Geben Sie ein Nash–Gleichgewicht $p = (p_1, p_2) \in [0, 8]^2$ an und zeigen Sie $p \in \mathrm{NE}(g)$.

Ein Gleichgewicht mit Beweis:

3

7B. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Nash–Gleichgewichte $(p_1, p_2) \in \mathrm{NE}(g)$ gibt.

Antwort:

4

7C. Die gegnerische Firma (2) hat Lieferprobleme, alle Kunden kaufen bei Ihrer Firma (1). Wie sollten Sie den Preis p_{opt} wählen? Was ist Ihr maximaler Gewinn g_{opt}?

Antwort:

$\overline{2}$

7D. Sie wiederholen das Spiel $g : [0, 8] \to \mathbb{R}^2$ nun n–mal, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, die Auszahlungen werden dabei summiert. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels $\Gamma_n = \prod_{k=0}^{n-1} g$.

Antwort:

$\overline{2}$

Sie wiederholen das Spiel g nun unendlich oft. Die Auszahlungen werden diskontiert summiert:

$$u \,:\, ([0, 8]^2)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 \,:\, x \mapsto u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^n g(x^n)$$

mit $x^n = (p_1^n, p_2^n) \in [0, 8]^2$ und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$.

7E. Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf dieses extensive Spiel Γ anwenden?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

7F. Die beiden Firmen verabreden folgendes Strategiepaar: Jede Firma wählt den Preis $p_i^n = 4$ solange keiner davon abweicht. Wählt eine Firma einen anderen Preis, dann wählen beide ab der nächsten Runde den Preis $p_i^n = 2$. Zeigen Sie, dass dies für $\delta \in [1/2, 1[$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, für $\delta \in [0, 1/2[$ jedoch nicht.

Antwort:

$\overline{\quad}$ 7

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.