# Klausur zur Spieltheorie

**Aufgabe 1.** *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

| | |
|---|---|
| Name: Musterlösung | Matrikelnummer: Musterlösung |
| Vorname: Musterlösung | Studiengang: Musterlösung |

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

---

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| /1 | /12 | /9 | /12 | /14 | /12 | /20 | /80 |

*Erläuterung:* Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Dies war die vierte Klausur zu unserer Veranstaltung Spieltheorie. Lernen nach alten Klausuren wird gern genutzt, oft übertrieben, hier war es nur begrenzt möglich. Diese Klausur war sehr eng an Vorlesung und Übung angelehnt, so gesehen leicht. Die Fragen waren nicht identisch, die Herausforderung also durchaus real, die erlernten Methoden auf einfache, neue Beispiele anzuwenden. Viele Punkte sind leicht, erfordern aber wie angekündigt Übung und Routine.

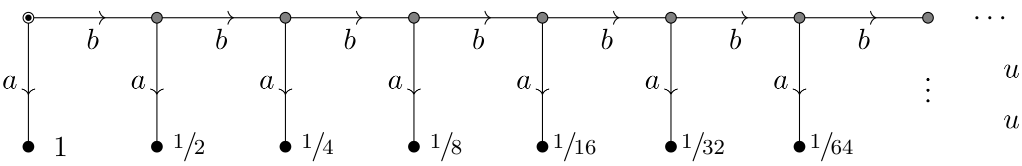
Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderbare Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

---

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

**2A.** Wir betrachten das folgende dynamische Ein-Personen-Spiel $(X, u)$ in extensiver Form:




$u(b^n a) = 2^{-n}$

$u(b^\infty) = 0.20200902$

Gibt es eine Strategie $s: X^\circ \to \{a, b\}$, die nicht teilspielperfekt ist, aber dennoch optimal bezüglich einmaliger Abweichung?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Ja, die Strategie „spiele immer $a$“, also $s: X^\circ \to \{a, b\} : x \mapsto a$, ist optimal bezüglich einmaliger Abweichung. Für Teilspielperfektion ist das notwendig, aber noch nicht hinreichend: Eine Verbesserung ist „ab $b^3$ spiele $b$“, also $\tilde{s}: X^\circ \to \{a, b\} : \emptyset, b, b^2 \mapsto a;\ b^3, b^4, \ldots \mapsto b$.

*Erläuterung:* Der zugehörige Satz fordert als einzige Voraussetzung, dass die Auszahlung $v: \partial X \to \mathbb{R}$ stetig sein soll. Dies ist hinreichend und garantiert die Gültigkeit des Prinzips der einmaligen Abweichung. Das Prinzip selbst ist ungemein nützlich für unendliche Spiele, da die Rückwärtsinduktion nicht greift und die Lösung des Spiels sonst kaum zu bewältigen wäre. Das Prinzip der einmaligen Abweichung ermöglicht eine präzise Analyse, manchmal wird sie sogar sehr einfach. Dies haben wir eindrucksvoll in zahlreichen Anwendungen gesehen. 2

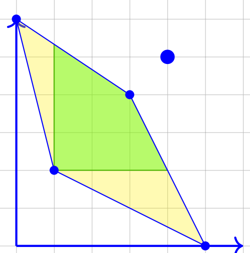
**2B.** Wir wiederholen unendlich oft das folgende Spiel $g: A = \{0, 1\}^2 \to \mathbb{R}^2$

| Alice \ Bob | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1, 2 | 5, 0 |
| 1 | 0, 6 | 3, 4 |

mit diskontierter Auszahlung
$u: A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$
für ein $\delta \in [0, 1[$ nahe an 1.

Lässt sich $(4, 5)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren (bis auf einen beliebig kleinen Fehler)?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:



Diese Auszahlung ist unmöglich!
Genauer: Das Spiel $g$ hat 00 als einziges Nash–Gleichgewicht, entsprechend dem Gefangenenddilemma, mit Auszahlung $(1, 2)$.
Die gewünschte Auszahlung $(4, 5)$ liegt zwar oberhalb des Drohpunkts $(1, 2)$, aber nicht in der konvexen Hülle der vier Auszahlungen.
Demnach können wir die Auszahlung $(4, 5)$ nicht realisieren.

*Erläuterung:* Selbst wenn die Auszahlung $(4, 5)$ als Geld gedeutet wird und Nebenzahlungen möglich sind, oder allgemein gesagt: tranferierbarer Nutzen angenommen wird, so ist diese Auszahlung dennoch unmöglich, da in jeder Runde insgesamt höchstens 7 ausgezahlt wird. 2

**2C.** Seien $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ (extensive) endliche Spiele, wobei $\Gamma_1$ genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = \{s_1\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Wie in den Übungen kann man leicht Gegenbeispiele konstruieren. *Konkrete Illustration:*

$\Gamma_1 =$

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1, 1 | 2, 0 |
| 1 | 0, 2 | 1, 1 |

$\Gamma_2 =$

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0, 0 | 0, −1 |
| 1 | −1, 0 | 3, 3 |

Hier hat $\Gamma_1$ nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, $\Gamma_2$ hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky. Neben den offensichtlichen hat $\Gamma$ noch weitere Gleichgewichte: Alice und Bob spielen 11 in $\Gamma_2$ genau dann, wenn 11 in $\Gamma_1$ gespielt wurde, sonst spielen sie 00 in $\Gamma_2$; das hebt 11 zu einem Nash–Gleichgewicht in der ersten Runde. Dasselbe gelingt für 01 und 10; die Belohnung aus $\Gamma_2$ macht diese Strategiepaare lukrativ.

/2

**2D.** Seien $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ (extensive) endliche Spiele, wobei $\Gamma_2$ genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☒ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Das folgt per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo.

*Erläuterung:* Wichtig ist bei diesem Argument, dass in jeder Kopie des Spiels $\Gamma_2$, egal zu welcher Vorgeschichte, dasselbe Gleichgewicht gespielt werden *muss*. Damit hat das erste Spiel $\Gamma_1$ keinen Einfluss auf den Fortgang, und es gilt $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$. Das steht im bemerkenswerten Gegensatz zur vorigen Frage.

/2

**2E.** Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, SYM (ohne IIA, also allein durch Invarianz, Pareto–Optimalität und Symmetrie)?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Die *monotone Lösung* nach Kalai–Smorodinsky erfüllt INV, PAR, SYM, aber nicht IIA.

*Erläuterung:* Die Unabhängigkeit der Axiome und die Konstruktion geeigneter Gegenbeispiele ist ein ganz eigener Sport; dies führt manchmal zu recht exotischen Verhandlungslösungen. Um dies nicht zu übertreiben, ist die Frage so so gestellt, dass schon wohl-bekannte, klassische Lösungen als Gegenbeispiele taugen. Diese haben wir in Vorlesung und Übung diskutiert.

/2

**2F.** Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, IIA (ohne SYM, also allein durch INV, PAR und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Jede *asymmetrische Nash–Lösung* erfüllt ebenfalls INV, PAR, IIA, aber nicht SYM.

*Erläuterung:* Die Unabhängigkeit der Axiome und die Konstruktion geeigneter Gegenbeispiele ist ein ganz eigener Sport; dies führt manchmal zu recht exotischen Verhandlungslösungen. Um dies nicht zu übertreiben, ist die Frage so so gestellt, dass schon wohl-bekannte, klassische Lösungen als Gegenbeispiele taugen. Diese haben wir in Vorlesung und Übung diskutiert.

/2

**Aufgabe 3.** *Shapley–Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 4, \quad \{1,2\} \mapsto 11, \quad \{2,3\} \mapsto 9, \\ \{1\} \mapsto 4, & \{3\} \mapsto 3, \quad \{1,3\} \mapsto 9, \quad \{1,2,3\} \mapsto 18. \end{cases}$$

**3A.** Schreiben Sie die Funktion $v$ als Linearkombination der Shapley–Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

$$v = +4 \cdot e_{\{1\}}^{\subseteq} + 4 \cdot e_{\{2\}}^{\subseteq} + 3 \cdot e_{\{3\}}^{\subseteq}$$
$$+ 3 \cdot e_{\{1,2\}}^{\subseteq} + 2 \cdot e_{\{1,3\}}^{\subseteq} + 2 \cdot e_{\{2,3\}}^{\subseteq}$$
$$+ 0 \cdot e_{\{1,2,3\}}^{\subseteq}$$

*Erläuterung:* Die Koeffizienten für die einelementigen Mengen sind klar. Danach arbeitet man sich vor über Mengen der Mächtigkeit $2, 3, \ldots$ und korrigiert jeweils zu dem gewünschten Wert. Hier ist ausnahmsweise der letzte Koeffizient gleich 0, bietet also keine zusätzliche Synergie. $\overline{3}$

**3B.** Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge $\rho$ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v)$.

Marginale Mehrwerte:

| Reihenfolge $\rho$ | Spieler $i =$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $(1, 2, 3)$ | $\Delta_i^\rho(v) =$ | 4 | 7 | 7 |
| $(1, 3, 2)$ | | 4 | 9 | 5 |
| $(2, 1, 3)$ | | 7 | 4 | 7 |
| $(2, 3, 1)$ | | 9 | 4 | 5 |
| $(3, 1, 2)$ | | 6 | 9 | 3 |
| $(3, 2, 1)$ | | 9 | 6 | 3 |
| Mittelwert | $\bar{v}(i) =$ | 13/2 | 13/2 | 5 |

*Erläuterung:* Formal ist $\rho : I \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Abzählung / Reihenfolge aller Spieler. Zur Koalition $S_i^\rho = \{\, j \in I \mid \rho(j) \le \rho(i) \,\}$ kam zuletzt der Spieler $i$. Er trägt den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\})$ bei. Der Shapley–Wert ist der Mittelwert über alle $\rho$.
*Plausibilitätscheck:* Die anfangs gegebene Funktion $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ ist symmetrisch in den beiden Spielern $1 \leftrightarrow 2$, daher auch die marginalen Mehrwerte $\Delta_i^\rho$ und die Shapley–Werte $\bar{v}$. $\overline{3}$

**3C.** Berechnen Sie zu $v$ den Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley–Werte:

Wir finden $\bar{v}(1) = 13/2 = 6.5$ und $\bar{v}(2) = 13/2 = 6.5$ und $\bar{v}(3) = 5$.

*Erläuterung:* Dies können Sie hier auf zwei Arten berechnen: Als Mittelwert der *marginalen Mehrwerte* oder durch Aufteilung der *Harsanyi–Dividenden*, also den Koeffizienten bezüglich der obigen Shapley–Basis. Dazu wurden beide Datensätze in den vorigen Fragen vorbereitet. $\overline{3}$

**Aufgabe 4.** *Nash–Gleichgewichte* (12 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$.

| Alice \ Bob | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | 2 / 5 | 4 / 4 | 6 / 1 | 6 / −7 | 6 / −10 |
| $s_1$ | 2 / −5 | 4 / −1 | 5 / 1 | 4 / 3 | 4 / 3 |

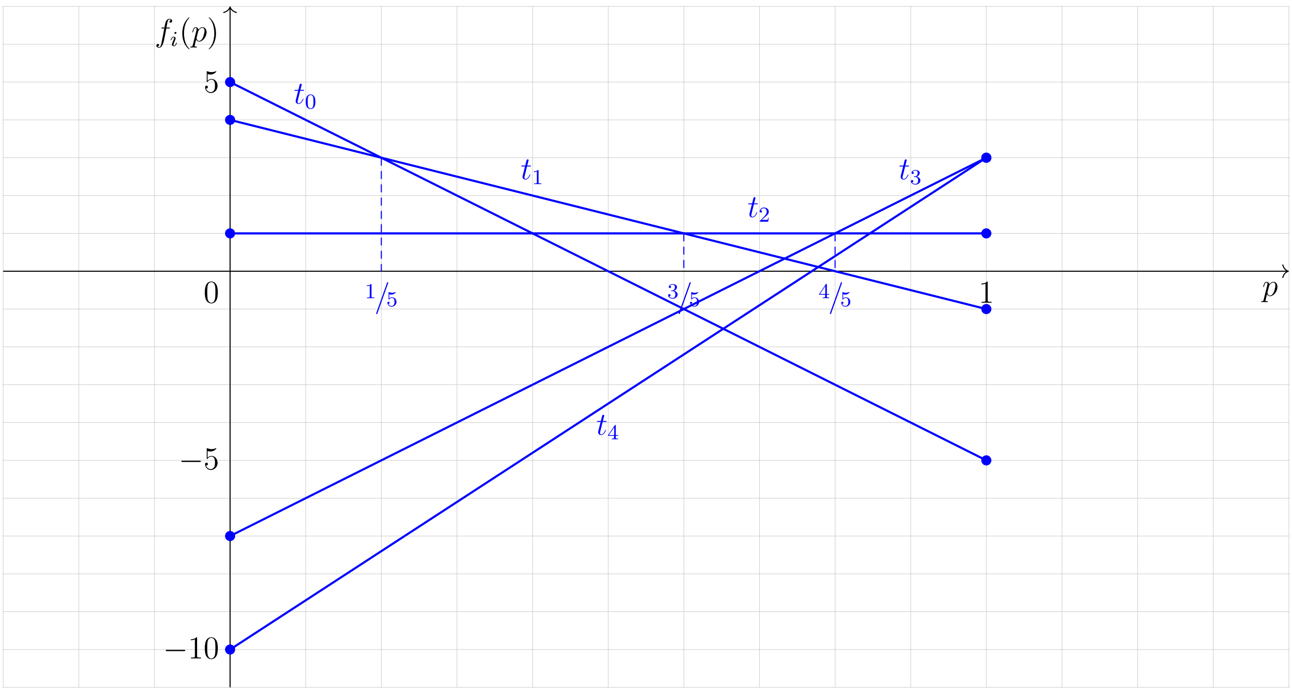
**4A.** Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\,(s_0, t_0)\,\}$.

*Erläuterung:* Reine Gleichgewichte sind leicht zu finden. Wir suchen Spaltenmaxima für Alice und Zeilenmaxima für Bob. Wo beide zusammenfallen, da haben wir ein Nash–Gleichgewicht!

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie $t_i$ für $i = 0, 1, 2, 3$.




Nennen Sie zu jeder Strategie $s_p$ Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$:

| Intervall | $p <$ | $1/5$ | $< p <$ | $3/5$ | $< p <$ | $4/5$ | $< p <$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | $\{t_0\}$ | $[t_0, t_1]$ | $\{t_1\}$ | $[t_1, t_2]$ | $\{t_2\}$ | $[t_2, t_3]$ | $\{t_3\}$ | $[t_3, t_4]$ |

6

**4B.** Bestimmen Sie in jedem dieser Fälle alle Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte: Alice spielt $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Fallunterscheidung:

**1. Fall:** $0 \le p < {}^1\!/\!_5$. Bob spielt $t_0$.
Für Alice sind beide Antworten $s_0$ und $s_1$ gleich gut.
Gleichgewichte sind hier also $(s_p, t_0)$ mit $0 \le p < {}^1\!/\!_5$.

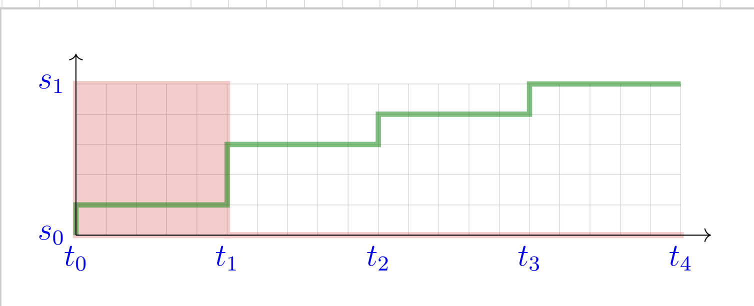
**2. Fall:** $p = {}^1\!/\!_5$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_1$ mit $q \in [0, 1]$.
Für Alice sind auch hier beide Antworten $s_0$ und $s_1$ gleich gut.
Die Nash–Gleichgewichte sind hier also alle $(s_{1/5}, t)$.

**3. Fall:** ${}^1\!/\!_5 < p < {}^3\!/\!_5$. Bob spielt $t_1$.
Für Alice sind beide Antworten $s_0$ und $s_1$ gleich gut.
Gleichgewichte sind hier also $(s_p, t_1)$ mit ${}^1\!/\!_5 < p < {}^3\!/\!_5$.

**4. Fall:** $p = {}^3\!/\!_5$. Bob spielt $t = (1-q)t_1 + qt_2$ mit $q \in [0, 1]$.
Alice' beste Antwort ist $s_0$ für $q > 0$ und $s_p \in [s_0, s_1]$ für $q = 0$.
Das einzige Gleichgewicht ist hier also $(s_{3/5}, t_1)$.

**5. bis 8. Fall:** ${}^3\!/\!_5 < p \le 1$. Bob spielt $t \in [t_2, t_3, t_4]$.
Alice' beste Antwort ist immer $s_0$. Hier entsteht kein Gleichgewicht.

**Zusammenfassung:** Die Menge der Nash–Gleichgewichte ist Vereinigung der drei Intervalle $\{\, (s_p, t_0) \mid 0 \le p \le {}^1\!/\!_5 \,\}$ und $\{s_{1/5}\} \times [t_0, t_1]$ und $\{\, (s_p, t_1) \mid {}^1\!/\!_5 \le p \le {}^3\!/\!_5 \,\}$. *Graphisch:* Beste Reaktion von Alice (rot) und Bob (grün) in der Menge $[s_0, s_1] \times ([t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup [t_3, t_4])$.




*Erläuterung:* Die Nash–Gleichgewichte sind *gegenseitig* beste Antworten, genau wie es die Definition verlangt. In unserem Beispiel ist hierzu jeweils eine kleine Rechnung notwendig. Ebenso können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen. Im generischen Falle, wenn beide Auszahlungsmatrizen algebraisch regulär sind, gibt es hierzu höchstens $1 + n$ Nash–Gleichgewichte, also nur wenige isolierte Punkte, und ihre Anzahl ist zudem immer ungerade. Im allgemeinen, eventuell nicht-regulären Falle müssen Sie mit Komplikationen rechnen, so wie hier.

**Aufgabe 5.** *Korrelierte Gleichgewichte* (14 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ suchen wir reine, gemischte und korrelierte Gleichgewichte:

| Alice \ Bob | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $p_{00}$: 9, 9 | $p_{01}$: 6, 10 |
| 1 | $p_{10}$: 10, 6 | $p_{11}$: 0, 0 |

**5A.** Bestimmen Sie zunächst alle reinen und gemischten Nash–Gleichgewichte.

Nash–Gleichgewichte: Reine Nash–Gleichgewichte sind $(0,1)$ und $(1,0)$, und nur diese.

Sei $(s,t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$ ein gemischtes Gleichgewicht, mit $s = (1-s)\cdot 0 + s \cdot 1$ und $t = (1-t)\cdot 0 + t \cdot 1$. Gilt $0 < s < 1$, so müssen die beiden Auszahlungen $g_A(s_0, t) = (1-t)\cdot 9 + t \cdot 6$ und $g_B(s_1, t) = (1-t)\cdot 10 + t \cdot 0$ gleich sein, also $t = 1/7$. Gilt $0 < t < 1$, so folgt $s = 1/7$ dank Symmetrie. Tatsächlich ist $(1/7, 1/7)$ ein Nash–Gleichgewicht.

Neben den beiden reinen Nash–Gleichgewichten $(0,1)$ und $(1,0)$ existiert somit genau ein weiteres, gemischtes Nash–Gleichgewicht, nämlich $(1/7, 1/7)$.

4

**5B.** Für die Wkten $p_{11}, \dots, p_{22} \geq 0$ gilt wie immer $p_{11} + \dots + p_{22} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

Ungleichungen für Alice: Die Definition verlangt die folgenden 2 Vergleiche:

A01: $9 \cdot p_{00} + 6 \cdot p_{01} \geq 10 \cdot p_{00} + 0 \cdot p_{01}$

A10: $10 \cdot p_{10} + 0 \cdot p_{11} \geq 9 \cdot p_{10} + 6 \cdot p_{11}$

Das bedeutet $p_{00} \leq 6p_{01}$ und $p_{10} \geq 6p_{11}$.

Ungleichungen für Bob: Die Definition verlangt die folgenden 2 Vergleiche:

B01: $9 \cdot p_{00} + 6 \cdot p_{10} \geq 10 \cdot p_{00} + 0 \cdot p_{10}$

B10: $10 \cdot p_{01} + 0 \cdot p_{11} \geq 9 \cdot p_{01} + 6 \cdot p_{11}$

Das bedeutet $p_{00} \leq 6p_{10}$ und $p_{01} \geq 6p_{11}$.

4

**5C.** Welche echt korrelierten Gleichgewichte $p \in \mathrm{CE}(g)$ lassen sich mit einem fairen Münzwurf als Signalgeber realisieren, also mit genau zwei Wkten $= {}^1\!/_2$?

Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

Sei $p = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}) \in \mathrm{CE}(g)$ ein korreliertes Gleichgewicht.

Aus $p_{01} = 0$ folgt $p_{00} = p_{11} = 0$ und $p_{10} = 1$; das ist ein reines Gleichgewicht.
Aus $p_{10} = 0$ folgt $p_{00} = p_{11} = 0$ und $p_{10} = 1$; das ist ein reines Gleichgewicht.
Für ein echt korreliertes Gleichgewicht muss also $p_{01} \neq 0$ und $p_{10} \neq 0$ gelten.
Mit einem fairen Münzwurf lässt sich also nur $p_{01} = p_{10} = {}^1\!/_2$ und $p_{00} = p_{11} = 0$ realisieren.

Dies ist tatsächlich ein korreliertes Gleichgewicht: Es erfüllt alle geforderten Ungleichungen.

2

**5D.** Welche korrelierten Gleichgewichte $p \in \mathrm{CE}(g)$ lassen sich realisieren mit drei Wkten $= {}^1\!/_3$?

Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

Sei $p = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}) \in \mathrm{CE}(g)$ ein korreliertes Gleichgewicht.

Wie in der vorigen Antwort erklärt muss $p_{01} \neq 0$ und $p_{10} \neq 0$ gelten, also $p_{01} = p_{10} = {}^1\!/_3$.

Hingegen ist $p_{11} = {}^1\!/_3$ unmöglich, also erhalten wir $p_{00} = p_{01} = p_{10} = {}^1\!/_3$ und $p_{11} = 0$.

Dies ist tatsächlich ein korreliertes Gleichgewicht: Es erfüllt alle geforderten Ungleichungen.

2

**5E.** Welche korrelierten Gleichgewichte sind von der Form $p_{00} = \alpha$ und $p_{01} = p_{10} = (1-\alpha)/2$?

Korrelierte Gleichgewichte mit Begründung:

Dank $p_{11} = 0$ sind die Ungleichungen $p_{10} \geq 6p_{11}$ und $p_{01} \geq 6p_{11}$ automatisch erfüllt.

Die Ungleichungen $p_{00} \leq 6p_{01}$ und $p_{00} \leq 6p_{10}$ sind äquivalent zu $\alpha \leq 3(1-\alpha)$, also $\alpha \leq 3/4$.

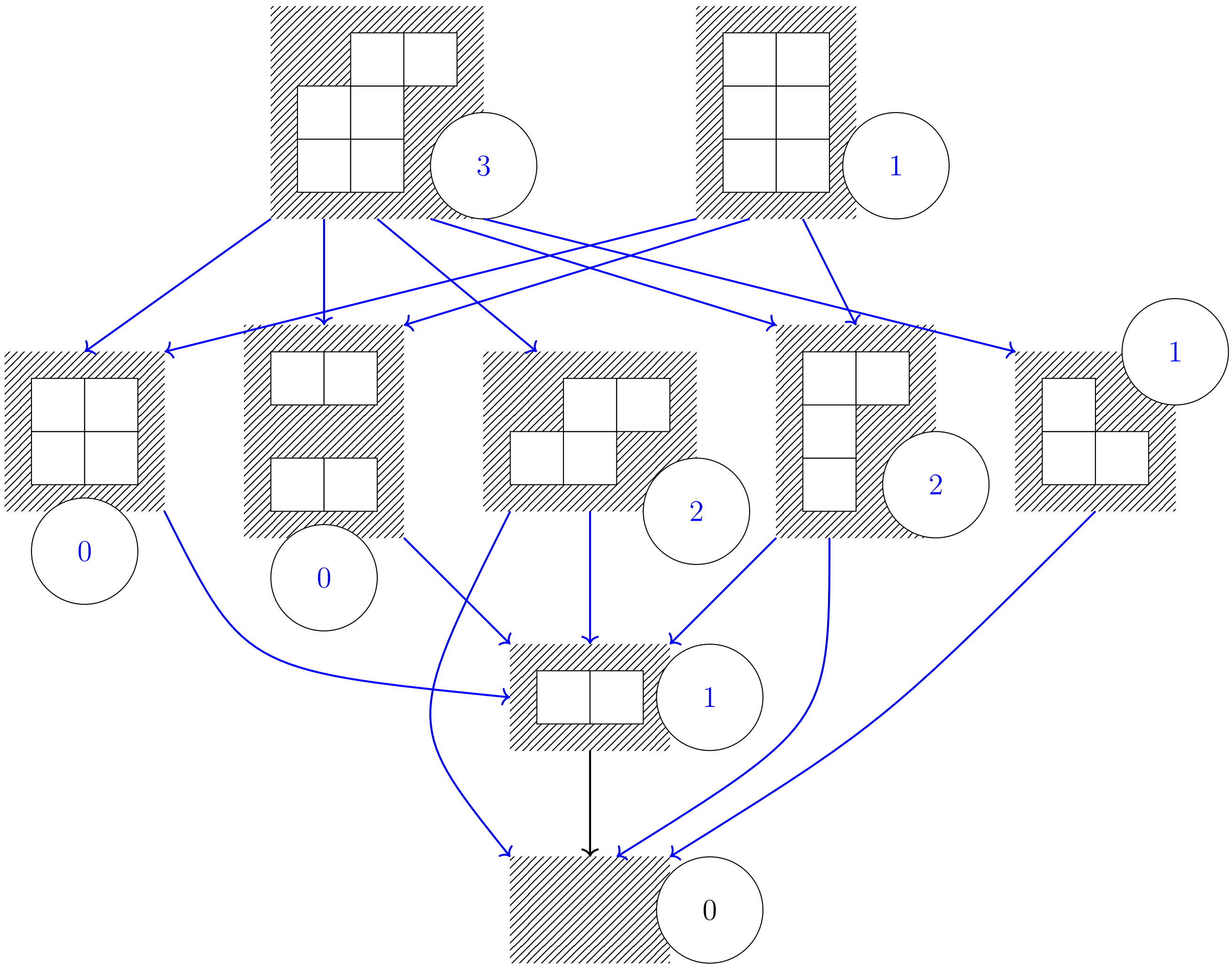
Dies ist tatsächlich ein korreliertes Gleichgewicht: Es erfüllt alle geforderten Ungleichungen.

2

**Aufgabe 6.** *Sprage–Grundy: Fliesentetris, Mario vs Luigi* (12 Punkte)

Mario und Luigi legen abwechselnd Dominosteine auf ein Schachbrett mit $8 \times 8$ Feldern. Jeder Dominostein wird dabei auf zwei nebeneinanderliegende Felder gelegt, auf denen noch kein Dominostein liegt. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

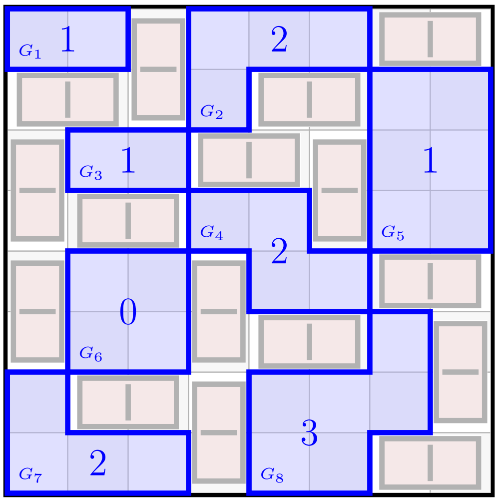
In der folgenden Graphik sind Ecken eines Spielgraphen abgebildet. Jede Ecke zeigt einen Ausschnitt des Schachbretts mit ein oder zwei Inseln freier Felder. Zur Vereinfachung werden Inseln, die durch Rotation oder Verschiebung ineinander übergehen, nur einmal aufgeführt. In einzelne isolierte Felder kann kein Dominostein mehr gelegt werden, daher lassen wir diese weg.

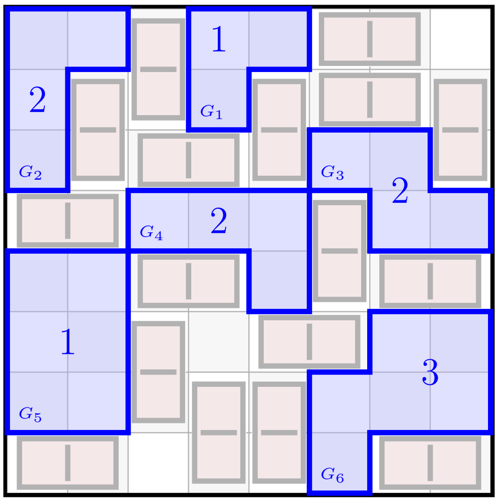



**6A.** Vervollständigen Sie den Spielgraphen, indem Sie alle Kanten einzeichnen.
Tragen Sie anschließend die Grundy–Zahlen der Zustände in die Kreise ein.

6

In den folgenden beiden Spielständen ist Mario am Zug. Luigi hat gerade den Magic Mushroom gegessen und spielt daher ab jetzt fehlerfrei.




**6B.** Kann Mario gegen Super Luigi gewinnen? Geben Sie eine Begründung!

Links: Das linke Spiel ist die Summe $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_8$.
Alle Inseln $G_1, \dots, G_8$ wurden bereits im obigen Graphen vorbereitet.

Die binäre Summe ihrer Grundy–Zahlen ist $1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 2 \oplus 3 = 0$.
Der linke Spielstand ist demnach für den ziehenden Mario eine Verlustposition.

*Erläuterung:* Wir nutzen hier den Satz von Sprague–Grundy.
Unser Spiel $G$ ist äquivalent zu einem Nim-Spiel!

Rechts: Das rechte Spiel ist die Summe $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_6$.
Alle Inseln $G_1, \dots, G_6$ wurden bereits im obigen Graphen vorbereitet.

Die binäre Summe ihrer Grundy–Zahlen ist $2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 3 = 1 \neq 0$.
Der rechte Spielstand ist demnach für den ziehenden Mario eine Gewinnposition.

*Erläuterung:* Wir nutzen hier den Satz von Sprague–Grundy.
Unser Spiel $G$ ist äquivalent zu einem Nim-Spiel!

4

**6C.** Markieren Sie auf dem obigen Spielbrett jeweils einen Gewinnzug, falls einer existiert. 2

Im linken Spielstand existiert für den ziehenden Mario kein Gewinnzug. Im rechten Spielstand existieren Gewinnzüge, und zwar genau sieben: Mario reduziert ein Gebiet $G_1, G_5, G_6$ mit Grundy–Zahl 1 oder 3 durch einen Zug auf die Grundy–Zahl 0 oder 2. Auch hier nutzen wir den Satz von Sprague–Grundy: Unser Spiel $G$ ist äquivalent zu einem Nim-Spiel!

**Aufgabe 7.** *Preiswettbewerb nach Bertrand* (20 Punkte)

Zwei Firmen $i \in \{1, 2\}$ produzieren ein homogenes Gut. Beide haben dabei Produktionskosten von 2 pro Einheit. Beide wählen gleichzeitig und unabhängig einen Preis $p_i \in [0, 8]$, zu dem sie jede Einheit anbieten. Die Kunden kaufen bei der Firma mit dem niedrigeren Preis; haben beide Firmen denselben Preis gewählt, so teilen sich die Kunden hälftig auf. Die Nachfrage richtet sich nach dem Preis: Die Funktion $f : [0, 8] \to \mathbb{R}_{\geq 0} : p \mapsto 8 - p$ gibt an, dass bei einem Preis von $p$ pro Einheit $f(p)$ Einheiten verkauft werden. Der Gewinn für Firma 1 ist somit

$$g_1 \,:\, [0,8]^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (p_1, p_2) \mapsto g_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - 2) \cdot f(p_1) & \text{falls } p_1 < p_2, \\ \frac{1}{2}(p_1 - 2) \cdot f(p_1) & \text{falls } p_1 = p_2, \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2. \end{cases}$$

Entsprechend sieht der Gewinn für Firma 2 aus: Das Spiel ist symmetrisch in den Spielern.

**7A.** Geben Sie ein Nash–Gleichgewicht $p = (p_1, p_2) \in [0, 8]^2$ an und zeigen Sie $p \in \mathrm{NE}(g)$.

Ein Gleichgewicht mit Beweis:

Das Paar $p = (2, 2)$ mit Auszahlung $g(2, 2) = (0, 0)$ ist ein Nash–Gleichgewicht:

Für $0 \leq x < 2$ gilt $g_1(x, 2) < 0 = g_1(2, 2)$. Für $2 < x \leq 8$ gilt $g_1(x, 2) = 0 = g_1(2, 2)$.

Also ist $p_1 = 2$ eine beste Antwort auf $p_2 = 2$. Symmetrisch gilt dasselbe für Spieler 2.

3

**7B.** Zeigen Sie, dass es keine weiteren Nash–Gleichgewichte $(p_1, p_2) \in \mathrm{NE}(g)$ gibt.

Antwort: Ohne Einschränkung sei $p_1 \le p_2$, dank Symmetrie.

(1) Im Falle $p_1 > 2$ kann Firma 2 sich verbessern, indem sie den Preis $p_1$ knapp unterbietet.

(2) Im Falle $p_1 < 2$ kann Firma 1 sich verbessern, durch $p_1 = 2$. Also bleibt nur noch $p_1 = 2$.

(3) Im Falle $p_1 = 2 < p_2$ kann Firma 1 sich verbessern durch $p_1' \in \,]p_1, p_2[$.

Also bleibt nur $(2, 2)$ als einziges Nash–Gleichgewicht.

*Erläuterung:* Der Fall (1) ist anschaulich klar,
die genaue Ausführung erfordert eine kleine Rechnung:

Für $2 < p_1 < p_2$ gilt zunächst $g_2(p_1, p_2) = 0$,
für $2 < p_2' < p_1$ jedoch $g_2(p_1, p_2') = (p_2' - 2)(8 - p_2') > 0$.

Für $2 < p_1 = p_2$ gilt bei hälftiger Teilung $g_2(p_1, p_2) = (p_2 - 2)(8 - p_2)/2$,
für $2 < p_2' < p_1$ jedoch $g_2(p_1, p_2') = (p_2' - 2)(8 - p_2') \to (p_2 - 2)(8 - p_2) > g_2(p_1, p_2)$.

*Achtung:* Auf den Preis $p_1$ mit $2 < p_1 \le 5$ gibt es für Firma 2 keine beste Antwort $p_2'$,
aber die Näherung $p_2' \nearrow p_1$ erlaubt nahezu eine Verdopplung. Für $5 < p_1 \le 8$ ist $p_2' = 5$
die beste Antwort, denn dies maximiert die Gewinnfunktion, siehe die folgende Aufgabe.

4

**7C.** Die gegnerische Firma (2) hat Lieferprobleme, alle Kunden kaufen bei Ihrer Firma (1). Wie sollten Sie den Preis $p_{\mathrm{opt}}$ wählen? Was ist Ihr maximaler Gewinn $g_{\mathrm{opt}}$?

Antwort:

Gesucht ist das Maximum von $h : [0,8] \to \mathbb{R} : p \mapsto (p-2)(8-p)$.

Kurvendiskussion oder Anschauung: Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel.

An der Stelle $p_{\mathrm{opt}} = 5$ erhalten wir den maximalen Gewinn $g_{\mathrm{opt}} = 9$.

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**7D.** Sie wiederholen das Spiel $g : [0,8] \to \mathbb{R}^2$ nun $n$–mal, $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, die Auszahlungen werden dabei summiert. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels $\Gamma_n = \prod_{k=0}^{n-1} g$.

Antwort:

Das Stufenspiel $g$ hat ein einziges Gleichgewicht $(2,2)$.

Durch Rückwärtsinduktion bzw. Satz der Vorlesung hat dann auch das endlich wiederholte Spiel $\Gamma_n$ nur ein einziges Gleichgewicht, nämlich die Verkettung $(2,2) * \cdots * (2,2)$.

$\overline{\phantom{0}}$ 2

Sie wiederholen das Spiel $g$ nun unendlich oft. Die Auszahlungen werden diskontiert summiert:

$$u \;:\; ([0,8]^2)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 \;:\; x \mapsto u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^n g(x^n)$$

mit $x^n = (p_1^n, p_2^n) \in [0,8]^2$ und Diskontfaktor $\delta \in [0,1[$.

**7E.** Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf dieses extensive Spiel $\Gamma$ anwenden?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Ja, denn die Auszahlung $u$ ist stetig:

Das Spiel $g$ ist beschränkt, und es gilt $0 \le \delta < 1$.

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**7F.** Die beiden Firmen verabreden folgendes Strategiepaar: Jede Firma wählt den Preis $p_i^n = 4$ solange keiner davon abweicht. Wählt eine Firma einen anderen Preis, dann wählen beide ab der nächsten Runde den Preis $p_i^n = 2$. Zeigen Sie, dass dies für $\delta \in [1/2, 1[$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, für $\delta \in [0, 1/2[$ jedoch nicht.

Antwort: Dank der Symmetrie genügt es, Spieler 1 zu betrachten.

(a) Gab es bis zur aktuellen Runde $n$ noch keine Abweichung von der Vereinbarung:
Fortsetzung 44 44 44 44 ... $u^1 = \mathrm{const} + \delta^n \cdot (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots) \cdot 4$
Abweichung $p4$ 22 22 22 ... $u^1 = \mathrm{const} + \delta^n \cdot g_1(p, 4)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $g_1(p, 4) \le 4/(1 - \delta)$.

Für $\delta \ge 1/2$ ist diese Ungleichung immer erfüllt,
denn es gilt $g_1(p, 4) < 8 \le 4/(1 - \delta)$.
Unterbieten lohnt sich nicht!

Für $\delta < 1/2$ hingegen gilt $4/(1 - \delta) < 8$,
es existiert $p \lessapprox 4$ mit $4/(1 - \delta) < g_1(p, 4) < 8$:
Geringfügiges Unterbieten lohnt sich!

(b) Gab es bis zur aktuellen Runde $n$ bereits eine Abweichung von der Vereinbarung:
Fortsetzung 22 22 22 22 ... $u^1 = \mathrm{const} + \delta^n \cdot (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots) \cdot 0$
Abweichung $p2$ 22 22 22 ... $u^1 = \mathrm{const} + \delta^n \cdot g_1(p, 2)$.

Wegen $g_1(p, 2) \le 0$ lohnt sich Abweichen hier niemals.
(Das gilt für jedes Nash–Gleichgewicht als Drohpunkt.)

*Erläuterung:* Das Argument gelingt genauso für jede Vereinbarung $p_1^n = p_2^n \in [2, 5]$. Im Intervall $p_1^n = p_2^n \in ]5, 8]$ sinkt der Ertrag der Vereinbarung, die Abweichung wird also lukrativer. Nur ein Diskontfaktor $\delta \nearrow 1$ nahe bei Eins kann hier die Teilspielperfektion sichern. Die Vereinbarung $p_1^n = p_2^n = 8$ hingegen ist nicht haltbar, genauer: nicht teilspielperfekt, da sich einmalige Abweichung zu jedem Preis $p_i^n \in ]2, 8[$ immer lohnt. Dieses einfache Modell enthüllt bei genauerem Hinsehen eine erstaunliche Vielfalt subtiler Phänomene.

Aufgestellt und diskutiert wurde dieses Modell 1883 von Joseph Louis François Bertrand (1822–1900), als ein Gegenstück zum Modell von Antoine Augustin Cournot (1801–1877) in dessen Buch *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses* (1838): Bei Cournot bestimmen die Firmen direkt ihre Produktionsmengen und damit indirekt den Preis, bei Bertrand bestimmen die Firmen direkt ihre Verkaufspreise und damit indirekt die Produktionsmengen. Beide gehören zu den Klassikern und frühen Vorläufern der Ökonomik.

7

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.