Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

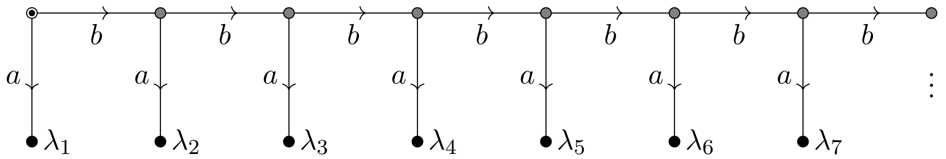
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
/1	/12	/9	/10	/12	/10	/12	/13	/79

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Wir betrachten das folgende dynamische Ein-Personen-Spiel (X, v) in extensiver Form:



$\dots$

$$v(b^{n-1}a) = \lambda_n$$
$$v(b^{\infty}) = \lambda_{\infty}$$

Gilt für jede Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$ das Prinzip der einmaligen Abweichung?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

2

2B. Wir wiederholen unendlich oft das folgende Spiel $g : A = \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$

Alice \ Bob	0	1
0	Alice: 1, Bob: 2	Alice: 4, Bob: 0
1	Alice: 0, Bob: 6	Alice: 3, Bob: 5

mit diskontierter Auszahlung
$u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$
für ein $\delta \in [0,1[$ nahe an 1.

Lässt sich $(2, 4)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren (bis auf einen beliebig kleinen Fehler)?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2C. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_1 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = \{s_1\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2D. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_2 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2E. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, SYM (ohne IIA, also allein durch Invarianz, Pareto–Optimalität und Symmetrie)?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

2

2F. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, IIA (ohne SYM, also allein durch INV, PAR und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

2

Aufgabe 3. *Shapley–Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 2, & \{1,2\} \mapsto 4, & \{2,3\} \mapsto 8, \\ \{1\} \mapsto 1, & \{3\} \mapsto 3, & \{1,3\} \mapsto 6, & \{1,2,3\} \mapsto 15. \end{cases}$$

3A. Schreiben Sie die Funktion v als Linearkombination der Shapley–Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

/3

3B. Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge ρ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^{\rho}(v)$.

Marginale Mehrwerte:

/3

3C. Berechnen Sie zu v den Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley–Werte:

/3

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (10 Punkte)

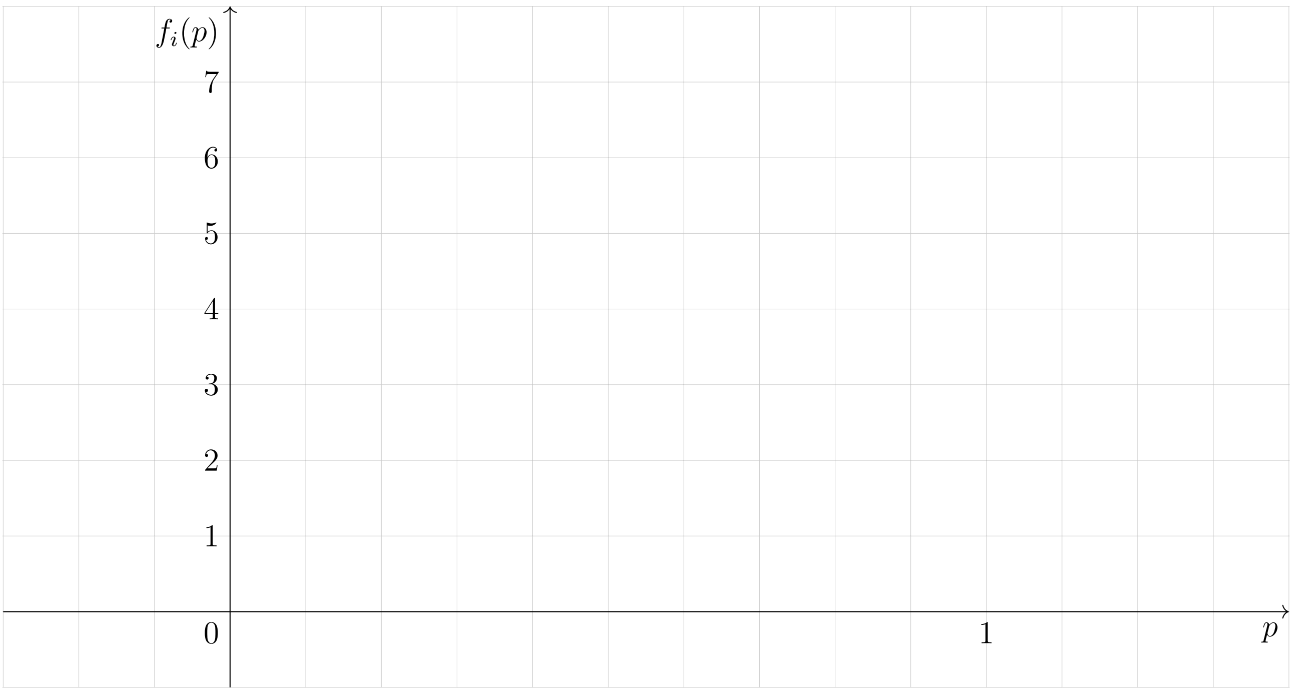
Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	5, 3	1, 1	1, 3	2, 2
s_1	3, 3	3, 6	3, 0	5, 4

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3]$:

Intervall	$p = 0$	$0 < p <$		$< p \leq 1$
Antwort				

6

4B. Bestimmen Sie in jedem dieser vier Fälle alle Nash–Gleichgewichte $(s,t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

4

Aufgabe 5. *Eine exzellente Initiative* (12 Punkte)

Die Universitäten $i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}$ leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität $i \in I$ verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von $b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}$ Mio Euro, gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Der höchste Betrag b_i gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der Menge $M = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}$ teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:

$$u_i \,:\, \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R} \,:\, b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

Sie spielen die Universität $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ der höchste Konkurrenzbetrag.

5A. Angenommen, es gilt $c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

3

5B. Angenommen, es gilt $c_i = 99$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

3

5C. Angenommen, es gilt $c_i = 100$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

$\overline{}$ 3

5D. Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels $u \colon \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R}^9$.

Begründete Lösung:

$\overline{}$ 3

Aufgabe 6. *Schneeballduell: Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (10 Punkte)

Alice und Bob haben je einen Schneeball und stehen anfangs 10 Schritte auseinander. Beim Abstand von $s \geq 3$ Schritten trifft Alice mit Wkt 0.90^{s-1} und Bob mit Wkt 0.85^{s-1}, gerundet:

Schritte $s =$	3	4	5	6	7	8	9	10
Alice $0.90^{s-1} =$	81%	73%	66%	59%	53%	48%	43%	39%
Bob $0.85^{s-1} =$	72%	61%	52%	44%	38%	32%	27%	23%

Das Duell verläuft wie folgt: Zuerst darf Alice auf Bob werfen: Wenn sie trifft, hat sie gewonnen; wenn sie verfehlt, hat Bob gewonnen. Alternativ kann sie auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Bob zugehen, dann ist Bob an der Reihe. Nun darf Bob auf Alice werfen: Wenn er trifft, hat er gewonnen; wenn er verfehlt, hat Alice gewonnen. Alternativ kann er auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Alice zugehen. So geht es abwechselnd weiter. Bei Abstand 2 endet das Duell unentschieden. Jeder Spieler will seine Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren.

6A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen (w = werfen, g = gehen).

Spielbaum:

$\overline{}$ 2

6B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Alle Gleichgewichte:

$\overline{}$ 2

6C. Der Fairness halber bekommt Bob nun zwei Schneebälle. Wie zuvor agiert Alice bei geraden Schrittzahlen, Bob bei ungeraden. Verfehlt Bob seinen ersten Wurf, dann bleibt er mit einem Ball am Zug, und das Duell geht weiter wie oben erklärt: Bob darf werfen oder gehen.

Zeichnen Sie den Spielbaum, vereinfacht nur für Alice' und Bobs *ersten* Wurf. *Hinweis:* Dieser vereinfachte Spielbaum sieht aus wie zuvor, nur die Auszahlungen / Gewinnwkten ändern sich; wenn Bob den ersten Wurf verfehlt, dann kennen wir die Gewinnwkten aus der vorigen Frage.

Mögliche Rechenhilfe: Es gilt $0.72 + 0.28 \cdot 0.72 \approx 0.92$ und $0.52 + 0.48 \cdot 0.52 \approx 0.77$ und $0.52 + 0.48 \cdot 0.41 \approx 0.72$ und $0.38 + 0.62 \cdot 0.41 \approx 0.63$ und $0.27 + 0.73 \cdot 0.41 \approx 0.57$.

Vereinfachter Spielbaum:

4

6D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Alle Gleichgewichte:

2

Aufgabe 7. *Korrelierte Gleichgewichte* (12 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g : \{1,2,3\}^2 \to \mathbb{R}^2$ suchen wir korrelierte Gleichgewichte:

Alice \ Bob	1	2	3
1	p_{11}: Alice 2, Bob 2	p_{12}: Alice 0, Bob 3	p_{13}: Alice 0, Bob 0
2	p_{21}: Alice 1, Bob 1	p_{22}: Alice −1, Bob −1	p_{23}: Alice 1, Bob 1
3	p_{31}: Alice 0, Bob 0	p_{32}: Alice 0, Bob 3	p_{33}: Alice 2, Bob 2

7A. Für die Wkten $p_{11}, \dots, p_{33} \ge 0$ gilt wie immer $p_{11} + \dots + p_{33} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

Ungleichungen A12, …, A32 für Alice:

$\overline{3}$

Ungleichungen B12, …, B32 für Bob:

$\overline{3}$

7B. Ist $p_{11} = p_{33} = 1/2$ ein korreliertes Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7C. Finden Sie das korrelierte Gleichgewicht mit $p_{13} = p_{31} = 1/8$. (Es existiert und ist eindeutig.)
Hinweis: Untersuchen Sie zunächst p_{11} und p_{33}, anschließend p_{23} und p_{21}.

Antwort mit Herleitung:

4

Aufgabe 8. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (13 Punkte)

8A. Gegeben ist das lineare Programm $x \geq 0$, $Ax+b \geq 0$, $u(x) = cx+d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	1	-3	9
y_2	-1	-1	7
y_3	-2	1	8
u	2	1	-2

$\Longleftrightarrow$

	y_3	x_2	v
y_1			
y_2			
x_1			
u			

$\Longleftrightarrow$

			v
u			

/4

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

/3

8B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ Ax + b \geq 0 \,\}$.

/2

8C. Wir betrachten nun folgende Familie mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

	x_1	x_2	v
y_1	1	-3	9
y_2	α	-1	7
y_3	-2	1	8
u	2	1	-2

Wir haben oben den Fall $\alpha = -1$ untersucht.

Nennen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ hat.

Begründete Antwort:

/2

8D. Existiert ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, sodass das primale LP und das duale LP beide erfüllbar und unbeschränkt sind?

☐ Ja ☐ Nein. Satz oder Beispiel:

/2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.