Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
/1	/12	/9	/10	/12	/10	/12	/13	/79

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

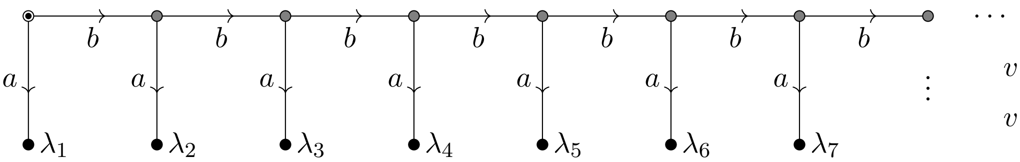
Dies war die dritte Klausur zu unserer Veranstaltung Spieltheorie. Lernen nach alten Klausuren wird gern genutzt, oft übertrieben, hier war es nur begrenzt möglich. Diese Klausur war sehr eng an Vorlesung und Übung angelehnt, so gesehen leicht. Die Fragen waren nicht identisch, die Herausforderung also durchaus real, die erlernten Methoden auf einfache, neue Beispiele anzuwenden. Viele Punkte sind leicht, erfordern aber wie angekündigt Übung und Routine.

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderbare Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Wir betrachten das folgende dynamische Ein-Personen-Spiel (X, v) in extensiver Form:



$$v(b^{n-1}a) = \lambda_n$$
$$v(b^\infty) = \lambda_\infty$$

Gilt für jede Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$ das Prinzip der einmaligen Abweichung?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Ein Gegenbeispiel ist $\lambda_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ und $\lambda_\infty = 1$. Die Strategie $s = \{\text{spiele immer } a\}$ ist dann optimal bezüglich einmaliger Abweichung. Dennoch ist s nicht teilspielperfekt!

Erläuterung: Der zugehörige Satz fordert als einzige Voraussetzung, dass die Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$ stetig sein soll (bezüglich der Baumtopologie, also hier $\lambda_n \to \lambda_\infty$ für $n \to \infty$). Dies ist hinreichend und garantiert die Gültigkeit des Prinzips der einmaligen Abweichung. Das Prinzip selbst ist ungemein nützlich für unendliche Spiele, da die Rückwärtsinduktion nicht greift und die Lösung des Spiels sonst kaum zu bewältigen wäre. Das Prinzip der einmaligen Abweichung ermöglicht eine präzise Analyse, manchmal wird sie sogar sehr einfach. Dies haben wir eindrucksvoll in zahlreichen Anwendungen gesehen.

2

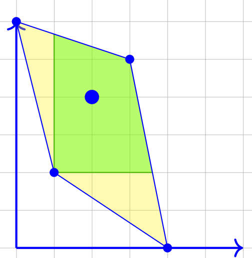
2B. Wir wiederholen unendlich oft das folgende Spiel $g : A = \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$

Alice \ Bob	0	1
0	1, 2	4, 0
1	0, 6	3, 5

mit diskontierter Auszahlung
$u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$
für ein $\delta \in [0, 1[$ nahe an 1.

Lässt sich $(2, 4)$ als Gleichgewichtsauszahlung realisieren (bis auf einen beliebig kleinen Fehler)?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:



Diese Auszahlung ist möglich dank Nashs Folk Theorem.
Genauer: Das Spiel g hat 00 als einziges Nash–Gleichgewicht, entsprechend dem Gefangenendilemma, mit Auszahlung $(1, 2)$.
Die gewünschte Auszahlung $(2, 4)$ liegt oberhalb dieses Drohpunkts und zudem in der konvexen Hülle der vier möglichen Auszahlungen.
Demnach können wir $(2, 4)$ durch rationale Approximation realisieren.

Erläuterung: Die Approximation wird beliebig genau für $\delta \nearrow 1$. Wenn die Spieler einen externen Zufallsgenerator als Signalgeber nutzen können / wollen / dürfen, dann lässt sich die gewünschte Auszahlung $(2, 4)$ sogar exakt realisieren (als Erwartungswert).

2

2C. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_1 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = \{s_1\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Wie in den Übungen kann man leicht Gegenbeispiele konstruieren. *Konkrete Illustration:*

$\Gamma_1 =$

A \ B	0	1
0	1, 1	2, 0
1	0, 2	1, 1

$\Gamma_2 =$

A \ B	0	1
0	0, 0	0, −1
1	−1, 0	3, 3

Hier hat Γ_1 nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, Γ_2 hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky. Neben den offensichtlichen hat Γ noch weitere Gleichgewichte: Alice und Bob spielen 11 in Γ_2 genau dann, wenn 11 in Γ_1 gespielt wurde, sonst spielen sie 00 in Γ_2; das hebt 11 zu einem Nash–Gleichgewicht in der ersten Runde. Dasselbe gelingt für 01 und 10; die Belohnung aus Γ_2 macht diese Strategiepaare lukrativ.

2

2D. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele, wobei Γ_2 genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht habe, also $\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$. Gilt dann $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$?

☒ Ja ☐ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Das folgt per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo.

Erläuterung: Wichtig ist bei diesem Argument, dass in jeder Kopie des Spiels Γ_2, egal zu welcher Vorgeschichte, dasselbe Gleichgewicht gespielt werden *muss*. Damit hat das erste Spiel Γ_1 keinen Einfluss auf den Fortgang, und es gilt $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$. Das steht im bemerkenswerten Gegensatz zur vorigen Frage.

2

2E. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, SYM (ohne IIA, also allein durch Invarianz, Pareto–Optimalität und Symmetrie)?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Die *monotone Lösung* nach Kalai–Smorodinsky erfüllt INV, PAR, SYM, aber nicht IIA.

Erläuterung: Die Unabhängigkeit der Axiome und die Konstruktion geeigneter Gegenbeispiele ist ein ganz eigener Sport; dies führt manchmal zu recht exotischen Verhandlungslösungen. Um dies nicht zu übertreiben, ist die Frage so so gestellt, dass schon wohl-bekannte, klassische Lösungen als Gegenbeispiele taugen. Diese haben wir in Vorlesung und Übung diskutiert.

/2

2F. Ist die Nash–Verhandlungslösung bereits charakterisiert durch die Axiome INV, PAR, IIA (ohne SYM, also allein durch INV, PAR und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Gegenbeispiel:

Jede *asymmetrische Nash–Lösung* erfüllt ebenfalls INV, PAR, IIA, aber nicht SYM.

Erläuterung: Die Unabhängigkeit der Axiome und die Konstruktion geeigneter Gegenbeispiele ist ein ganz eigener Sport; dies führt manchmal zu recht exotischen Verhandlungslösungen. Um dies nicht zu übertreiben, ist die Frage so so gestellt, dass schon wohl-bekannte, klassische Lösungen als Gegenbeispiele taugen. Diese haben wir in Vorlesung und Übung diskutiert.

/2

Aufgabe 3. *Shapley–Wert* (9 Punkte)

Über der Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{2\} \mapsto 2, & \{1,2\} \mapsto 4, & \{2,3\} \mapsto 8, \\ \{1\} \mapsto 1, & \{3\} \mapsto 3, & \{1,3\} \mapsto 6, & \{1,2,3\} \mapsto 15. \end{cases}$$

3A. Schreiben Sie die Funktion v als Linearkombination der Shapley–Basis $(e^{\subseteq}_K)_{\emptyset \neq K \subseteq I}$.

Linearkombination:

$$\begin{aligned} v = &+1 \cdot e^{\subseteq}_{\{1\}} + 2 \cdot e^{\subseteq}_{\{2\}} + 3 \cdot e^{\subseteq}_{\{3\}} \\ &+1 \cdot e^{\subseteq}_{\{1,2\}} + 2 \cdot e^{\subseteq}_{\{1,3\}} + 3 \cdot e^{\subseteq}_{\{2,3\}} \\ &+3 \cdot e^{\subseteq}_{\{1,2,3\}} \end{aligned}$$

Erläuterung: Die Koeffizienten für die einelementigen Mengen sind klar. Danach arbeitet man sich vor über Mengen der Mächtigkeit $2, 3, \dots$ und korrigiert jeweils zu dem gewünschten Wert. 3

3B. Bestimmen Sie für jeden Spieler $i \in I$ und Reihenfolge ρ den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v)$.

Marginale Mehrwerte:

Reihenfolge ρ	Spieler $i =$	1	2	3
$(1,2,3)$	$\Delta_i^\rho(v) =$	1	3	11
$(1,3,2)$		1	9	5
$(2,1,3)$		2	2	11
$(2,3,1)$		7	2	6
$(3,1,2)$		3	9	3
$(3,2,1)$		7	5	3
Mittelwert	$\bar{v}(i) =$	$7/2$	5	$13/2$

Erläuterung: Formal ist $\rho : I \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$ eine Abzählung / Reihenfolge aller Spieler. Zur Koalition $S_i^\rho = \{\, j \in I \mid \rho(j) \le \rho(i) \,\}$ kam zuletzt der Spieler i. Er trägt den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\})$ bei. Der Shapley–Wert ist der Mittelwert über alle ρ. 3

3C. Berechnen Sie zu v den Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Shapley–Werte:

Wir finden $\bar{v}(1) = 7/2 = 3.5$ und $\bar{v}(2) = 5$ und $\bar{v}(3) = 13/2 = 6.5$.

Erläuterung: Dies können Sie hier auf zwei Arten berechnen: Als Mittelwert der *marginalen Mehrwerte* oder durch Aufteilung der *Harsanyi–Dividenden*, also den Koeffizienten bezüglich der obigen Shapley–Basis. Dazu wurden beide Datensätze in den vorigen Fragen vorbereitet. 3

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (10 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	3 5	1 1	3 1	2 2
s_1	3 3	6 3	0 3	4 5

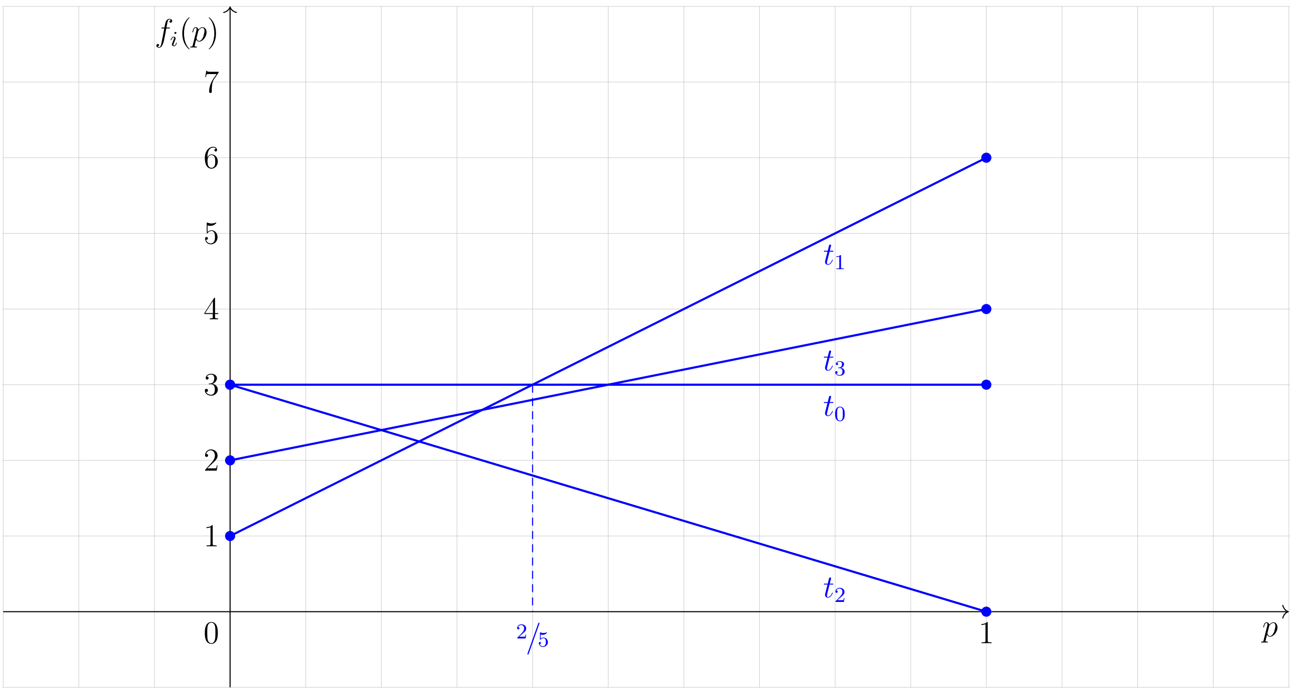
4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_0, t_0),\ (s_1, t_1) \,\}$.

Erläuterung: Reine Gleichgewichte sind leicht zu finden. Wir suchen Spaltenmaxima für Alice und Zeilenmaxima für Bob. Wo beide zusammenfallen, da haben wir ein Nash–Gleichgewicht!

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[T] = [t_0, t_1, t_2, t_3]$:

Intervall	$p = 0$	$0 < p < 2/5$	$p = 2/5$	$2/5 < p \leq 1$
Antwort	$[t_0, t_2]$	$\{t_0\}$	$[t_0, t_1]$	$\{t_1\}$

6

4B. Bestimmen Sie in jedem dieser vier Fälle alle Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte: Alice spielt $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: Hier gilt $p = 0$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_2$.
Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$, abweichend $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$.
Es muss $g_A(s_0, t) \geq g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) \geq 2q$, somit $q \geq 1/2$.

2. Fall: Hier gilt $0 < p < 2/5$. Bob spielt $t = t_0$.
Wegen $g_A(s_0, t_0) = 5 > 3 = g_A(s_1, t_0)$ entsteht hier kein Gleichgewicht.

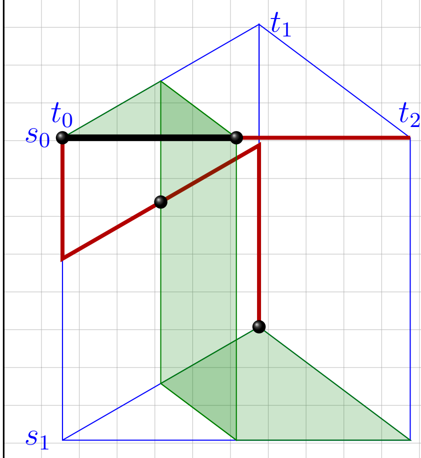
3. Fall: Hier gilt $p = 2/5$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_1$.
Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$ bzw. $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$.
Es muss $g_A(s_0, t) = g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) = 2q$, somit $q = 1/2$.

4. Fall: Hier gilt $2/5 < p \leq 1$. Bob spielt $t = t_1$.
Wegen $g_A(s_0, t_0) = 1 < 3 = g_A(s_1, t_0)$ muss Alice s_1 spielen.

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte (s_1, t_1) und (s, t) mit $s = 3/5\, s_0 + 2/5\, s_1$ und $t = 1/2\, t_0 + 1/2\, t_1$ sowie das Intervall aller Punkte (s_0, t) mit $t = (1-q)t_0 + qt_2$ und $q \in [0, 1/2]$.

Erläuterung: Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, genau wie die Definition von Nash–Gleichgewicht es verlangt. Hierzu ist jeweils eine kleine Rechnung notwendig. Jedes so gefundene Gleichgewicht können Sie nun leicht in die Gleichgewichtsdefinition einsetzen und überprüfen. Diese *Punktprobe* ist eine leichte Routine. Unsere Rechnung zeigt noch mehr: Weitere Nash–Gleichgewichte gibt es tatsächlich nicht.

Zusatz: Als besonderen Bonus haben wir für Sie eine erklärende Skizze angefertigt:



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus Frage 4A. Bobs Strategie t_3 wird strikt dominiert und kommt daher in keinem Nash–Gleichgewicht vor. Spielt Bob die Strategie $t = q_0t_0 + q_1t_1 + q_2t_2$, dann erhält Alice die Auszahlung $5q_0+1q_1+1q_2$, wenn sie s_0 spielt, und $3q_0+3q_1+3q_2$, wenn sie s_1 spielt. Demnach ist s_0 die beste Antwort, falls $q_0 > 1/2$, und s_1 ist die beste Antwort, falls $q_0 < 1/2$. Im Fall $q_0 = 1/2$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 eine beste Antwort. So erhalten wir die Reaktionsfläche für Alice. Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Erläuterung: Ebenso können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen. Im generischen Falle, wenn beide Auszahlungsmatrizen algebraisch regulär sind, gibt es hierzu höchstens $1+n$ Nash–Gleichgewichte, also nur wenige isolierte Punkte, und ihre Anzahl ist zudem immer ungerade. Im allgemeinen, eventuell nicht-regulären Falle müssen Sie mit Komplikationen rechnen, so wie hier.

Aufgabe 5. *Eine exzellente Initiative* (12 Punkte)

Die Universitäten $i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}$ leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität $i \in I$ verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von $b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}$ Mio Euro, gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Der höchste Betrag b_i gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der Menge $M = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}$ teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:

$$u_i : \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R} : b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

Sie spielen die Universität $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ der höchste Konkurrenzbetrag.

5A. Angenommen, es gilt $c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

Die beste Antwort ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn $100 - b_i = 99 - c_i > 0$.

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \geq c_i + 2$ ist der Gewinn $100 - b_i \leq 98 - c_i \leq 0$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \leq 0$, also kleiner.

3

5B. Angenommen, es gilt $c_i = 99$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

Die besten Antworten sind $b_i = 0$ oder $b_i = 100$ mit Gewinn 0.

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 99$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - 99 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i \leq 98$ ist der Gewinn $-b_1 < 0$, also kleiner.

3

5C. Angenommen, es gilt $c_i = 100$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

Beste Antworten mit Begründung:

Die beste Antwort ist $b_i = 0$ mit Gewinn 0.

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 100$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \le 50 - 100 < 0$, also kleiner.
Für $1 \le b_i \le 99$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

3

5D. Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels $u\colon \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R}^9$.

Begründete Lösung:

Wir zeigen im Folgenden, dass es keine (reinen) Nash–Gleichgewichte gibt!

Angenommen $b = (b_1, b_2, \dots, b_9) \in \{0, 1, \dots, 100\}^9$ wäre ein Nash–Gleichgewicht.
Wir betrachten die erste Universität $i \in I$ mit dem maximalen Betrag $b_i = \max_j b_j$.
Nach obigem Muster unterscheiden wir drei Fälle und nutzen unsere Vorbereitung:

Gilt $b_i \le 98$, dann kann sich jede andere Universität $j \in I \smallsetminus \{i\}$ verbessern (**5A**).
Also ist b, entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht.

Gilt $b_i = 99$, dann wählen alle anderen 0 oder 100, hier also 0 (**5B**).
Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

Gilt $b_i = 100$, dann wählen alle anderen Universitäten 0 (**5C**).
Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

Erläuterung: Dies ist ein erschütterndes Ergebnis, aber in diesem Modell leicht nachzurechnen. Es handelt sich um eine perfide Auktion, bei der alle Bieter bezahlen, engl. *all pay auction*. Das Kapitel über Auktionen ist für diese Aufgabe allerdings gar nicht notwendig, denn wir nutzen hier nur den Begriff des Nash–Gleichgewichts und sorgfältige Fallunterscheidungen. Der grundlegende Satz der Auktionstheorie, Vickreys Satz zur Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgsames Arbeiten.

Interpretation: Da es kein Gleichgewicht gibt, ist das Verhalten sehr schwer vorhersehbar. Die Initiative des „Wohltäters“ zielt vielleicht sogar genau darauf ab, die Universitäten in ein verlustreiches Bietergefecht zu verwickeln, bei dem er mehr gewinnt als der ausgelobte Preis. Umgekehrt ist nach dem Verfahren der Katzenjammer groß: „Hätte ich gewusst…, dann hätte ich…“. Hätte…, hätte…! Bei Nash–Gleichgewichten kann das nicht passieren!

3

Aufgabe 6. *Schneeballduell: Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (10 Punkte)

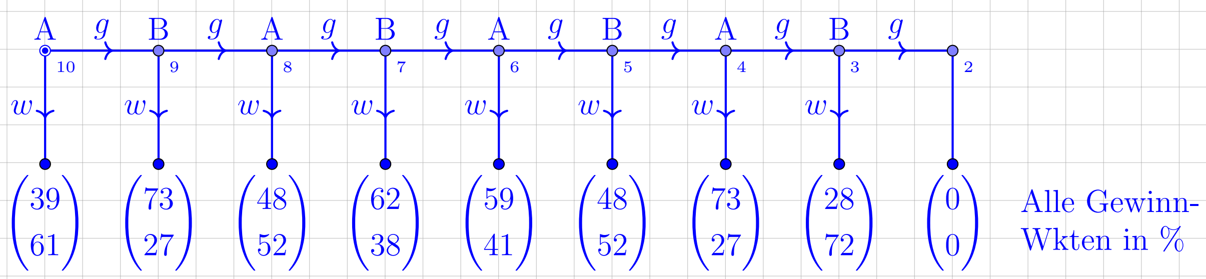
Alice und Bob haben je einen Schneeball und stehen anfangs 10 Schritte auseinander. Beim Abstand von $s \ge 3$ Schritten trifft Alice mit Wkt 0.90^{s-1} und Bob mit Wkt 0.85^{s-1}, gerundet:

Schritte $s =$	3	4	5	6	7	8	9	10
Alice $0.90^{s-1} =$	81%	73%	66%	59%	53%	48%	43%	39%
Bob $0.85^{s-1} =$	72%	61%	52%	44%	38%	32%	27%	23%

Das Duell verläuft wie folgt: Zuerst darf Alice auf Bob werfen: Wenn sie trifft, hat sie gewonnen; wenn sie verfehlt, hat Bob gewonnen. Alternativ kann sie auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Bob zugehen, dann ist Bob an der Reihe. Nun darf Bob auf Alice werfen: Wenn er trifft, hat er gewonnen; wenn er verfehlt, hat Alice gewonnen. Alternativ kann er auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Alice zugehen. So geht es abwechselnd weiter. Bei Abstand 2 endet das Duell unentschieden. Jeder Spieler will seine Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren.

6A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen (w = werfen, g = gehen).

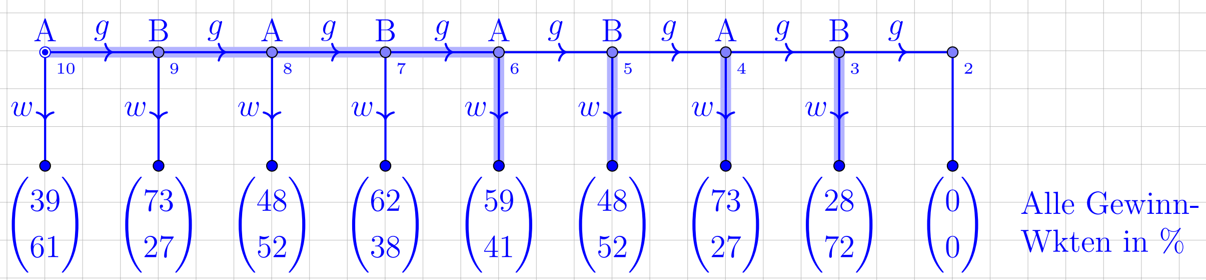
Spielbaum:



Dies ist der (kurze) Spielbaum mit den oben angegebenen Gewinnwkten für Alice und Bob. Noch ausführlicher könnten wir an jedes Bein zwei Füße setzen: Eine Zufallsverzweigung entscheidet zwischen Alice' Sieg $(1, 0)$ und Bobs Sieg $(0, 1)$ mit den angegebenen Wkten. Dies haben wir hier durch die Gewinnerwartung gleich zusammengefasst, das ist kürzer. 2

6B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Alle Gleichgewichte:



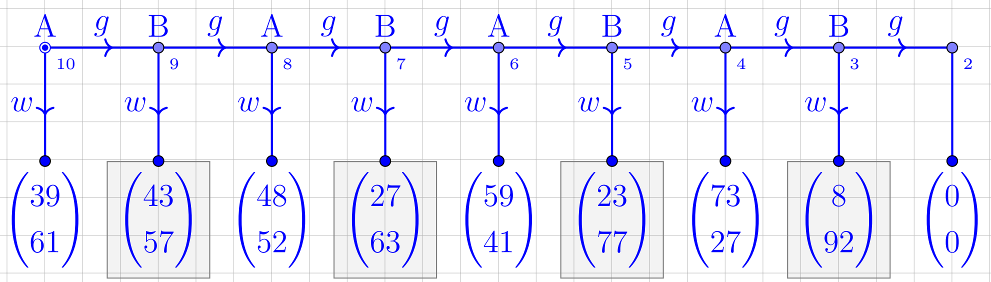
Wir nutzen Rückwärtsinduktion und finden hier nur dieses teilspielperfekte Gleichgewicht. *Hinweis:* Dieses einzige Gleichgewicht können Sie direkt in der vorigen Antwort einzeichnen. *Schlussfolgerung:* Alice gewinnt mit Wkt 59%, Bob entsprechend mit Wkt 41%. 2

6C. Der Fairness halber bekommt Bob nun zwei Schneebälle. Wie zuvor agiert Alice bei geraden Schrittzahlen, Bob bei ungeraden. Verfehlt Bob seinen ersten Wurf, dann bleibt er mit einem Ball am Zug, und das Duell geht weiter wie oben erklärt: Bob darf werfen oder gehen.

Zeichnen Sie den Spielbaum, vereinfacht nur für Alice' und Bobs *ersten* Wurf. *Hinweis:* Dieser vereinfachte Spielbaum sieht aus wie zuvor, nur die Auszahlungen / Gewinnwkten ändern sich; wenn Bob den ersten Wurf verfehlt, dann kennen wir die Gewinnwkten aus der vorigen Frage.

Mögliche Rechenhilfe: Es gilt $0.72 + 0.28 \cdot 0.72 \approx 0.92$ und $0.52 + 0.48 \cdot 0.52 \approx 0.77$ und $0.52 + 0.48 \cdot 0.41 \approx 0.72$ und $0.38 + 0.62 \cdot 0.41 \approx 0.63$ und $0.27 + 0.73 \cdot 0.41 \approx 0.57$.

Vereinfachter Spielbaum:



Alle Gewinn-Wkten in %

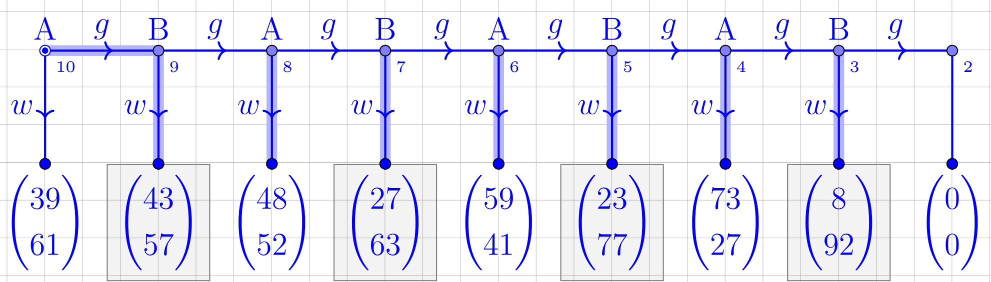
Erläuterung: Wir betrachten hier den vereinfachten Spielbaum. Der vollständige Spielbaum hat an Stelle der vier Boxen jeweils eine Zufallsverzweigung, getroffen oder verfehlt, und an letzterem den entsprechenden Teilbaum aus der vorigen Frage. Das ist möglich, aber für diese Klausur unnötig umfangreich, daher arbeiten wir hier gleich mit obiger Vereinfachung.

Ein guter Kompromiss wäre ein Spielgraph (kein Baum), der die beiden obigen Bäume in Leiterform verbindet. Wenn Sie möchten, führen Sie dies als Übung aus, es macht Freude!

4

6D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Alle Gleichgewichte:



Alle Gewinn-Wkten in %

Wir nutzen Rückwärtsinduktion und finden hier nur dieses teilspielperfekte Gleichgewicht.
Bemerkung: Der Verlauf des Duells ist erstaunlich und keineswegs intuitiv. Mathe macht Ah!
Schlussfolgerung: Diesmal gewinnt Bob mit Wkt 57%, Alice entsprechend mit Wkt 43%.

2

Aufgabe 7. *Korrelierte Gleichgewichte* (12 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g\colon \{1,2,3\}^2 \to \mathbb{R}^2$ suchen wir korrelierte Gleichgewichte:

Alice \ Bob	1	2	3
1	p_{11}: 2, 2	p_{12}: 0, 3	p_{13}: 0, 0
2	p_{21}: 1, 1	p_{22}: -1, -1	p_{23}: 1, 1
3	p_{31}: 0, 0	p_{32}: 0, 3	p_{33}: 2, 2

7A. Für die Wkten $p_{11}, \dots, p_{33} \ge 0$ gilt wie immer $p_{11} + \dots + p_{33} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

Ungleichungen A12, …, A32 für Alice: Die Definition verlangt die folgenden 6 Vergleiche:

A12: $+2 \cdot p_{11} + 0 \cdot p_{12} + 0 \cdot p_{13} \ge +1 \cdot p_{11} - 1 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{13}$

A13: $+2 \cdot p_{11} + 0 \cdot p_{12} + 0 \cdot p_{13} \ge +0 \cdot p_{11} + 0 \cdot p_{12} + 2 \cdot p_{13}$

A21: $+1 \cdot p_{21} - 1 \cdot p_{22} + 1 \cdot p_{23} \ge +2 \cdot p_{21} + 0 \cdot p_{22} + 0 \cdot p_{23}$

A23: $+1 \cdot p_{21} - 1 \cdot p_{22} + 1 \cdot p_{23} \ge +0 \cdot p_{21} + 0 \cdot p_{22} + 2 \cdot p_{23}$

A31: $+0 \cdot p_{31} + 0 \cdot p_{32} + 2 \cdot p_{33} \ge +2 \cdot p_{31} + 0 \cdot p_{32} + 0 \cdot p_{33}$

A32: $+0 \cdot p_{31} + 0 \cdot p_{32} + 2 \cdot p_{33} \ge +1 \cdot p_{31} - 1 \cdot p_{32} + 1 \cdot p_{33}$

Erläuterung: Diese sechs Ungleichungen sind leicht aufzustellen und erfordern vor allem gute Buchführung. In jedem korrelierten Gleichgewicht gilt insbesondere $p_{11} \ge p_{13}$ und $p_{33} \ge p_{31}$.

3

Ungleichungen B12, …, B32 für Bob: Die Definition verlangt die folgenden 6 Vergleiche:

B12: $+2 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{21} + 0 \cdot p_{31} \ge +3 \cdot p_{11} - 1 \cdot p_{21} + 3 \cdot p_{31}$

B13: $+2 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{21} + 0 \cdot p_{31} \ge +0 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{21} + 2 \cdot p_{31}$

B21: $+3 \cdot p_{12} - 1 \cdot p_{22} + 3 \cdot p_{32} \ge +2 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{22} + 0 \cdot p_{32}$

B23: $+3 \cdot p_{12} - 1 \cdot p_{22} + 3 \cdot p_{32} \ge +0 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{22} + 2 \cdot p_{32}$

B31: $+0 \cdot p_{13} + 1 \cdot p_{23} + 2 \cdot p_{33} \ge +2 \cdot p_{13} + 1 \cdot p_{23} + 0 \cdot p_{33}$

B32: $+0 \cdot p_{13} + 1 \cdot p_{23} + 2 \cdot p_{33} \ge +3 \cdot p_{13} - 1 \cdot p_{23} + 3 \cdot p_{33}$

Erläuterung: Auch diese sechs Ungleichungen sind leicht aufzustellen und erfordern vor allem gute Buchführung. Wir können nun dieses Ungleichungssystem allgemein umformen und lösen. Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden jedoch nur zwei Spezialfälle.

3

7B. Ist $p_{11} = p_{33} = 1/2$ ein korreliertes Gleichgewicht?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Ungleichungen B12 und B32 sind nicht erfüllt.

Erläuterung: Wie bei jedem System von Un/Gleichungen ist es sehr leicht, einen vorgelegten Lösungskandidaten zu prüfen: Einsetzen genügt! Deshalb ist diese *Punktprobe* so beliebt.

/2

7C. Finden Sie das korrelierte Gleichgewicht mit $p_{13} = p_{31} = 1/8$. (Es existiert und ist eindeutig.)
Hinweis: Untersuchen Sie zunächst p_{11} und p_{33}, anschließend p_{23} und p_{21}.

Antwort mit Herleitung:

Aus A13 folgt $p_{11} \geq 1/8$.
Aus A31 folgt $p_{33} \geq 1/8$.
Aus B12 folgt $p_{21} \geq 1/4$.
Aus B32 folgt $p_{23} \geq 1/4$.
Damit folgt $p_{13} + p_{31} + p_{11} + p_{33} + p_{21} + p_{23} \geq 1$.
Also gilt überall Gleichheit, und alle anderen Wkten sind 0.

Übersicht: Die gefundene Lösung sieht somit wie folgt aus:

Alice \ Bob	1	2	3
1	2 — $1/8$ — 2	0 — 0 — 3	0 — $1/8$ — 0
2	1 — $1/4$ — 1	-1 — 0 — -1	1 — $1/4$ — 1
3	0 — $1/8$ — 0	0 — 0 — 3	2 — $1/8$ — 2

Erläuterung: Ehrlicherweise müssten wir nun noch alle weiteren Ungleichungen überprüfen. Sie gelten tatsächlich! Die summarische Aussage „Alles ist gut.“ ist in einer Klausur jedoch schlecht zu bepunkten, deshalb wurde hier nicht danach gefragt. Die Fragestellung enthält hierzu die hilfreiche Aussage, dass genau eine solche Lösung existiert. Wir haben oben die einzige Möglichkeit gefunden und somit die Eindeutigkeit bewiesen. Sie dürfen der freundlichen Fragestellung mit Existenzaussage vertrauen, die weitere Überprüfung entfällt damit. Als Übung dürfen Sie gerne unseren Kandidaten in alle Ungleichungen einsetzen und nachprüfen. Es gilt die Weisheit der vorigen Frage: Die *Punktprobe* ist eine leichte Routine.

Mögliche Anschlussfragen / Übung: Nennen Sie alle reinen Nash–Gleichgewichte des Spiels g. Nennen Sie ein strikt gemischtes Nash–Gleichgewicht.

Fun fact: Unser korreliertes Gleichgewicht p hat eine sehr spezielle Form, es entspricht nämlich einem Nash–Gleichgewicht, mit $s_A = (1/4, 1/2, 1/4)$ und $s_B = (1/2, 0, 1/2)$. Hätten Sie's erkannt?

/4

Aufgabe 8. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (13 Punkte)

8A. Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax+b \ge 0$, $u(x) = cx+d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	1	-3	9
y_2	-1	-1	7
y_3	-2	1	8
u	2	1	-2

$\Longleftrightarrow$

	y_3	x_2	v
y_1	$-1/2$	$-5/2$	13
y_2	$1/2$	$-3/2$	3
x_1	$-1/2$	$1/2$	4
u	-1	2	6

$\Longleftrightarrow$

	y_3	y_2	v
y_1	$-4/3$	$5/3$	8
x_2	$1/3$	$-2/3$	2
x_1	$-1/3$	$-1/3$	5
u	$-1/3$	$-4/3$	10

4

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

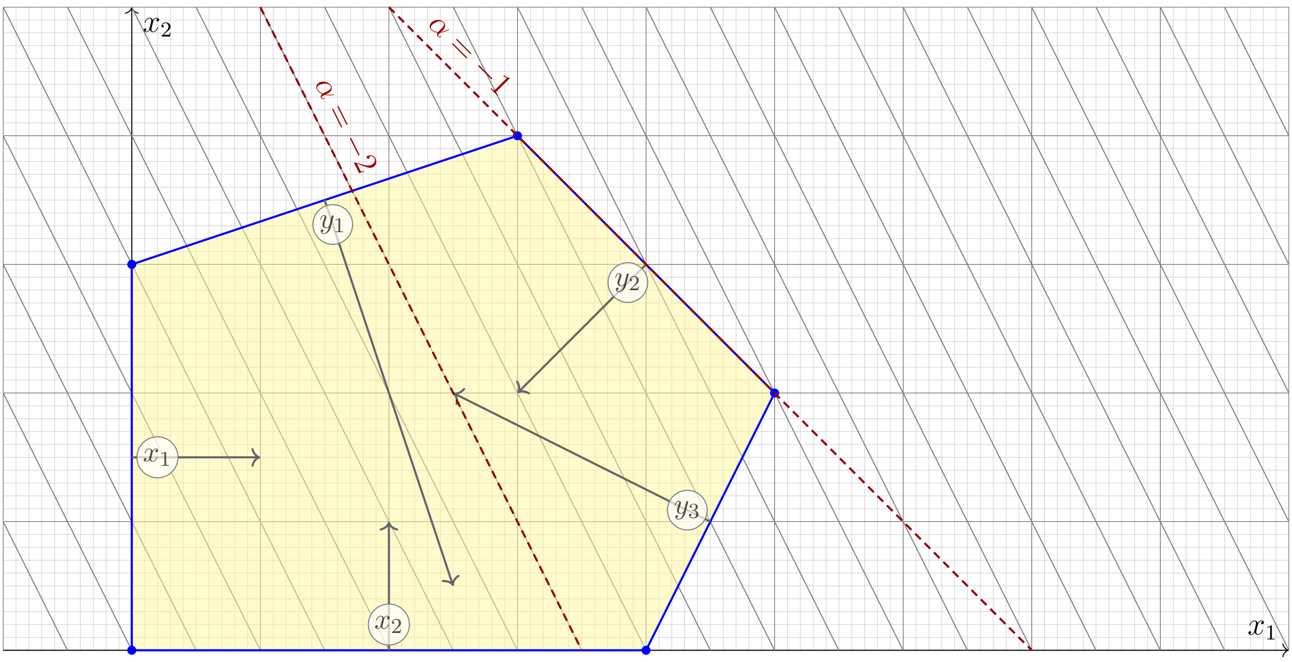
Der Punkt $x = (5, 2)^\intercal$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (8, 0, 0)^\intercal \ge 0$, ist also primal zulässig.

Der Punkt $y = (0, 4/3, 1/3)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0, 0) \le 0$, ist also dual zulässig.

Untere Schranke $u(x) = cx+d = 10$ und obere Schranke $v(y) = yb+d = 10$ stimmen überein.

Achtung: Die Lösungen x und y liest man leicht aus der optimalen Form ab: Gewusst wie! *Fun fact:* Die Verteilung der Nullen ist komplementär und illustriert *complementary slackness.* *Erläuterung:* Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplex-Verfahren zugleich gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!* Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: Jeder Irrtum wird erkannt! 3

8B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.



2

8C. Wir betrachten nun folgende Familie mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

	x_1	x_2	v
y_1	1	-3	9
y_2	α	-1	7
y_3	-2	1	8
u	2	1	-2

Wir haben oben den Fall $\alpha = -1$ untersucht.

Nennen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ hat.

Begründete Antwort:

Der Skizze entnehmen wir die einzige Lösung $\alpha = -2$, denn nur dann liegt die Kante auf der Geraden $\alpha x_1 - x_2 + 7 = 0$ auch auf einer Niveaulinie von Zielfunktion u.

Erläuterung: Aus den Übungen kennen Sie zahlreiche weitere Beispiele von linearen Programmen, die diverse Sonderfälle beleuchten. Die hier illustrierte Frage nach Mehrdeutigkeit liegt nahe und ist zudem graphisch leicht zu durchschauen. Algebraisch äußert sie sich ebenfalls im Simplex-Tableau durch die lineare Abhängigkeit der Koeffizienten zu y_2 und u.

2

8D. Existiert ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, sodass das primale LP und das duale LP beide erfüllbar und unbeschränkt sind?

☐ Ja ☒ Nein. Satz oder Beispiel:

Das folgt sofort aus dem schwachen Dualitätssatz.

Erläuterung: Erfüllt $x \geq 0$ das primale LP, $Ax + b \geq 0$, und y das duale LP, $yA + c \leq 0$, so gilt $u(x) = cx + d \leq (-yA)x + d = y(-Ax) + d \leq yb + d = v(x)$. Somit ist u nach oben beschränkt und nimmt ein Maximum an. Ebenso ist v nach unten beschränkt und nimmt ein Minimum an. Sind also beide LP erfüllbar, so sind auch beide beschränkt und somit lösbar.

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.