Wiederholungsfragen zur Vorlesung „Geometrische Topologie und Knotentheorie“

Ich notiere hier ein paar Fragen, die zur Wiederholung anleiten und animieren können. Nach und nach werden mir noch weitere einfallen, und ich werde die Liste dann ergänzen.

0. Übergeordnete Fragen, quer zu den Kapiteln

0.1. Ist die Kleeblattschlinge chiral? Auf welche verschiedenen Arten können Sie dies beweisen? Welche Invarianten bzw. Sätze benötigen Sie jeweils hierzu?

0.2. Welche Invarianten kennen Sie? Welche typischen Probleme lassen sich damit lösen? Trivialität? Komplexität? Chiralität? weitere Symmetrien?

0.3. Welche Invarianten lassen sich (effektiv / effizient) berechnen? Welche davon lassen sich zwar leicht definieren aber nicht (effektiv / effizient) berechnen?

1. Knoten und Verschlingungen

1.1. Was ist ein Knoten im $\mathbb{R}^n$? eine Verschlingung? Welche Bewegungen sind erlaubt? Wie modelliert / definiert man diese anschaulichen Begriffe mathematisch präzise und möglichst geschickt? Was ist ein Knotentyp bzw. Verschlingungstyp?

1.2. Was ist ein Knotendiagramm? Wie gewinnt man hieraus einen Knoten im $\mathbb{R}^3$? Ist er eindeutig? Legt das Diagramm wenigstens den Knotentyp eindeutig fest?

1.3. Welche Bewegungen von Diagrammen erlauben wir? Wie ändern sie den dargestellten Knoten / Knotentyp? Was genau besagt der Satz von Reidemeister? Wie beweist man ihn? Lässt sich so das Entknotungsproblem (theoretisch) lösen?

1.4. Was sind p–Färbungen? Wie gewinnt man hieraus eine Invariante? Gibt es nichttriviale Knoten? Wie viele Knotentypen gibt es im $\mathbb{R}^3$? im $\mathbb{R}^2$? im $\mathbb{R}^4$? Beweis?

1.5. Welche Beziehung gilt zwischen den p–Färbungen und der Entknotungszahl? Beweis? Wie kann man dies zur Berechnung der Entknotungszahl nutzen?

1.6. Was ist ein Zopf (engl. *braid*)? Welche algebraische Struktur erhalten wir hier? Erzeuger? Relationen? Was besagt die Präsentation von Artin? Beweis?

1.7. Was ist ein Schlingel (engl. *tangle*)? Welche algebraische Struktur erhalten wir hier? Nennen Sie Erzeuger und Relationen. Wie beweist man dies?

1.8. Wie ist das Verhältnis von Knoten / Verschlingungen zu Schlingeln? von Zöpfen zu Schlingeln? von Zöpfen zu Verschlingungen?

2. Fundamentalgruppe

2.1. Was versteht man unter der Gruppe eines Knotens bzw. einer Verschlingung? Wie gewinnt man aus einem Diagramm möglichst leicht eine Darstellung? Was gilt für die Abelschmachung? Erklären Sie einfache Beispiele!

2.2. Welche Probleme lassen sich mit der Knotengruppe lösen? Welche allgemeinen Sätze kennen Sie hierzu? Werden Knoten anhand ihrer Gruppen unterschieden? Was bedeutet residuell endlich? Wie löst man damit das Entknotungsproblem?

2.3. Was ist ein zahmer bzw. wilder Knoten?

2.4. Sei $\gamma : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ eine zahme / polygonale Einbettung; ist das Komplement einfach zusammenhängend? homöomorph zu einem Ball $\mathbb{B}^3$? Wie findet man wilde Einbettungen $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, sodass das Komplement kein Ball ist? Wie weist man nach, dass dieses Beispiele tatsächlich wild sind?

2.5. Was ist eine wilde Sphäre $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$? Geben Sie Beispiele! Wie weist man nach, dass dieses Beispiele tatsächlich wild sind?

3. Seifert–Flächen und Anwendungen

3.1. Satz von Jordan–Schönflies für Einbettungen $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$? Beweis?

3.2. Satz von Alexander–Schönflies für Einbettungen $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$? Beweis?
Scherzfrage: Gilt ein ähnlicher Satz für Einbettungen $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$?

3.3. Was ist eine Seifert–Fläche zu einer orientierten Verschlingung L? Wie beweist man die Existenz? Warum sind sie nicht eindeutig? Wir hängen je zwei Seifert–Flächen zu L zusammen? Wie beweist man das?

3.4. Was ist das (Seifert–)Geschlecht eines Knotens K? Welche Knoten haben Geschlecht Null? Wie beweist man das? Wie verhält sich das Geschlecht bei verbundener Summe? Wie beweist man das?

3.5. Was ist ein Primknoten? Geben Sie Beispiele! Wie beweist man, dass dies tatsächlich Primknoten sind? Erlaubt jeder Knoten eine Primfaktorzerlegung? Wie beweist man das? Inwiefern ist sie eindeutig? Wie beweist man das?

4. Das Alexander–Polynom und Anwendungen

4.1. Was ist die Seifert–Form θ_S einer Seifert–Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$? Was ist $H_1(S;\mathbb{Z})$? Warum gibt es über $\mathbb{Z}$ eine Basis zu $H_1(S,\mathbb{Z})$? Wie findet man eine? Wie sieht sie aus? Was ist die zu θ_S gehörige Seifert–Matrix M_θ? Wie verhält sie sich bei Basiswechsel? und bei Stabilisation? Scherzfrage: Ist sie eine Invariante?

4.2. Wie konstruiert man das Alexander–Polynom einer Verschlingung L? Wie zeigt man, dass dies tatsächlich eine Invariante ist? Welche Symmetrien gelten hier? Was gilt bei verbundener Summe? Wie beweist man das?

4.3. Welche Beziehung gilt zwischen Alexander–Polynom und Seifert–Geschlecht? Wie kann man dies zur Berechnung des Seifert–Geschlechts nutzen?

4.4. Wie konstruiert man die Signatur einer Verschlingung L? Wie zeigt man, dass dies tatsächlich eine Invariante ist? Was gilt bei Symmetrien / verbundener Summe?

4.5. Welche Beziehung gilt zwischen Signatur und Entknotungszahl? Wie beweist man das? Wie kann man dies zur Berechnung der Entknotungszahl nutzen?

5. Das Jones–Polynom und Anwendungen

5.1. Wie konstruiert man die Kauffman–Klammer zu einem Verschlingungsdiagramm? Unter welchen Reidemeister–Zügen ist sie invariant? Beweis?

5.2. Wie konstruiert man hieraus das Jones–Polynom? Warum ist dies tatsächlich eine Invariante? Welche Symmetrien gelten hier? Was gilt bei verbundener Summe?

5.3. Was besagen die Tait–Vermutungen? Wie beweist man die ersten beiden Tait–Vermutungen mit Hilfe des Jones–Polynoms?