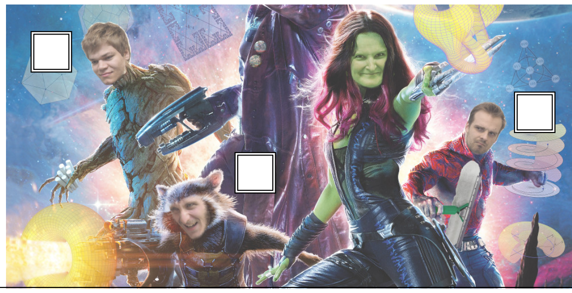
Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Name des Tutors (oder Bild ankreuzen): 
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/12	/9	/12	/8	/16	/6	/74

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*10 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2B. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2C. Jede Summe $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Jedes Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A}$ in X. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A}$ in X. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Ist X metrisierbar, so ist X zweitabzählbar (2AA) und regulär ($T_1\&T_3$). ☐ Ja ☐ Nein

2H. Ist X zweitabzählbar (2AA) und regulär ($T_1\&T_3$), so ist X metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Seien $f, g : X \to Y$ stetig und der Startraum X hausdorffsch.
Dann ist die Teilmenge $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ in X abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Seien $f, g : X \to Y$ stetig und der Zielraum Y hausdorffsch.
Dann ist die Teilmenge $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ in X abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit (3+3+6 = 12 Punkte)*

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

3B. Sei X kompakt, Y hausdorffsch, $f : X \to Y$ stetig. Ist dann f abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3

3C. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt die folgende Aussage? „ $\exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X\ \exists i \in I : B(x, \alpha) \subset U_i$ “

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

6

Aufgabe 4. *Mannigfaltigkeiten und Metrisierung* (*1+5+3 = 9 Punkte*)

4A. Gegeben seien ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Formulieren Sie explizit eine stetige „Hut"-Funktion $\Lambda = \Lambda_{p,r} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\Lambda^{-1}(\{1\}) = \{p\}$ und $\Lambda^{-1}(]0,1]) = B(p,r)$.

1

4B. Gegeben sei ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ und zu jedem $i \in I$ ein Homöomorphismus $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ (euklidische Karte). Ist X hausdorffsch?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

Im Folgenden setzen wir X als hausdorffsch voraus. Sei $B \subset X$ abgeschlossen und $a \in U_k \smallsetminus B$. Konstruieren Sie $g : U_k \to [0,1]$ stetig mit $g(a) = 1$ und kompaktem Träger disjunkt zu B.

2

Sei $f : X \to [0,1]$ die Fortsetzung von $g = f|_{U_k}$ durch $f(x) = 0$ für $x \in X \smallsetminus U_k$. Ist f stetig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

4C. Sei X ein Hausdorff–Raum mit offener Überdeckung $(U_i \cong \mathbb{R}^n)_{i \in \mathbb{N}}$. Ist X metrisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3

Aufgabe 5. *Simplizialkomplexe* (*3+6+3 = 12 Punkte*)

5A. Formulieren Sie den simplizialen Approximationssatz.

Daten & Voraussetzungen:

Approximation & Homotopie:

3

5B. Sei $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus. Nennen Sie alle Elemente von $[T, \mathbb{S}^3]$ und beweisen Sie dies.

6

5C. Ist für alle $p > q \geq 1$ die Menge $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ höchstens abzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3

Aufgabe 6. *Kategorien (4+4 = 8 Punkte)*

6A. Wir arbeiten in der Kategorie `Haus` der Hausdorff–Räume $X, Y, \dots$ und ihrer stetigen Abbildungen $f : X \to Y$. Behauptung: „Ist f surjektiv, dann ist f in `Haus` rechtskürzbar.“

☐ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

2

Umgekehrte Behauptung: „Ist f in `Haus` rechtskürzbar ist, dann ist f surjektiv.“

☐ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

2

6B. Sei $T : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ein Funktor. Behauptung: „Ist $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathtt{C}$, dann ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein Isomorphismus in $\mathtt{D}$."

☐ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

2

Umgekehrte Behauptung: „Ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein Isomorphismus in $\mathtt{D}$, dann ist $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathtt{C}$."

☐ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

2

Aufgabe 7. *Einbettungen und Retrakte* (*3+2+2+7+2 = 16 Punkte*)

7A. Seien X, Y Hausdorff–Räume und $f : X \to Y$ stetig.
Definieren Sie, was eine *Retraktion* g zu f ist. (Wir nennen dann f einen *Retrakt*.)

1

Offensichtlich gilt $f(X) \supset \Phi := \{\, y \in Y \mid f(g(y)) = y \,\}$. Gilt sogar Gleichheit?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

Ist das Bild jedes Retrakts $f : X \to Y$ abgeschlossen in Y?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

7B. Sei $f : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und injektiv. Ist f eine Einbettung?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7C. Sei $f : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und injektiv. Existiert zu f eine Retraktion g?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7D. Wir untersuchen die stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto (1 + \mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{C}$ und zu $f|_{\mathbb{R}}^{A} : \mathbb{R} \to A$ eine Retraktion g?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

Gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ und zu $f|_{\mathbb{R}}^{U} : \mathbb{R} \to U$ eine Retraktion g?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

Nennen Sie die Wegkomponenten von $X = \mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$, also die Zerlegung $\pi_0(X)$.

/2

Nennen Sie die Zusammenhangskomponenten von $X = \mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$, also die Zerlegung $\mathcal{Z}(X)$.

/1

7E. Gibt es Einbettungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass $\mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$ genau drei Wegkomponenten hat?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

$\overline{}$ 2

— Bitte wenden —

Aufgabe 8. *Starke Deformationsretrakte (2+2+2 = 6 Punkte)*

8A. Sei $f : X \to Y$ stetig mit Retraktion g (wie in **7A** definiert).
Definieren Sie, was eine *starke Retraktionsdeformation* H zu (f, g) ist.

$\overline{}$ 2

8B. Existiert zur Inklusion $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ der Sphäre
eine Retraktion g und eine starke Retraktionsdeformation H?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

8C. Enthält $\mathbb{R}^n \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$ eine Sphäre $\mathbb{S}^q$ als starken Deformationsretrakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2