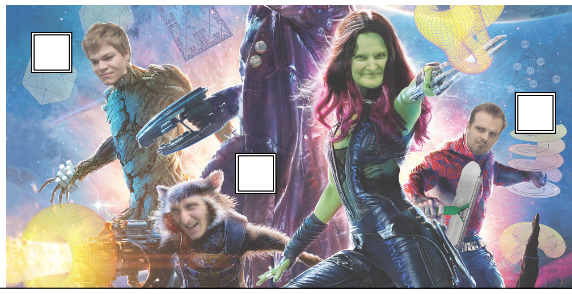
Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Name des Tutors (oder Bild ankreuzen): 
Vorname: Musterlösung	
Matrikelnummer: Musterlösung	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/12	/9	/12	/8	/16	/6	/74

Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung. Reproduktive Fragen sind zahlreich und leicht. Produktive Fragen erfordern Anwendung der Techniken auf ein variiertes Beispiel, und somit selbständiges Nachdenken. Gefragt ist, ein passendes Werkzeug zu nennen oder ein einfaches Beispiel einzuordnen. Diesen unspektakulären aber nützlichen Fragentyp können Sie selbst zur Diagnose nutzen, und auch ähnliche Fragen selbst entwickeln, um Begriffe und Techniken einzuüben. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (10 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. [X] Ja [ ] Nein

2B. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

2C. Jede Summe $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt. [ ] Ja [X] Nein

2D. Jedes Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt. [X] Ja [ ] Nein

2E. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A}$ in X. [X] Ja [ ] Nein

2F. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A}$ in X. [ ] Ja [X] Nein

2G. Ist X metrisierbar, so ist X zweitabzählbar (2AA) und regulär (T_1&T_3). [ ] Ja [X] Nein

2H. Ist X zweitabzählbar (2AA) und regulär (T_1&T_3), so ist X metrisierbar. [X] Ja [ ] Nein

2I. Seien $f, g : X \to Y$ stetig und der Startraum X hausdorffsch.
Dann ist die Teilmenge $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ in X abgeschlossen. [ ] Ja [X] Nein

2J. Seien $f, g : X \to Y$ stetig und der Zielraum Y hausdorffsch.
Dann ist die Teilmenge $\{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ in X abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

Erläuterung: Diese Fragen sind aus der Vorlesung, den Übungen und alten Klausuren bekannt und sollten Ihnen daher leicht fallen. Diese erste Fragenfamilie war hier nur mit Ja/Nein zu beantworten. Noch besser könnten Sie sich nach genaueren Begründungen fragen, so wie es in den folgenden Fragen typischerweise verlangt wird. Diese Präzisierung sollten Sie zu Ihrer Vor- und Nachbereitung ebenso versuchen und auch sicher beantworten können.

Aufgabe 3. *Kompaktheit (3+3+6 = 12 Punkte)*

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung in Y.
Da f stetig ist, ist $U_i = f^{-1}(V_i)$ offen für jedes $i \in I$.
Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ in X.
Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
Aus $f(U_i) \subset V_i$ folgt $f(A) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

3

3B. Sei X kompakt, Y hausdorffsch, $f : X \to Y$ stetig. Ist dann f abgeschlossen?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen.
Da X kompakt ist, ist A kompakt (**2A**).
Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (**3A**).
Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (**2B**).

Erläuterung: Das ist das Kompakt-Hausdorff-Kriterium. Ist $f : X \to Y$ zudem bijektiv / injektiv / surjektiv, so ist f ein Homöomorphismus / eine Einbettung / eine Identifizierung.

3

3C. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt die folgende Aussage? „ $\exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \ \forall x \in X \ \exists i \in I : B(x, \alpha) \subset U_i$ “

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Diese Aussage behauptet die Existenz einer Lebesgue–Zahl $\alpha > 0$.
Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert ein Index $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$.
Da $U_{i(x)}$ in (X, d) offen ist, existiert $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(x, 2\varepsilon(x)) \subset U_{i(x)}$.
Da (X, d) kompakt ist, enthält die offene Überdeckung $(B(x, \varepsilon(x)))_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung, also $X = B(x_1, \varepsilon(x_1)) \cup B(x_2, \varepsilon(x_2)) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon(x_n))$.
Wir setzen $\alpha := \min\{ \varepsilon(x_1), \varepsilon(x_2), \dots, \varepsilon(x_n) \} > 0$.
Zu jedem Punkt $x \in X$ gilt $x \in B(x_k, \varepsilon(x_k))$ für ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,
dank Dreiecksungleichung also $B(x, \alpha) \subset B(x_k, \varepsilon(x_k) + \alpha) \subset B(x_k, 2\varepsilon(x_k)) \subset U_{i(x_k)}$.

Alternativer Beweis: Da (X, d) kompakt ist, enthält $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung, also $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Die Funktion $f(x) = \max\{ d(x, X \smallsetminus U_{i_k}) \mid k = 1, \dots, n \}$ ist stetig und überall positiv, denn aus $x \in U_{i_k}$ folgt $d(x, X \smallsetminus U_{i_k}) > 0$. Abermals dank Kompaktheit nimmt f ihr Infimum an, also $\alpha := \inf f = f(x_0) > 0$. Für jeden Punkt $x \in X$ gilt $f(x) \geq \alpha$, also existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $d(x, X \smallsetminus U_{i_k}) \geq \alpha$; das bedeutet $B(x, \alpha) \subset U_{i_k}$.

Weitere Alternative: Kontraposition und die Existenz einer konvergenten Teilfolge…

6

Aufgabe 4. *Mannigfaltigkeiten und Metrisierung (1+5+3 = 9 Punkte)*

4A. Gegeben seien ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Formulieren Sie explizit eine stetige „Hut"-Funktion $\Lambda = \Lambda_{p,r} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\Lambda^{-1}(\{1\}) = \{p\}$ und $\Lambda^{-1}(]0,1]) = B(p,r)$.

Dies gelingt mit

$$h(x) = \max\{\, 0,\ 1 - |x-p|/r \,\} = \begin{cases} 1 - |x-p|/r & \text{für } |x-p| \le r, \\ 0 & \text{für } |x-p| \ge r. \end{cases}$$

1

4B. Gegeben sei ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ und zu jedem $i \in I$ ein Homöomorphismus $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ (euklidische Karte). Ist X hausdorffsch?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Ein berühmtes, klassisches Gegenbeispiel ist die Gerade mit doppeltem Ursprung.

Alternative: die verzweigte Gerade. Ausführung: Auf $X = \{\pm\} \times \mathbb{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch $(+,x) \sim (-,x)$ für alle $x < 0$. Im Quotienten $q : X \twoheadrightarrow Y := X/_\sim$ ist $U_\pm := q(\{\pm\} \times \mathbb{R})$ offen und $\varphi_\pm : \{\pm\} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U_\pm$ ein Homöomorphismus. Dennoch ist Y nicht hausdorffsch, denn die beiden Nullpunkte $q(\pm, 0)$ lassen sich nicht trennen.

Erläuterung: Naiv würde man glauben, dass „lokal euklidisch" automatisch „hausdorffsch" impliziert. Das ist jedoch keineswegs der Fall! Lokal euklidisch impliziert T_1, aber nicht T_2. Die klassischen Gegenbeispiele erhalten wir durch geeignete Quotientenbildung wie in der Vorlesung erklärt. Trennungseigenschaften gehen dabei schnell zu Bruch.

1

Im Folgenden setzen wir X als hausdorffsch voraus. Sei $B \subset X$ abgeschlossen und $a \in U_k \smallsetminus B$. Konstruieren Sie $g : U_k \to [0,1]$ stetig mit $g(a) = 1$ und kompaktem Träger disjunkt zu B.

Das Bild $B' := \varphi_k(B)$ in $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Für $a \in U_k \smallsetminus B$ und $p := \varphi_k(a)$ gilt $p \notin B'$.

Also existiert $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus B'$.

Wir definieren $f = \Lambda_{p,r} \circ \varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n \to [0,1]$ dank **4A**.

Erläuterung: In diesem ersten Schritt verpflanzen wir die Hut-Funktionen $\Lambda_{p,r}$ von $\mathbb{R}^n$ auf U_k. Im zweiten Schritt setzen wir dann g durch 0 auf den ganzen Raum X fort. Wie üblich soll die enge Fragenführung Ihnen helfen, das Argument sinnvoll aufzubauen. Gefragt war jeweils die Ausführung unter Anwendung eines geeigneten Werkzeugs.

2

Sei $f : X \to [0,1]$ die Fortsetzung von $g = f|_{U_k}$ durch $f(x) = 0$ für $x \in X \smallsetminus U_k$. Ist f stetig?

$\boxed{\text{X}}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Begründung:

Da X hausdorffsch ist, ist der kompakte Träger $\operatorname{supp}(g)$ in X abgeschlossen (**2B**).
Das Komplement $X' = X \smallsetminus \operatorname{supp}(g)$ ist demnach offen.

Die Funktion f ist die Verklebung von g und $g' : X' \to \{0\} \hookrightarrow [0,1]$.
Beide stimmen auf $X' \cap U_k =$ überein. Dank Verklebesatz ist f stetig.

Erläuterung: Tatsächlich wird hier die lokale Kompaktheit von $\mathbb{R}^n$ und die Hausdorff–Eigenschaft von X benötigt. Untersuchen Sie als heilsames Gegenbeispiel die Gerade mit doppeltem Ursprung: Hier ist die Fortsetzung von g zu f im Allgemeinen unstetig!

2

4C. Sei X ein Hausdorff–Raum mit offener Überdeckung $(U_i \cong \mathbb{R}^n)_{i\in\mathbb{N}}$. Ist X metrisierbar?

$\boxed{\text{X}}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Begründung:

Wir können den Metrisierungssatz von Urysohn (**2H**) anwenden:

Der Raum X ist hausdorffsch und sogar regulär (T_3) dank **4B**.

Dank $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ mit $U_i \cong \mathbb{R}^n$ ist X schließlich zweitabzählbar.

Erläuterung: (1) Aufgabe **4B** zeigt mit $T_{3^1/_2}$ zunächst etwas mehr, daraus folgt sofort T_3.
(2) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar, erlaubt also eine abzählbare Basis seiner Topologie. Dasselbe gilt dank der Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ auch für jeden offenen Teilraum $U_i \subset X$, somit auch für ihre abzählbare Vereinigung $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$.

3

Aufgabe 5. *Simplizialkomplexe* (*3+6+3 = 12 Punkte*)

5A. Formulieren Sie den simplizialen Approximationssatz.

Daten & Voraussetzungen:

Seien K und L Simplizialkomplexe und $f : |K| \to |L|$ stetig.

Approximation & Homotopie:

Dann existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$ und eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \to L$, sodass f und $|\varphi| : |K'| \to |L|$ homotop sind vermöge der affinen Homotopie

$$H(t,x) = (1-t)f(x) + t|\varphi|(x).$$

Zusatz: Ist der Simplizialkomplex K endlich, so genügt hierzu eine iterierte baryzentrische Unterteilung $K' = \beta^\ell K$ für hinreichend großes $\ell \in \mathbb{N}$. (Diese Präzisierung nützt gelegentlich.)

3

5B. Sei $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus. Nennen Sie alle Elemente von $[T, \mathbb{S}^3]$ und beweisen Sie dies.

Es gilt $[T, \mathbb{S}^3] = \{[\mathrm{const}]\}$. *Beweis:* Sei $f : T \to \mathbb{S}^3$ stetig. Wir zeigen $f \simeq *$.

(1) Verfehlt f einen Punkt $y \in \mathbb{S}^3$, so gilt $f : T \to \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{y\} \cong \mathbb{R}^3 \simeq \{*\}$.

(2) Allgemein: Wir triangulieren $T \cong |K|$ zweidimensional (wie in der Vorlesung) und $\mathbb{S}^3 \cong \partial\Delta^4 = |L|$ dreidimensional, und ersetzen f durch die äquivalente Abbildung $g : |K| \to |L|$.

Die stetige Abbildung $g : |K| \to |L|$ erlaubt eine simpliziale Approximation $\varphi : K' \to L$.

Wegen $\dim K = 2 < 3 = \dim L$ verfehlt $|\varphi|$ alle Punkte im Inneren der 3–Simplizes.

Dank(1) gilt $|\varphi| \simeq *$, also $g \simeq *$, somit $f \simeq *$.

Erläuterung: Sie kennen diesen raffinierten Beweis aus der Vorlesung, dort für $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q] = \{*\}$ mit $1 \le p < q$. Die Idee ist genial einfach und einfach genial: Wir nutzen die Dimension!

Warnung: Entgegen der naiven Anschauung gibt es flächenfüllende Wege und somit auch stetige Surjektionen $\mathbb{S}^p \twoheadrightarrow \mathbb{S}^q$ und $T \twoheadrightarrow \mathbb{S}^3$. Schritt (1) genügt daher noch nicht.

Die saubere Ausführung ist daher technisch etwas aufwändiger, wie hier zu sehen. Wir nutzen simpliziale Approximation (oder ähnliches, etwa glatte Approximation), um die Lineare Algebra und insbesondere den Dimensionsbegriff anwenden zu können.

Warnung: Es gilt $[X, Y_1 \times Y_2] \cong [X, Y_1] \times [X, Y_2]$ dank universeller Eigenschaft des Produkts. Für $[X_1 \times X_2, Y]$ und $[X_1, Y] \times [X_2, Y]$ hingegen gilt dies nicht. Einfache Gegenbeispiele begegnen uns bereits für Flächen: Es gilt $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2] = \{*\}$, aber $[\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

6

5C. Ist für alle $p > q \ge 1$ die Menge $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ höchstens abzählbar?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Wir triangulieren $\mathbb{S}^p \cong |K|$ und $\mathbb{S}^q \cong |L|$ durch endliche Simplizialkomplexe. (Die Aussage gilt allgemein für kompakte Polyeder $|K|$, $|L|$, also endliche Simplizialkomplexe K, L.)

Zu jeder stetigen Abbildung $g : |K| \to |L|$ existiert dank **5A**
eine simpliziale Approximation $\varphi : \beta^n K \to L$ mit $g \simeq |\varphi|$.

Es gibt nur endliche viele simpliziale Abbildungen $\beta^n K \to L$.
Die Vereinigung über alle $n \in \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Erläuterung: Für $0 \le p < q$ wissen Sie $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q] = \{*\}$ dank simplizialer Approximation. Für $1 \le p = q$ gilt $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^p] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ dank Abbildungsgrad (Satz von Brouwer–Hopf). Für $p > q = 1$ gilt $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^1] = \{*\}$ dank der Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$. Auch für $p > q \ge 2$ wurde lange $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q] = \{*\}$ vermutet, doch dies erwies sich als falsch. Die Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ ist nicht zusammenziehbar und zeigt $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \ne \{*\}$. Aber $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ ist immer abzählbar!

3

Aufgabe 6. *Kategorien (4+4 = 8 Punkte)*

6A. Wir arbeiten in der Kategorie `Haus` der Hausdorff–Räume $X, Y, \dots$ und ihrer stetigen Abbildungen $f : X \to Y$. Behauptung: „Ist f surjektiv, dann ist f in `Haus` rechtskürzbar.“

☒ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

Gegeben seien $g, h : Y \to Z$ mit $g \circ f = h \circ f$. Wir haben $g = h$ zu zeigen.

Zu jedem $y \in Y$ existiert mindestens ein Urbild $x \in X$ mit $f(x) = y$,
demnach gilt $g(y) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(y)$, kurz $g = h$.

Erläuterung: Rechtskürzbarkeit gilt demnach allgemein für jede Surjektion $f : X \to Y$, nicht nur in `Haus`, sondern in jeder konkreten Kategorie (von Mengen und Abbildungen, allgemein Mengen mit Struktur und ihren strukturerhaltenden Abbildungen).

Bitte verwechseln Sie nicht „rechtskürzbar“ und „rechtsinvertierbar“: Jeder rechtsinvertierbare Morphismus ist rechtskürzbar. Nicht jeder rechtskürzbare Morphismus ist rechtsinvertierbar. Dasselbe gilt für „linkskürzbar“ und „linksinvertierbar“.

$\overline{2}$

Umgekehrte Behauptung: „Ist f in `Haus` rechtskürzbar ist, dann ist f surjektiv.“

☐ Wahr ☒ Falsch. Begründung:

Die Inklusion $f : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv, aber rechtskürzbar in `Haus`.

Sind nämlich $g, h : \mathbb{R} \to Z$ stetig in einen Hausdorff–Raum Z und $g \circ f = h \circ f$,
so gilt $g|_{\mathbb{Q}} = h|_{\mathbb{Q}}$, und somit $g = h$ dank **2J** und Dichtheit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Erläuterung: Aus Rechtskürzbarkeit folgt daher im Allgemeinen nicht Surjektivität. Die Frage der Kürzbarkeit hängt tatsächlich von der Kategorie ab, in der wir arbeiten. Die erhoffte Aussage „Rechtskürzbarkeit impliziert Surjektivität“ gilt in `Set` und `Top`, aber nicht in `Haus`.

Rechenregeln, hier zum Kürzen (**6A**) und Invertieren (**6B**), sind in der Mathematik allgegenwärtig und vielfach nützlich. Sie sollten sie kennen und treffsicher nutzen.

$\overline{2}$

6B. Sei $T : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ ein Funktor. Behauptung: „Ist $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathtt{C}$, dann ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein Isomorphismus in $\mathtt{D}$.“

☒ Wahr ☐ Falsch. Begründung:

Ist $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathtt{C}$, so existiert in $\mathtt{C}$ ein Inverses $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Anwendung des (kovarianten) Funktors T ergibt
$T(f) : T(X) \to T(Y)$ und $T(g) : T(Y) \to T(X)$
mit $T(g) \circ T(f) = T(g \circ f) = T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T(X)}$
und $T(f) \circ T(g) = T(f \circ g) = T(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{T(Y)}$.

In $\mathtt{D}$ hat also $T(f)$ das Inverse $T(g)$.

Erläuterung: Dasselbe gilt sinngemäß für Links- und Rechtsinverse. Kürzbarkeit hingegen ist schwächer und verhält sich anders. Rechenregeln, hier zum Kürzen (**6A**) und Invertieren (**6B**), sind in der Mathematik allgegenwärtig und vielfach nützlich.

2

Umgekehrte Behauptung: „Ist $T(f) : T(X) \to T(Y)$ ein Isomorphismus in $\mathtt{D}$, dann ist $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathtt{C}$.“

☐ Wahr ☒ Falsch. Begründung:

Der Funktor $\pi_0 : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ liefert einfache Gegenbeispiele. Ganz konkret:

Die stetige Abbildung $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist kein Homöomorphismus (Isomorphismus in $\mathtt{Top}$), aber $\pi_0(f) : \pi_0(\{0\}) \to \pi_0(\mathbb{R})$ ist eine Bijektion (Isomorphismus in $\mathtt{Set}$).

Erläuterung: Als konkretes, einfaches Beispiel aus der Topologie hebe ich hier π_0 besonders heraus. Sie finden leicht zahlreiche weitere Beispiele von dieser Art, es ist der typische Fall!

Besonders schön ist der Vergissfunktor $V : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$:
Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus!

Minimalistisches Gegenbeispiel ist $T : \{\bullet \to \bullet\} \to \{\bullet\}$, ebenso nahezu jeder Funktor in die terminale Kategorie $\{\bullet\}$, bestehend aus einem Objekt 0 und nur einem Morphismus id_0.

2

Jeder Funktor überführt Isomorphismen in Isomorphismen, wie oben gesehen, aber die hier gefragte Umkehrung ist eine seltene Ausnahme. Wo sie gilt, ist dies ein bemerkenswerter Satz. Als berühmtes Beispiel aus der Algebraischen Topologie nenne ich den Satz von Whitehead: Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung zwischen zellulären Räumen (etwa Polyeder von Simplizialkomplexen). Angenommen, f induziert Isomorphismen $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y, y_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz, also ein Isomorphismus in $\mathtt{hTop}$.

Aufgabe 7. *Einbettungen und Retrakte* (*3+2+2+7+2 = 16 Punkte*)

7A. Seien X, Y Hausdorff–Räume und $f : X \to Y$ stetig.
Definieren Sie, was eine *Retraktion* g zu f ist. (Wir nennen dann f einen *Retrakt*.)

Eine *Retraktion* zu f ist eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Erläuterung: Das ist also eine Linksinverse, hier in der Kategorie der topologischen Räume.
Bitte nicht verwechseln mit dem stärkeren Begriff der Homotopieretraktion aus **8A**. 1

Offensichtlich gilt $f(X) \supset \Phi := \{\, y \in Y \mid f(g(y)) = y \,\}$. Gilt sogar Gleichheit?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Für jedes Bildelement $y = f(x)$ gilt $f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y$.

Erläuterung: Für jede Linksinverse g zu f gilt $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ \mathrm{id}_X = f$. 1

Ist das Bild jedes Retrakts $f : X \to Y$ abgeschlossen in Y?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Es gilt $f(X) = \Phi := \{\, y \in Y \mid (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_Y(y) \,\}$, und Φ ist abgeschlossen dank **2J**,

Erläuterung: Die Abbildungen id_Y und $f \circ g : Y \to Y$ sind stetig und Y ist hausdorffsch. 1

7B. Sei $f : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und injektiv. Ist f eine Einbettung?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das Intervall $[-1, 1]$ ist kompakt (Heine-Borel), der Raum $\mathbb{R}^3$ ist hausdorffsch (Metrik).

Nach dem Kompakt-Hausdorff-Kriterium ist f abgeschlossen, insbesondere einbettend. 2

7C. Sei $f : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und injektiv. Existiert zu f eine Retraktion g?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Wir nutzen den Fortsetzungssatz von Tietze:
Dank **7B** ist das Bild $A = f([-1, 1])$ in $\mathbb{R}^3$ abgeschlossen und $f^{-1} : A \to [-1, 1]$ stetig.

Dazu existiert eine stetige Fortsetzung $g : \mathbb{R}^3 \to [-1, 1]$, diese erfüllt $g \circ f = \mathrm{id}_{[-1,1]}$.

Erläuterung: In den Übungen wurde die entsprechende Frage für abgeschlossene Einbettungen $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gelöst. Die Frage für $f : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ist einfacher, dank Kompaktheit. 2

7D. Wir untersuchen die stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto (1 + \mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{C}$ und zu $f|_{\mathbb{R}}^{A} : \mathbb{R} \to A$ eine Retraktion g?

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Andernfalls wäre $f(X)$ in A abgeschlossen dank **7A**, also auch abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

Doch das Bild $f(X)$ in $\mathbb{C}$ ist nicht abgeschlossen: Es fehlen die Berührpunkte $z \in \mathbb{S}^1$.

Erläuterung: Machen Sie eine Skizze, das hilft! Wir suchen $g : A \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(f(t)) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere muss $f(X) \subset A \subset \mathbb{C}$ gelten. Für $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen ist das unmöglich! Die Situation ist anschaulich plausibel, das obige Argument führt dies sauber aus.

2

Gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ und zu $f|_{\mathbb{R}}^{U} : \mathbb{R} \to U$ eine Retraktion g?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Das gelingt auf $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \,\}$ offen durch $g(z) = \ln(|z| - 1)$.

Erläuterung: Stehen die ersehnten Formeln erst einmal da, dann ist das Nachrechnen ganz leicht (und war hier nicht gefragt): $(g \circ f)(t) = \ln(|(1+\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| - 1) = \ln(|1+\mathrm{e}^t| - 1) = \ln(\mathrm{e}^t) = t$. Somit ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein Umgebungsretrakt, das heißt: Es gibt zu $f(X)$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ und eine stetige Abbildung $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist $f : \mathbb{R} \hookrightarrow U$ eine Einbettung in U, komponiert mit der Inklusion $U \hookrightarrow \mathbb{C}$ also auch eine Einbettung in $\mathbb{C}$.

2

Nennen Sie die Wegkomponenten von $X = \mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$, also die Zerlegung $\pi_0(X)$.

Die Wegkomponenten sind die Kreisscheibe $\mathbb{D}^2$ und das Komplement $E = X \smallsetminus \mathbb{D}^2$.
Wir erhalten also $\pi_0(X) = \{\mathbb{D}^2, E\}$.

Erläuterung: Die Menge $\mathbb{D}^2$ ist konvex und somit wegzusammenhängend. Eine explizite Parametrisierung $\mathbb{R} \times]0,1[\xrightarrow{\sim} E$ zeigt, dass auch E wegzusammenhängend ist. (Übung!) Dass kein Weg von $\mathbb{D}^2$ nach E führt, ist zunächst anschaulich plausibel, und ein ausführlicher Beweis ist eine lehrreiche Übung. Versuchen Sie es zur Wiederholung!

2

Nennen Sie die Zusammenhangskomponenten von $X = \mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$, also die Zerlegung $\mathscr{Z}(X)$.

Es gilt $\mathscr{Z}(X) = \{X\}$. In Worten: Der Raum $X = \mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend.

Erläuterung: Der Raum X ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Sie kennen ähnlich erstaunliche Beispiele aus Vorlesung und Übung, etwa die Sinuskurve des Topologen. Ausführlich: Die Teilmengen $\mathbb{D}^2 \subset X$ und $E = X \smallsetminus \mathbb{D}^2$ sind wegzusammenhängend und somit zusammenhängend. Nach **2E** ist auch der Abschluss $\bar{E} = E \cup \mathbb{S}^1$ zusammenhängend. Da sich $\mathbb{D}^2$ und E in $\mathbb{D}^2 \cap E = \mathbb{S}^1$ überschneiden, ist auch $X = \mathbb{D}^2 \cup E$ zusammenhängend.

1

7E. Gibt es Einbettungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass $\mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$ genau drei Wegkomponenten hat?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Analog zur vorigen Frage (und wie in den Übungen) betrachten wir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto h(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{mit} \quad h : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \left]1, 3\right[: t \mapsto 2 + t/(1 + |t|).$$

Erläuterung: Dieses Beispiel kennen Sie aus den Übungen. Naiv glaubt man zunächst nicht, dass so etwas möglich ist. Steht das Beispiel konkret vor einem, dann ist es klar und einfach. Die drei Wegkomponenten von $\mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$ sind leicht zu finden und dann auch nachzuweisen. (Das war hier nicht gefragt.) Auch dies ist eine schöne Übung zur Wiederholung der Techniken.

Das Komplement $\mathbb{C} \smallsetminus f(\mathbb{R})$ zerfällt in drei Wegkomponenten, ist aber zusammenhängend! $\overline{}$ 2

Sie sehen an solchen Beispielen: mathematische Arbeit erfordert Umsicht und Sorgfalt, liefert dafür aber auch sehr präzise Werkzeuge. Insbesondere die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang werden vielfach genutzt, nicht nur in der Geometrie und Topologie, sondern auch in der Analysis (Gebiete, Wegintegrale). Präzise Begriffe und Argumente sind dazu unerlässlich.

— Bitte wenden —

Aufgabe 8. *Starke Deformationsretrakte* (*2+2+2 = 6 Punkte*)

8A. Sei $f : X \to Y$ stetig mit Retraktion g (wie in **7A** definiert).
Definieren Sie, was eine *starke Retraktionsdeformation* H zu (f, g) ist.

Wir haben $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wir fordern $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ relativ zu $f(X)$,

Ausführlich ist das eine Homotopie $H : [0,1] \times Y \to Y$ von $H_0 = f \circ g$ nach $H_1 = \mathrm{id}_Y$ wobei $h(t, y) = y$ für alle $t \in [0,1]$ und $y \in f(X)$ gilt. (Diese Punkte werden festgehalten.)

Erläuterung: Die grundlegenden Begriffe *Retraktion* und *(starke) Deformationsretraktion* wurden in Vorlesung und Übung ausführlich behandelt und mit Beispielen illustriert. Die Hoffnung ist, dass Sie lernen damit zu arbeiten, und sie schließlich treffsicher nutzen können.

$\overline{}$ 2

8B. Existiert zur Inklusion $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ der Sphäre eine Retraktion g und eine starke Retraktionsdeformation H?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Wir nutzen $g : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ als Retraktion.

Hier gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}}$ vermöge der Homotopie

$$H \;:\; [0,1] \times X \to X \;:\; (t, x) \mapsto (1-t)\, x/|x| + tx.$$

Erläuterung: Dies ist das wohl prominenteste Beispiel einer starken Retraktionsdeformation. Es ist einfach, klar und übersichtlich und wird in Anwendungen vielfach genutzt.

$\overline{}$ 2

8C. Enthält $\mathbb{R}^n \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$ eine Sphäre $\mathbb{S}^q$ als starken Deformationsretrakt?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \smallsetminus (\{0\} \times \mathbb{R}^p) &= (\mathbb{R}^{n-p} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}^p \\ &\simeq (\mathbb{R}^{n-p} \smallsetminus \{0\}) \times \{0\} \\ &\simeq \mathbb{S}^{n-p-1} \times \{0\} \end{aligned}$$

Erläuterung: Wir können die hier genutzten Homotopien durch starke Retraktionsdeformationen realisieren; die erste ist klar, die zweite wurde in **8B** ausgeführt. Es ist eine nützliche Übung, alle Abbildungen und Homotopien explizit auszuschreiben; dies war hier nicht gefragt.

$\overline{}$ 2