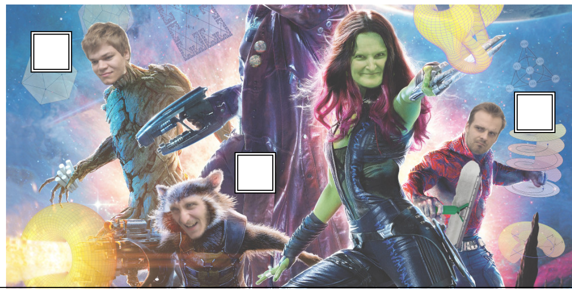
Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

<table>
<tr><td>Name:</td><td rowspan="3">Name des Tutors (oder Bild ankreuzen):
</td></tr>
<tr><td>Vorname:</td></tr>
<tr><td>Matrikelnummer:</td></tr>
</table>

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/10	/8	/16	/8	/11	/4	/10	/6	/74

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (10 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$? ☐ Ja ☐ Nein

2B. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$? ☐ Ja ☐ Nein

2C. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2, [0,1]) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}^2, [0,1]) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}^2}$ ist injektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2, [0,1]) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}^2, [0,1]) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}^2}$ ist surjektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Jeder zweitabzählbare Raum ist separabel. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Teilräume und Quotienten (8 Punkte)*

3A. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $\iota : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ auf A:

$$\mathcal{T}_A = \left\{ \quad \middle| \quad \right\}$$

1

Sei $\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_X$. Konstruieren Sie hieraus eine Basis $\mathcal{B}_A$ der Topologie $\mathcal{T}_A$:

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \quad \middle| \quad \right\}$$

1

Weisen Sie nach, dass $\mathcal{B}_A$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_A$ ist:

3

3B. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ auf Q:

$$\mathcal{T}_Q = \left\{ \quad \middle| \quad \right\}$$

1

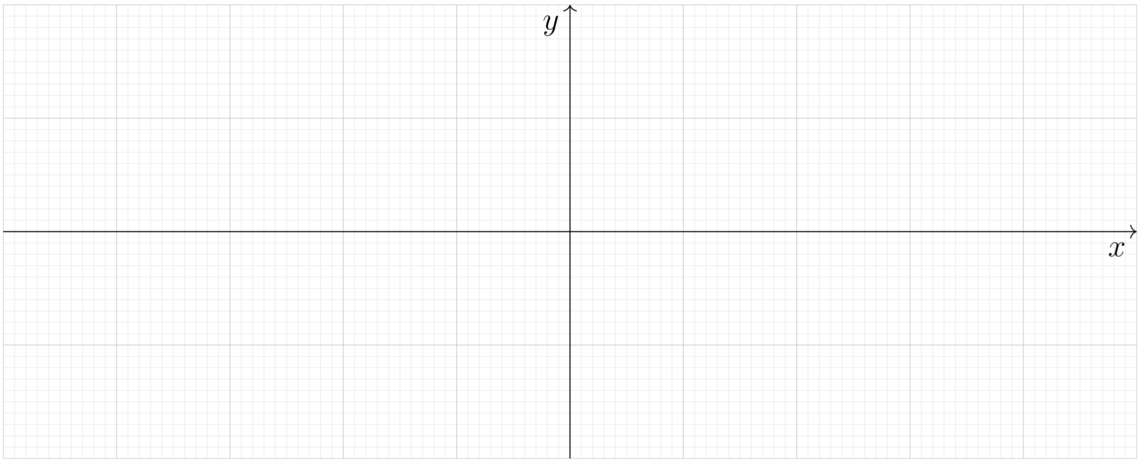
3C. Der Teilraum $X = \{\pm 1\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ist lokal euklidisch und hausdorffsch. Gibt es eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, sodass $X/_\sim$ lokal euklidisch ist, aber nicht hausdorffsch?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

2

Aufgabe 4. *Homöomorphismen (16 Punkte)*

4A. Skizzieren Sie das Bild der Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}\bigl(2x, x^2 - 1\bigr)$.
Markieren Sie insbesondere die Punkte $g(0)$ und $g(\pm 1)$ sowie $g(\pm 2)$ und $g(\pm 3)$.



$\overline{}$ 2

4B. Überdecken Sie die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \,\}$ durch zwei offene Mengen $U_\pm \subset \mathbb{S}^2$ mit Homöomorphismen $(f_\pm, g_\pm) : U_\pm \cong \mathbb{R}^2$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen $f_\pm : U_\pm \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ und $g_\pm : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} U_\pm$, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

$\overline{}$ 3

4C. Ist die stetige Bijektion $f : [0, 1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ offen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

4D. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist stetig. Führen Sie die kanonische Faktorisierung $p = \iota \circ \bar{p} \circ q$ hierzu explizit aus: Was sind Quotient und Bild und die induzierte Abbildung $\bar{p}$?

3

4E. Induziert die kanonische Faktorisierung jeder stetigen Abbildung einen Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

4F. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und hierauf die Abbildung

$$f = \operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ +1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Nennen Sie auf $\{-1, 0, 1\}$ die feinste Topologie $\mathcal{T} = f_* \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, für die f stetig ist.

$$\mathcal{T} = \Bigg\{ \qquad \Bigg\}$$

2

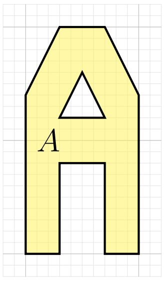
Der Zielraum $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ist diskret. Ist $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ eine Identifizierung?

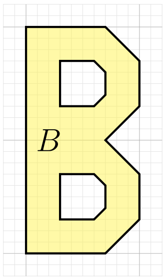
☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

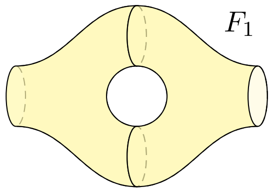
2

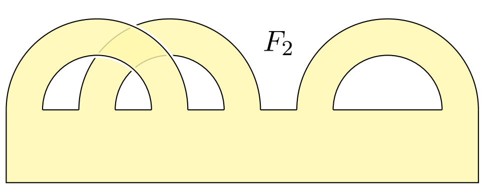
Aufgabe 5. *Flächen (8 Punkte)*

Wir betrachten die zweidimensionalen Polyeder $A, B \subset \mathbb{R}^2$, bestehend aus Ecken und Kanten und der eingeschlossenen Fläche, sowie die beiden Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$ wie skizziert:









5A. Nennen Sie die Euler–Charakteristiken der gezeigten Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$.

$\chi(A) =$, $\chi(B) =$.

/2

Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : A \cong B$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

5B. Nennen Sie die Euler–Charakteristik der gezeigten Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$\chi(F_1) = \chi(F_2) =$

/1

Sind die (kompakten zusammenhängenden) Flächen F_1 und F_2 homöomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/3

Aufgabe 6. *Basen* (*11 Punkte*)

6A. Erlaubt der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis seiner Topologie?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

$\overline{}$ 2

6B. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ diskret und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie. Konstruieren Sie eine Injektion $\sigma : A \hookrightarrow \mathcal{B}$.

$\overline{}$ 3

6C. Die Menge $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist abzählbar unendlich und diskret.
Gibt es auch überabzählbare diskrete Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

6D. Existiert in $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit sup–Norm eine überabzählbare diskrete Teilmenge A?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

$\overline{}$ 2

6E. Ist der Raum $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 7. *Metrisierung* (*4 Punkte*)

7A. Lässt sich der Raum $[0,1]^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to [0,1] \}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz metrisieren? (Nennen Sie explizit eine Metrik oder ein Hindernis.)

☐ Ja ☐ Nein. Metrik oder Hindernis:

2

7B. Lässt sich der Raum $[0,1]^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to [0,1] \}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz metrisieren? (Nennen Sie explizit eine Metrik oder ein Hindernis.)

☐ Ja ☐ Nein. Metrik oder Hindernis:

2

Aufgabe 8. *Stetigkeit* (*10 Punkte*)

8A. Nennen Sie eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen $f_n \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ und ihre Ableitungen f_n' mit Supremumsnorm $|f_n|_{[0,1]} \searrow 0$ und $|f_n'|_{[0,1]} \nearrow \infty$ für $n \to \infty$.

2

8B. Ist die Ableitung $\partial : \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ stetig bezüglich der Supremumsnorm?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

8C. Gegeben seien topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sowie hierzu eine Überdeckung $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und stetige Funktionen $f_\lambda : X_\lambda \to Y$. Was müssen Sie prüfen, um diese laut Verklebesatz zu einer stetigen Abbildung $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : X \to Y$ zu verkleben?

$\overline{2}$

8D. Gilt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für alle Intervalle $A, B \subset \mathbb{R}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

8E. Gilt $\overline{\bigcup_{n=0}^\infty A_n} = \bigcup_{n=0}^\infty \overline{A_n}$ für alle Intervalle $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

Aufgabe 9. *Offen und dicht* (*6 Punkte*)

9A. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen mit der euklidischen Topologie. Ist hierin die Menge $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ der invertierbaren Matrizen offen und dicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

9B. Sei $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \,\}$ und $\mathrm{GL}_2^-\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A < 0 \,\} \ni \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Teilmenge $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ist $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

9C. In $P_2 = \{\, X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X] \,\} \cong \mathbb{C}^2$ sei $S = \{\, (X-u)(X-v) \mid u, v \in \mathbb{C},\ u \neq v \,\}$ die Teilmenge aller Polynome mit zwei *verschiedenen* Nullstellen. Ist S in P_2 offen und dicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.