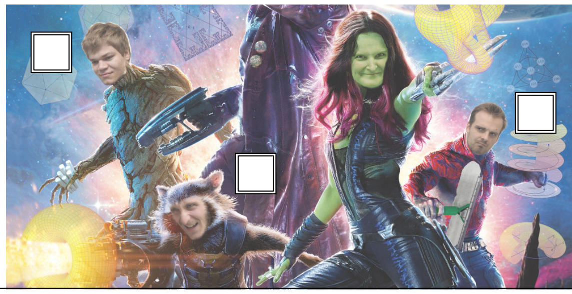
Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name: Musterlösung	Name des Tutors (oder Bild ankreuzen): 
Vorname: Musterlösung	
Matrikelnummer: Musterlösung	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/10	/8	/16	/8	/11	/4	/10	/6	/74

Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung. Die Fragen sind sehr zahlreich aber leicht: Sie wurden in Vorlesung und/oder Übung diskutiert, nur wenige erfordern Anwendung der Techniken auf ein variiertes Beispiel. Gefragt ist, ein passendes Werkzeug zu nennen oder ein einfaches Beispiel einzuordnen. Diesen unspektakulären aber nützlichen Fragentyp können Sie zur Diagnose nutzen, und auch ähnliche Fragen selbst entwickeln, um Begriffe und Techniken einzuüben. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (10 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?	[X] Ja	[ ] Nein
2B. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$?	[ ] Ja	[X] Nein
2C. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2, [0,1]) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}^2, [0,1]) : f \mapsto f\vert_{\mathbb{Q}^2}$ ist injektiv.	[X] Ja	[ ] Nein
2D. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}^2, [0,1]) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}^2, [0,1]) : f \mapsto f\vert_{\mathbb{Q}^2}$ ist surjektiv.	[ ] Ja	[X] Nein
2E. Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert.	[ ] Ja	[X] Nein
2F. Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert.	[ ] Ja	[X] Nein
2G. Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite.	[ ] Ja	[X] Nein
2H. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste.	[X] Ja	[ ] Nein
2I. Jeder zweitabzählbare Raum ist separabel.	[X] Ja	[ ] Nein
2J. Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar.	[X] Ja	[ ] Nein

Erläuterung: Diese Fragen sind aus der Vorlesung, den Übungen und alten Klausuren bekannt und sollten Ihnen daher leicht fallen. Diese erste Fragenfamilie war hier nur mit Ja/Nein zu beantworten. Noch besser könnten Sie sich nach genaueren Begründungen fragen, so wie es in den folgenden Fragen typischerweise verlangt wird. Diese Präzisierung sollten Sie zu Ihrer Vor- und Nachbereitung ebenso versuchen und auch sicher beantworten können.

Aufgabe 3. *Teilräume und Quotienten (8 Punkte)*

3A. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $\iota : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_A$ auf A:

$$\mathcal{T}_A = \left\{ \quad A \cap U = \iota^{-1}(U) \quad \middle| \quad U \in \mathcal{T}_X \quad \right\}$$

1

Sei $\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_X$. Konstruieren Sie hieraus eine Basis $\mathcal{B}_A$ der Topologie $\mathcal{T}_A$:

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \quad A \cap B = \iota^{-1}(B) \quad \middle| \quad B \in \mathcal{B}_X \quad \right\}$$

1

Weisen Sie nach, dass $\mathcal{B}_A$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_A$ ist:

Sei $V \in \mathcal{T}_A$. Nach obiger Definition bedeutet das $V = A \cap U$ für ein $U \in \mathcal{T}_X$.
Hierzu existiert $S \subset \mathcal{B}_X$ mit $U = \bigcup_{B \in S} B$, da $\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_X$ ist.
Also gilt $V = A \cap \bigcup_{B \in S} B = \bigcup_{B \in S}(A \cap B)$. Somit ist $\mathcal{B}_A$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_A$.

Erläuterung: Die Teilraumkonstruktion von $(X, \mathcal{T}_X)$ zu $(A, \mathcal{T}_A)$ ist natürlich und naheliegend. Die hier erklärte Übertragung von Basen hat interessante Konsequenzen, zum Beispiel ist in jedem zweitabzählbaren Raum auch jeder Teilraum zweitabzählbar. *Achtung:* Gefragt war nicht nur, dass $\mathcal{B}_A$ die Basis von *irgendeiner* Topologie ist, Axiome (B1–2); es muss $\mathcal{T}_A$ sein.

3

3B. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ auf Q:

$$\mathcal{T}_Q = \left\{ \quad V \subset Q \quad \middle| \quad q^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \quad \right\}$$

1

3C. Der Teilraum $X = \{\pm 1\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ist lokal euklidisch und hausdorffsch. Gibt es eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, sodass $X/_\sim$ lokal euklidisch ist, aber nicht hausdorffsch?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

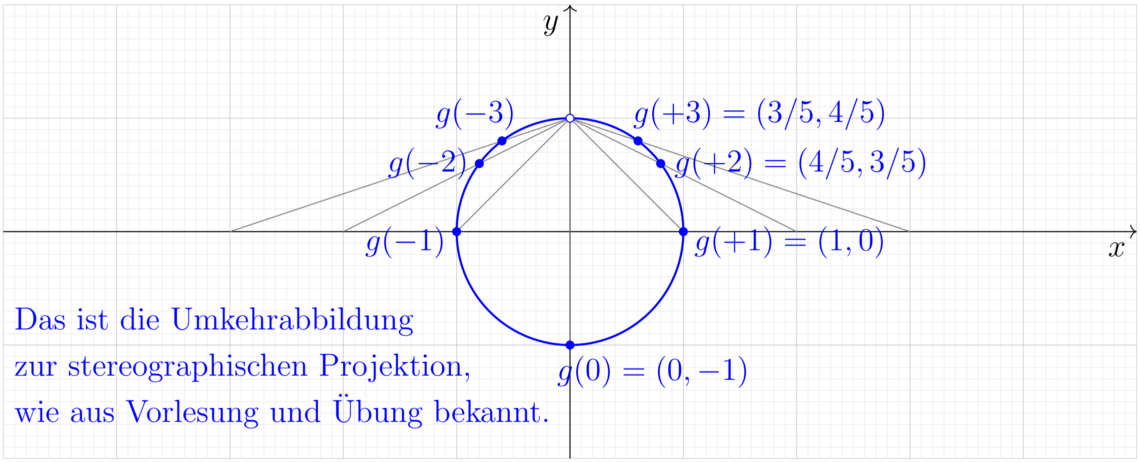
Beispiele sind die verzweigte Gerade, mit $\sim$ erzeugt von $(+1, x) \sim (-1, x)$ für $x < 0$,
und die Gerade mit doppeltem Ursprung, mit $\sim$ erzeugt von $(+1, x) \sim (-1, x)$ für $x \neq 0$.

Erläuterung: Ohne Quotientenkonstruktion ist es sehr mühsam, gewisse Gegen-/Beispiele zu konstruieren. Mit Quotienten erweitern wir unser Repertoire ganz wesentlich.

2

Aufgabe 4. *Homöomorphismen (16 Punkte)*

4A. Skizzieren Sie das Bild der Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}\big(2x, x^2-1\big)$.
Markieren Sie insbesondere die Punkte $g(0)$ und $g(\pm 1)$ sowie $g(\pm 2)$ und $g(\pm 3)$.



2

4B. Überdecken Sie die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \,\}$ durch zwei offene Mengen $U_\pm \subset \mathbb{S}^2$ mit Homöomorphismen $(f_\pm, g_\pm) : U_\pm \cong \mathbb{R}^2$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen $f_\pm : U_\pm \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ und $g_\pm : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} U_\pm$, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

Dies gelingt mit der stereographischen Projektion (in beliebiger Dimension n, hier $n = 2$):

$U_\pm = \mathbb{S}^n \smallsetminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ die Sphäre ohne Nordpol / Südpol,

$$f_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}\big(x_1, \dots, x_n\big),$$

$$g_\pm : \mathbb{R}^n \to U_\pm, \qquad g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{|y|^2 + 1}\big(2y_1, \dots, 2y_n, \pm(|y|^2 - 1)\big).$$

Erläuterung: Die erste Formel ergibt sich aus der Skizze, die Umkehrung muss man ausrechnen; hierzu war die Dimension $n = 1$ als Hinweis gegeben. Stehen die Formeln erst einmal da, so ist der Rest leicht: Die Wohldefiniertheit von f ist klar, die von g rechnet man leicht nach, die Stetigkeit ist klar als Verkettung stetiger Funktionen, und schließlich gilt $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$. Das beweist $(f_\pm, g_\pm) : U_\pm \cong \mathbb{R}^n$. (Diese Ausführung war hier nicht verlangt.)

3

4C. Ist die stetige Bijektion $f : [0, 1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ offen?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Menge $[0, 1/2[$ ist offen in $[0, 1[$, aber ihr Bild $f([0, 1/2[)$ ist nicht offen in $\mathbb{S}^1$.

Erläuterung und Erinnerung: Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus!
Hier ging es darum, dieses grundlegende Problem an einem konkreten Beispiel zu belegen. 2

4D. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist stetig. Führen Sie die kanonische Faktorisierung $p = \iota \circ \bar{p} \circ q$ hierzu explizit aus: Was sind Quotient und Bild und die induzierte Abbildung $\bar{p}$?

Wir finden den Quotienten $q : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Äquivalenzrelation $t \sim t'$ gdw $t - t' \in \mathbb{Z}$.
Das Bild ist der Teilraum $\mathbb{S}^1$, also die Kreislinie, mit der Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$.
Dies induziert die stetige Bijektion $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 : t + \mathbb{Z} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$.

Erläuterung: In diesem Falle erhalten wir nicht nur eine stetige Bijektion, sondern sogar einen Homöomorphismus $\bar{p} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$. Das ist der beste Fall, aber nicht immer gegeben. Zudem ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ein wichtiges Beispiel, insbesondere als archetypische Überlagerung, und wurde daher in der Vorlesung ausführlich diskutiert.

$\overline{3}$

4E. Induziert die kanonische Faktorisierung jeder stetigen Abbildung einen Homöomorphismus?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

4C: Die stetige Bijektion $f : [0, 1[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ ist ein Gegenbeispiel.

Erläuterung: Beispiele und Gegenbeispiele sollen Sie vor naivem Irrglauben schützen. In den vorigen Fragen waren genügend Beispiele vorbereitet, so dass Sie hieraus schöpfen konnten.

$\overline{2}$

4F. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und hierauf die Abbildung

$$f = \operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ +1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Nennen Sie auf $\{-1, 0, 1\}$ die feinste Topologie $\mathcal{T} = f_* \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, für die f stetig ist.

$$\mathcal{T} = \Big\{ \quad \emptyset, \quad \{-1\}, \quad \{1\}, \quad \{-1, 1\}, \quad \{-1, 0, 1\} \quad \Big\}$$

$\overline{2}$

Der Zielraum $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ist diskret. Ist $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ eine Identifizierung?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

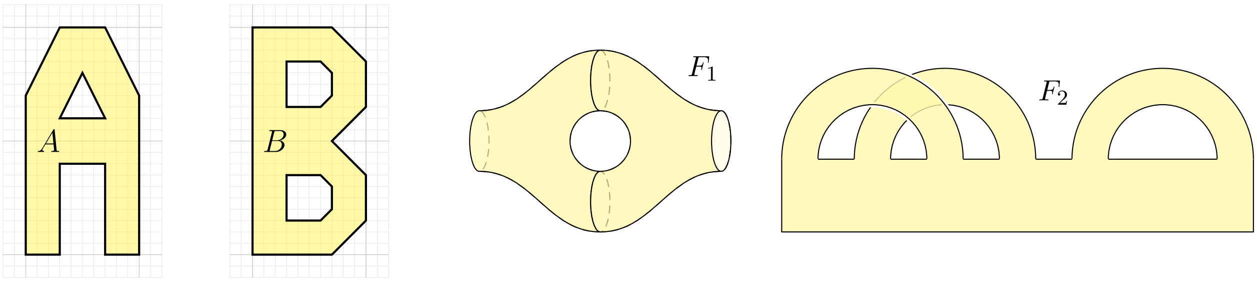
Die vorgeschobene Topologie $f_* \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathfrak{P}\{-1, 0, 1\}$ ist nicht die diskrete Topologie.

Erläuterung: Die diskrete Topologie auf dem Zielraum war vorgegeben und explizit betont. Mit diesen Topologien ist unsere Abbildung sign offen und abgeschlossen, aber nicht stetig! Zur Erinnerung: Die Stetigkeit einer Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ entspricht $f_* \mathcal{T}_X \supset \mathcal{T}_Y$. Identifizierung bedeutet noch strenger: $f : X \to Y$ ist surjektiv und erfüllt $f_* \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$.

$\overline{2}$

Aufgabe 5. *Flächen (8 Punkte)*

Wir betrachten die zweidimensionalen Polyeder $A, B \subset \mathbb{R}^2$, bestehend aus Ecken und Kanten und der eingeschlossenen Fläche, sowie die beiden Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$ wie skizziert:



5A. Nennen Sie die Euler–Charakteristiken der gezeigten Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$.

$\chi(A) = 0$, $\chi(B) = -1$. 2

Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : A \cong B$?

☐ Ja $\boxed{X}$ Nein. Begründung:

Die Euler–Charakteristik ist topologisch invariant (!) und hier verschieden.

Erläuterung: Zur Berechnung der Euler–Charakteristik kennen Sie verschiedene Methoden, etwa mittels Triangulierungen oder Euler–Maß oder Schneiden-und-Kleben/ Additivität, etc. Bitte wählen Sie jeweils die (Ihrer Erfahrung nach) leichteste und effizienteste Vorgehensweise. *Alternative:* Die beiden Räume A und B sind kompakte zusammenhängende Flächen, wir können also den Flächenklassifikationssatz anwenden. Die Fläche A hat 2 Randkomponenten, die Fläche B hingegen 3; auch diese Invariante (!) unterscheidet die beiden Räume A und B. 2

5B. Nennen Sie die Euler–Charakteristik der gezeigten Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$\chi(F_1) = \chi(F_2) = -2$ 1

Sind die (kompakten zusammenhängenden) Flächen F_1 und F_2 homöomorph?

$\boxed{X}$ Ja ☐ Nein. Begründung:

Beide haben dieselbe Euler–Charakteristik $\chi = -2$, wie zuvor ausgerechnet,
beide haben $r = 2$ Randkomponenten, und beide sind orientierbar ($\varepsilon = +$).
Dank Flächenklassifikationssatz gilt $F_1 \cong F^+_{1,2} \cong F_2$.

Alternative: Einen Homöomorphismus $F_1 \cong F_2$ kann man auch zeichnerisch veranschaulichen. Das ist selbst in einfachen Beispielen erstaunlich knifflig: Versuchen Sie es hier als Übung! Das erfordert jedesmal etwas Phantasie, zudem gute Anschauung und auch Zeichenkünste. Das alles sind durchaus erstrebenswerte Fähigkeiten. Der Flächenklassifikationssatz hingegen ist Routine und daher oft bequemer, so auch hier. Abstrakt ist leicht, konkret ist schwer! 3

Aufgabe 6. *Basen (11 Punkte)*

6A. Erlaubt der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis seiner Topologie?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Konkret $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\;\middle|\; a_i < b_i \text{ in } \mathbb{Q} \right\}$. Alternativ $\mathcal{B} = \left\{ B(a,r) \;\middle|\; a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}_{>0} \right\}$.

Erläuterung: Gefragt war die explizite Angabe einer Basis, nicht nur die Existenzaussage **2J**. Abstrakt ist schön und gut, manchmal ist konkret noch schöner und guter!

2

6B. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ diskret und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie. Konstruieren Sie eine Injektion $\sigma : A \hookrightarrow \mathcal{B}$.

Zu jedem $a \in A$ existiert eine Umgebung $U_a \in \mathcal{T}$ mit $U_a \cap A = \{a\}$, da A diskret ist.
Hierzu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subset U$, da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ ist.
Die Abbildung $\sigma : A \hookrightarrow \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ ist injektiv (dank $A \cap B_a = \{a\}$).

Erläuterung: Diese einfache Beziehung $A \hookrightarrow \mathcal{B}$ ist oft nützlich: Die Größe *einer* beliebigen Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_X$ ist eine obere Schranke für die Größe *jeder* diskreten Teilmenge $A \subset X$ (wie in Aufgabe 6C). Umgekehrt ist die Größe *einer* beliebigen diskreten Teilmenge $A \subset X$ eine untere Schranke für die Größe *jeder* Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ (wie in Aufgabe 6E).

3

6C. Die Menge $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist abzählbar unendlich und diskret.
Gibt es auch überabzählbare diskrete Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

$\boxed{}$ Ja $\boxed{X}$ Nein. Begründung:

6A: Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ erlaubt eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{T}$.
6B: Jede diskrete Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ erlaubt eine Injektion $A \hookrightarrow \mathcal{B}$, ist also abzählbar.

Erläuterung: Das ist eine schöne erste Anwendung der akribischen Abzählungen.

2

6D. Existiert in $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit sup–Norm eine überabzählbare diskrete Teilmenge A?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Die Menge $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ \mathbf{I}_X \mid X \subset \mathbb{N} \}$ erfüllt $|f - g| = 1$ für alle $f \neq g$ in A.

Erläuterung: Es gibt viele weitere Möglichkeiten, diese einfache springt besonders ins Auge. In der Vorlesung haben wir die interpolierte Version im Banach–Raum $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ genutzt.

2

6E. Ist der Raum $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ zweitabzählbar?

$\boxed{}$ Ja $\boxed{X}$ Nein. Begründung:

6D: Es gibt eine überabzählbare diskrete Teilmenge $A \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
6B: Jede Basis $\mathcal{B}$ erlaubt eine Injektion $A \hookrightarrow \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{B}$ überabzählbar.

Erläuterung: Das ist eine weitere Anwendung der Abzählungen, als Kontrast zum $\mathbb{R}^n$.

2

Aufgabe 7. *Metrisierung (4 Punkte)*

7A. Lässt sich der Raum $[0,1]^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to [0,1] \}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz metrisieren? (Nennen Sie explizit eine Metrik oder ein Hindernis.)

☐ Ja ☒ Nein. Metrik oder Hindernis:

Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, erfüllt $[0,1]^{\mathbb{R}}$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Erläuterung: Das konkrete Beispiel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wurde in der Vorlesung ausgeführt.
Allgemein gilt: Ein überabzählbares Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist nicht metrisierbar,
wobei wir $|X_i| \ge 2$ für alle $i \in I$ voraussetzen, um triviale Sonderfälle auszuschließen.
Zum Kontrast: Ein abzählbares Produkt $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ hingegen ist genau dann metrisierbar,
wenn jeder Faktor metrisierbar ist, wie in der folgenden Frage exemplarisch ausgeführt.

$\overline{}$ 2

7B. Lässt sich der Raum $[0,1]^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to [0,1] \}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz metrisieren? (Nennen Sie explizit eine Metrik oder ein Hindernis.)

☒ Ja ☐ Nein. Metrik oder Hindernis:

Eine geeignete Metrik ist $d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |x_k - y_k|$.

Erläuterung: Jedes abzählbare Produkt metrisierbarer Räume ist ebenso metrisierbar.
Speziell der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist Grundlage des Metrisierungssatzes von Urysohn.

Warnung: Die Supremumsnorm $|-|_\infty$ auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$ liefert eine vollkommen andere Topologie:
Der Ball $B_\infty(0, 1/2)$ ist nicht offen in der Produkttopologie / punktweiser Konvergenz.

$\overline{}$ 2

Bemerkung: Zur Metrisierbarkeit ist noch viel Interessantes zu sagen… und in Klausuren zu fragen. Wie versprochen wurden allerdings die letzten, noch allzu frischen Themen, nicht in diese Klausur aufgenommen. Daher hier nur die Anfangsfragen, die wir schon ausreichend in Vorlesung und Übungen bearbeitet haben.

Aufgabe 8. *Stetigkeit (10 Punkte)*

8A. Nennen Sie eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen $f_n \in \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ und ihre Ableitungen f_n' mit Supremumsnorm $|f_n|_{[0,1]} \searrow 0$ und $|f_n'|_{[0,1]} \nearrow \infty$ für $n \to \infty$.

Die Funktionen $f_n(x) = \sin(2\pi n x)/\sqrt{n}$ erfüllen $|f_n|_{[0,1]} = 1/\sqrt{n} \searrow 0$,
ihre Ableitungen $f_n'(x) = \sin(2\pi n x) 2\pi\sqrt{n}$ erfüllen $|f_n'|_{[0,1]} = 2\pi\sqrt{n} \nearrow \infty$,

Erläuterung: Hierzu gibt es zahlreiche Varianten, mindestens ein konkretes Beispiel muss sein.

$\overline{}$ 2

8B. Ist die Ableitung $\partial : \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ stetig bezüglich der Supremumsnorm?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

8A: Die Abbildung $\partial : \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ ist nicht folgenstetig.

Erläuterung: Für jede Abbildung $f : X \to Y$ zwischen normierten Räumen ist Folgenstetigkeit äquivalent zu Stetigkeit. Dies gilt auch für metrische Räume, oder wenn X erstabzählbar ist.

Für jede lineare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen normierten Räumen entspricht Stetigkeit einer endlichen Operatornorm $\|f\| = \sup\{\, |f(x)|_Y \mid |x|_X \le 1 \,\}$. Nach **8A** gilt $\|\partial\| = \infty$. 2

8C. Gegeben seien topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sowie hierzu eine Überdeckung $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ und stetige Funktionen $f_\lambda : X_\lambda \to Y$. Was müssen Sie prüfen, um diese laut Verklebesatz zu einer stetigen Abbildung $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : X \to Y$ zu verkleben?

Wohldefiniertheit: Hinreichend und notwendig ist $f_\lambda|_{X_\lambda\cap X_\mu} = f_\mu|_{X_\mu\cap X_\lambda}$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$.
Stetigkeit: Hinreichend ist $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ offen oder lokal-endlich abgeschlossen.

Erläuterung: Gefragt war hier der Verklebesatz. Beide Bedingungen sind zu prüfen. Die erste ist allgemein und garantiert zunächst nur, dass $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ tatsächlich eine Abbildung ist. Die zweite garantiert die Stetigkeit von $f : X \to Y$. 2

8D. Gilt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für alle Intervalle $A, B \subset \mathbb{R}$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Für $A = \,]0,1[$ und $B = \,]1,2[$ gilt $\overline{A \cap B} = \emptyset$ aber $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Erläuterung: In jedem topologischen Raum gilt für endliche Vereinigungen $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Für endliche Schnitte hingegen gilt die Gleichheit nicht, wie hier erläutert. 2

8E. Gilt $\overline{\bigcup_{n=0}^\infty A_n} = \bigcup_{n=0}^\infty \overline{A_n}$ für alle Intervalle $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Für die Intervalle $A_n = [0, 1-2^{-n}]$ gilt $\bigcup_{n=0}^\infty \overline{A_n} = [0,1[$, aber $\overline{\bigcup_{n=0}^\infty A_n} = [0,1]$.
Variante: Für $A_n = \,]2^{-n}-1, 1-2^{-n}[$ gilt $\overline{\bigcup_{n=0}^\infty A_n} = [-1,1]$ aber $\bigcup_{n=0}^\infty \overline{A_n} = \,]-1,1[$.

Erläuterung: In jedem topologischen Raum gilt für paarweise Vereinigungen $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Per Induktion gilt dasselbe dann für beliebige *endliche* Vereinigungen. Für unendliche Vereinigungen hingegen gilt es nicht! Hier rettet uns die Bedingung der lokalen Endlichkeit. 2

Aufgabe 9. *Offen und dicht (6 Punkte)*

9A. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen mit der euklidischen Topologie. Ist hierin die Menge $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ der invertierbaren Matrizen offen und dicht?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die Determinante $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$ ist eine Polynomfunktion. Die Nichtnullstellenmenge $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A \neq 0 \,\}$ ist offen und dicht, wie für jede Polynomfunktion $\neq 0$.

Erläuterung: Für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0 \,\} = f^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$ offen. Für die Dichtheit nutzen wir hier wesentlich, dass f zudem eine Polynomfunktion ist.

Warnung: Stetigkeit allein genügt für „offen“, aber nicht für „dicht“. Ist $E \subset Y$ dicht und $f : X \to Y$ stetig, so ist das Urbild $f^{-1}(E)$ in X im Allgemeinen nicht dicht. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht, aber das Urbild unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{2}$ ist leer. $\frac{}{2}$

9B. Sei $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0 \,\}$ und $\mathrm{GL}_2^-\,\mathbb{R} = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A < 0 \,\} \ni \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Teilmenge $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ist $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Teilmenge $\mathrm{GL}_2^-\,\mathbb{R}$ ist offen und nicht-leer, aber disjunkt von $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$.

Erinnerung: In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Menge $M \subset X$ *dicht*, wenn sie jede nicht-leere offene Menge $U \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\emptyset\}$ trifft, also $M \cap U \neq \emptyset$ erfüllt. Die Menge $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$ erfüllt dies nicht, denn $\mathrm{GL}_2^-\,\mathbb{R}$ ist offen und nicht-leer, aber disjunkt von $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}$.

Alternative: Wenn Sie sich die Situation mit konvergenten Folgen veranschaulichen wollen, so ist dies in $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ natürlich möglich, wie in jedem metrischen oder erstabzählbaren Raum. Keine Folge $A_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A_n > 0$ konvergiert gegen $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det B < 0$. $\frac{}{2}$

9C. In $P_2 = \{\, X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X] \,\} \cong \mathbb{C}^2$ sei $S = \{\, (X-u)(X-v) \mid u, v \in \mathbb{C},\ u \neq v \,\}$ die Teilmenge aller Polynome mit zwei *verschiedenen* Nullstellen. Ist S in P_2 offen und dicht?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die Diskriminante $\mathrm{disc}(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q$ ist eine Polynomfunktion. Die Nichtnullstellenmenge $S = \{\, P \in P_2 \mid \mathrm{disc}\, P \neq 0 \,\}$ ist demnach offen und dicht, wie in **9A**.

Erläuterung: Für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0 \,\} = f^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$ offen. Für die Dichtheit nutzen wir hier wesentlich, dass f zudem eine Polynomfunktion ist.

Warnung: Stetigkeit allein genügt für „offen“, aber nicht für „dicht“. $\frac{}{2}$

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.