Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/9	/18	/10	/8	/11	/12	/79

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (10 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

Sei $(E, |-|)$ ein normierter Vektorraum.

2A. Jede kompakte Teilmenge $A \subset E$ ist beschränkt und abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $A \subset E$ ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

2C. Ist (X, d) separabel, dann ist (X, d) zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Ist (X, d) zweitabzählbar, dann ist (X, d) separabel. ☐ Ja ☐ Nein

Wie üblich sei $\mathbb{B}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \}$ und $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \}$.

2E. Jede stetige Injektion $f : \mathbb{B}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Jede stetige Injektion $f : \mathbb{B}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. ☐ Ja ☐ Nein

Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ konvex kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$.

2G. Jede stetige Abbildung $f : X \to X$ hat mindestens einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jede stetige Abbildung $f : X^\circ \to X^\circ$ hat mindestens einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

2I. Ist X hausdorffsch und Y kompakt, so ist f abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Die reell–projektive Ebene* $\mathbb{RP}^2$ (9 Punkte)

3A. Sei $s \in \mathbb{S}^2$. Nennen Sie eine explizite Formel für die Spiegelung $\sigma_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \sigma_s(x)$ an der Ebene senkrecht zu s mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts $\langle - \mid - \rangle$.

$\sigma_s(x) =$

/2

3B. Konstruieren Sie hieraus eine stetige Injektion $g : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}$.

Konstruktion mit Begründung:

/3

3C. Ist die stetige Injektion $g : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}$ eine Einbettung?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/1

3D. Ist die reell–projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ hausdorffsch?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/1

3E. Lässt sich $\mathbb{RP}^2$ mit drei Karten $U_i \cong \mathbb{R}^2$ überdecken?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

Aufgabe 4. *Abzählbarkeit* (18 Punkte)

4A. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine diskrete Teilmenge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie. Konstruieren Sie eine Injektion zwischen A und $\mathcal{B}$ (in die richtige Richtung).

Konstruktion mit Begründung:

3

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ der euklidische Raum mit euklidischer Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

4B. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ seiner Topologie?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

2

4C. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ überabzählbare diskrete Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

2

4D. Gibt es Topologien $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit überabzählbaren diskreten Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

2

4E. Nennen Sie zum Vektorraum $\mathscr{C}_b = \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt $\}$ mit Supremumsnorm $\|-\|$ eine Injektion $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathscr{C}_b : a \mapsto f_a$ mit $\|f_a - f_{a'}\| = 1$ für alle $a \neq a'$.

Konstruktion mit Begründung:

$\overline{2}$

4F. Ist der Raum $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|-\|)$ zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

4G. Existiert im Raum $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|-\|)$ eine abzählbare dichte Teilmenge D?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

4H. In $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|-\|)$ ist $K = \bar{B}(0,1) = \{\, f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetig $\}$ der Einheitsball. Nennen Sie eine überabzählbare offene Überdeckung von K, die keine echte Teilüberdeckung enthält.

Konstruktion mit Begründung:

$\overline{3}$

Aufgabe 5. *Abbildungsgrad* (10 Punkte)

5A. Was besagt der Satz von Brouwer–Hopf über $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$?

/2

5B. Welche der Mengen $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ wurden in der Vorlesung bestimmt und mit welchem Ergebnis?

/2

5C. Ist $\mathscr{C}(Z, X \times Y) \to \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) : f \mapsto (\mathrm{pr}_X \circ f, \mathrm{pr}_Y \circ f)$ eine Bijektion?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

5D. Ist $[Z, X \times Y] \to [Z, X] \times [Z, Y] : [f] \mapsto ([\mathrm{pr}_X \circ f], [\mathrm{pr}_Y \circ f])$ eine Bijektion?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

5E. Sind die Räume $X = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5$ und $Y = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$ homotopie-äquivalent?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

Aufgabe 6. *Funktoren und Retrakte* (8 Punkte)

Ein *Retrakt* $f : X \to Y$ ist ein linksinvertierbarer Morphismus (in der jeweiligen Kategorie).

6A. Überführt jeder Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ Retrakte in Retrakte?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

6B. Überführt jeder Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ Einbettungen in Injektionen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

6C. Existiert ein Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ mit $F(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ und $F(\mathbb{C}) = \{0\}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

6D. Existiert ein Funktor $F : \texttt{Top} \to \texttt{Set}$ mit $F(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ und $F(\mathbb{C}) = \{0\}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

Aufgabe 7. *Stetige Multiplikation und Fundamentalgruppe* (11 Punkte)

7A. Ist auf $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrixmultiplikation $(A, B) \mapsto A \cdot B$ stetig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

7B. Ist auf $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrixinversion $A \mapsto A^{-1}$ stetig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

7C. Sei $(X, 1)$ ein topologischer Raum X zusammen mit einem Fußpunkt $1 \in X$. Hierin sei $\varepsilon : ([0, 1], \{0, 1\}) \to (X, 1)$ die konstante Schleife und $\alpha : ([0, 1], \{0, 1\}) \to (X, 1)$ eine beliebige Schleife. Konstruieren Sie explizit eine Homotopie $H : \alpha * \varepsilon \sim \varepsilon * \alpha$.

Konstruktion:

2

7D. Wir betrachten Tripel $(X, \cdot, 1)$ bestehend aus einem topologischen Raum und einer stetigen Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ mit neutralem Element 1, also $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in X$. Gegeben sei $H : \alpha * \varepsilon \sim \varepsilon * \alpha$ und $K : \varepsilon * \beta \sim \beta * \varepsilon$. Konstruieren Sie hieraus $L : \alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

Konstruktion mit Begründung:

3

7E. Sei $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1\}$ die zweifach gelochte Ebene. Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, 1)$ durch Erzeuger und Relationen; interpretieren Sie die Erzeuger in einer Skizze.

Präsentation und Skizze:

2

Existiert auf diesem Raum $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1\}$ eine stetige Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ mit neutralem Element 1?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 8. *Flächen und Quotienten* (12 Punkte)

8A. Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf $\mathbb{R}^3$ durch Rotation um die z–Achse mit Periode 2π. Schreiben Sie diesen Gruppenhomomorphismus $\rho : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}, \cdot) : \theta \mapsto \rho(\theta)$ als Matrix $\rho(\theta)$.

1

Diese Gruppenoperation können wir auf die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ einschränken und definieren so die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{S}^2$: Genau dann gilt $s \sim s'$, wenn ein $\theta \in \mathbb{R}$ existiert mit $\rho(\theta)s = s'$.

Nennen Sie alle möglichen Kardinalitäten der Äquivalenzklassen und je ein Beispiel.

2

Nennen Sie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to P$ auf ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$,
die auf dem Quotienten eine stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{S}^2/_\sim \xrightarrow{\sim} P$ induziert.

2

Ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

8B. Wir betrachten $\mathbb{D}^2/\langle\, ccd\,\rangle$. Welche Fläche $\mathbb{D}^2/\langle\, ccd\,\rangle \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$ entsteht so?

2

8C. Wir betrachten das Quadrat $Q = [-1, +1]^2$ mit $(x, -1) \sim (x, +1)$ und $(-1, y) \sim (+1, y)$. Schreiben Sie diese Identifizierung $Q/_{\sim} \cong \mathbb{D}^2/\langle\, w\,\rangle$ als ein Flächenwort w.

1

Nennen Sie eine stetige Abbildung $q : Q \to T$ auf den Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
die auf dem Quotienten einen Homöomorphismus $\bar{q} : Q/_{\sim} \xrightarrow{\sim} T$ induziert.

1

Auf dem Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ werde die Äquivalenzrelation $\approx$ erzeugt durch $(x, y) \approx (y, x)$. Schreiben Sie den Quotienten $T/_{\approx}$ als Flächenwort. Welche Fläche $T/_{\approx} \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$ entsteht so?

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.