Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/10	/9	/18	/10	/8	/11	/12	/79

Die Klausur bietet etwas zu viele Fragen für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies.

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie sollen Fleiß in den Übungen und Sorgfalt in der Vorbereitung belohnen. Das sind leichte Punkte — leider oft vergeudet. Falls Sie diese Weisheit *vor* Ihrer eigenen Klausur lesen: Nutzen Sie Ihre Übungen!

Vorwort zur Musterlösung: Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (10 Punkte)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= immer wahr) oder nein (= manchmal unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

Sei $(E, |-|)$ ein normierter Vektorraum.

2A. Jede kompakte Teilmenge $A \subset E$ ist beschränkt und abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

2B. Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $A \subset E$ ist kompakt. [ ] Ja [X] Nein

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

2C. Ist (X, d) separabel, dann ist (X, d) zweitabzählbar. [X] Ja [ ] Nein

2D. Ist (X, d) zweitabzählbar, dann ist (X, d) separabel. [X] Ja [ ] Nein

Wie üblich sei $\mathbb{B}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \}$ und $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \}$.

2E. Jede stetige Injektion $f : \mathbb{B}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. [ ] Ja [X] Nein

2F. Jede stetige Injektion $f : \mathbb{B}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. [X] Ja [ ] Nein

Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ konvex kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$.

2G. Jede stetige Abbildung $f : X \to X$ hat mindestens einen Fixpunkt. [X] Ja [ ] Nein

2H. Jede stetige Abbildung $f : X^\circ \to X^\circ$ hat mindestens einen Fixpunkt. [ ] Ja [X] Nein

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

2I. Ist X hausdorffsch und Y kompakt, so ist f abgeschlossen. [ ] Ja [X] Nein

2J. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

Aufgabe 3. *Die reell–projektive Ebene* $\mathbb{RP}^2$ (9 Punkte)

3A. Sei $s \in \mathbb{S}^2$. Nennen Sie eine explizite Formel für die Spiegelung $\sigma_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \sigma_s(x)$ an der Ebene senkrecht zu s mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts $\langle - \mid - \rangle$.

$\sigma_s(x) =$ $x - 2\langle s \mid x \rangle s$ bekannt aus der Linearen Algebra und unserer Übung!

Geometrisch: Machen Sie eine Skizze! Algebraisch: Ergänzen Sie s zu einer Orthonormalbasis.

2

3B. Konstruieren Sie hieraus eine stetige Injektion $g : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Konstruktion mit Begründung:

Wir nutzen $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^{3\times3} : s \mapsto \sigma_s$, hier geschrieben als Matrix.
Die Abbildung f ist stetig, da koordinatenweise ein quadratisches Polynom in s.

Es gilt $f(-s) = f(s)$, somit induziert f auf dem Quotienten $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm1\}$ die ersehnte stetige Abbildung $g : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^{3\times3} : \{\pm s\} \mapsto \sigma_s$.

Schließlich ist g injektiv: Aus $\sigma_s = \sigma_{s'}$ folgt $-s = \sigma_s(s) = \sigma_{s'}(s) = s - 2\langle s' \mid s \rangle s'$, also $s = \langle s' \mid s \rangle s'$. Somit sind $s, s' \in \mathbb{S}^2$ linear abhängig, das bedeutet $s' = \pm s$.

3

3C. Ist die stetige Injektion $g : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}$ eine Einbettung?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung: Dies folgt aus dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium, s. Frage **2J**.

Erläuterung: Die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist kompakt dank Heine–Borel, also auch der Quotient $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm1\}$. Der Raum $\mathbb{R}^{3\times3}$ ist hausdorffsch. Dank dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium **2J** ist $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^{3\times3}$ abgeschlossen und $g : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^{3\times3}$ eine Einbettung.

1

3D. Ist die reell–projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ hausdorffsch?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung: Da homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^{3\times3}$, s. Frage **3C**.

Erläuterung: Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist hausdorffsch, wie jeder metrische Raum. In einem Hausdorff–Raum ist jeder Teilraum ebenfalls hausdorffsch. Etwas allgemeiner genügt hier sogar nur eine stetige Injektion in einen Hausdorff–Raum wie in **3B**, noch bequemer mit **3C**.

1

3E. Lässt sich $\mathbb{RP}^2$ mit drei Karten $U_i \cong \mathbb{R}^2$ überdecken?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

In homogenen Koordinaten gilt $U_i = \{\, [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_i = 1 \,\} \cong \mathbb{R}^2$ für $i = 0, 1, 2$.
$(h_0, k_0) : U_0 = \{\, [1, x_1, x_2] \in \mathbb{RP}^2 \,\} \cong \mathbb{R}^2 : [1, x_1, x_2] \leftrightarrow (x_1, x_2)$
$(h_1, k_1) : U_1 = \{\, [x_0, 1, x_2] \in \mathbb{RP}^2 \,\} \cong \mathbb{R}^2 : [x_0, 1, x_2] \leftrightarrow (x_0, x_2)$
$(h_2, k_2) : U_2 = \{\, [x_0, x_1, 1] \in \mathbb{RP}^2 \,\} \cong \mathbb{R}^2 : [x_0, x_1, 1] \leftrightarrow (x_0, x_1)$

Erläuterung: Das ist der Standardatlas, den Sie aus Vorlesung und Übungen kennen.

2

Aufgabe 4. *Abzählbarkeit* (18 Punkte)

4A. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine diskrete Teilmenge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie. Konstruieren Sie eine Injektion zwischen A und $\mathcal{B}$ (in die richtige Richtung).

Konstruktion mit Begründung:

Zu jedem $a \in A$ existiert $U_a \in \mathcal{T}$ mit $A \cap U_a = \{a\}$, da A diskret ist in $(X, \mathcal{T})$.

Hierzu existiert $B_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in B_a \subset U_a$, da $\mathcal{B}$ eine Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist.

Die Abbildung $A \to \mathcal{B} : a \mapsto B_a$ ist injektiv, denn $A \cap B_a = \{a\}$.

Erläuterung: Das ist ein einfaches Vergleichsargument, elegant und raffiniert und oft hilfreich. Wir werden es in den folgenden Fragen in beide Richtungen nutzen. Sie kennen diese und ähnliche Illustrationen aus Vorlesung, Übungen und früheren (Schein-)Klausuren.

3

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ der euklidische Raum mit euklidischer Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

4B. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ seiner Topologie?

[X] Ja [ ] Nein. Beispiel oder Gegenargument:

Abzählbare Basen sind z.B. rationale offene Quader $\mathcal{B} = \{ \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\mid a_i, b_i \in \mathbb{Q} \}$ oder offene Bälle mit rationalem Mittelpunkt und Radius $\mathcal{B}' = \{ B(a,r) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0} \}$

Erläuterung: Dies sind jeweils Familien offener Mengen und abzählbar nach Konstruktion. Die ersehnte Basiseigenschaft haben wir in beiden Fällen in der Vorlesung nachgewiesen.

2

4C. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ überabzählbare diskrete Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

[ ] Ja [X] Nein. Beispiel oder Gegenargument:

Dank der allgemeinen Aussage **4A** existiert eine Injektion $A \hookrightarrow \mathcal{B}$.
Dank **4B** können wir $\mathcal{B}$ abzählbar wählen, also muss auch A abzählbar sein.

Anschaulicher Slogan: Zweitabzählbar bedeutet „topologisch klein“. Das äußert sich in vielerlei Hinsicht, wie Sie aus Vorlesung und Übung wissen, und hier für diskrete Mengen sehen.

2

4D. Gibt es Topologien $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit überabzählbaren diskreten Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$?

[X] Ja [ ] Nein. Beispiel oder Gegenargument:

Die diskrete Topologie $\mathcal{T}' = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ ist ein besonders einfaches Beispiel dieser Art.
Hier ist jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ diskret, insbesondere die überabzählbare Menge $A = \mathbb{R}^n$.

Erläuterung: Diese einfache Gegenfrage betont die Besonderheit der euklidischen Topologie. Es gibt unzählige weitere Topologien dieser Art, die diskrete ist die naheliegende Wahl.

2

4E. Nennen Sie zum Vektorraum $\mathscr{C}_b = \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt $\}$ mit Supremumsnorm $\|-\|$ eine Injektion $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathscr{C}_b : a \mapsto f_a$ mit $\|f_a - f_{a'}\| = 1$ für alle $a \neq a'$.

Konstruktion mit Begründung:

Jede Folge $a \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ setzen wir stückweise affin-linear fort zu $f_a : \mathbb{R} \to [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$.
Es gilt $\|f_a - f_{a'}\| \leq 1$. Für $a \neq a'$ gilt $a(z) \neq a'(z)$ für ein $z \in \mathbb{Z}$, also $\|f_a - f_{a'}\| = 1$.

Erläuterung: Insbesondere ist die Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : a \mapsto f_a$ injektiv; das folgt aus der Norm, ebenso bereits aus $f_a|_{\mathbb{Z}} = a$. Das Bild $A = \{ f_a \mid a \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \}$ in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist zudem diskret und abgeschlossen, dank $\|f_a - f_{a'}\| = 1$ für $a \neq a'$.

$\overline{\quad}$ 2

4F. Ist der Raum $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ zweitabzählbar?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Dank der allgemeinen Aussage **4A** existiert eine Injektion $A \hookrightarrow \mathcal{B}$.
Dank **4E** können wir A überabzählbar wählen, also muss auch $\mathcal{B}$ überabzählbar sein.

Anschaulicher Slogan: Nicht-zweitabzählbar bedeutet „topologisch groß“. Solche Räume sind in vielerlei Hinsicht sperriger und für zahlreiche Fragen nur schwer in den Griff zu bekommen.

$\overline{\quad}$ 2

4G. Existiert im Raum $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ eine abzählbare dichte Teilmenge D?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Für metrische Räume ist separabel äquivalent zu zweitabzählbar. (**2C** und **2D**)
Gemäß **4F** ist $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ nicht zweitabzählbar, also auch nicht separabel.

Erläuterung: Auch in diesem Sinne ist $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ „topologisch groß“. Wenn Sie also alle Punkte in $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ approximieren wollen, so wird Ihnen dies nicht mit einer abzählbaren Menge gelingen. Andere Vektorräume sind hier entgegenkommender.

$\overline{\quad}$ 2

4H. In $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|-\|)$ ist $K = \bar{B}(0,1) = \{ f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetig $\}$ der Einheitsball. Nennen Sie eine überabzählbare offene Überdeckung von K, die keine echte Teilüberdeckung enthält.

Konstruktion mit Begründung:

Wir haben die offene Überdeckung $K \subset (\mathscr{C}_b \smallsetminus A) \cup \bigcup \{ B(f_a, 1) \mid a \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \}$.

Keiner der Bälle $B(f_a, 1)$ kann weggelassen werden, da $f_a \notin B(f_{a'}, 1)$ für $a \neq a'$.
Auch $\mathscr{C}_b \smallsetminus A$ kann nicht weggelassen werden, da $\mathrm{const}_{\mathbb{R}}^{-1} \notin B(f_a, 1)$ für $a \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Erläuterung: Der abgeschlossene Einheitsball $K \subset \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist ein extremes Gegenbeispiel zur Kompaktheit. Wir nutzen hier die Konstruktion aus **4E** mit $\|f_a - f_{a'}\| = 1$ für $a \neq a'$; insbesondere ist A abgeschlossen, also $\mathscr{C}_b \smallsetminus A$ offen. Dieses und ähnliche Beispiele kennen Sie aus Vorlesung und Übung. Der Satz von Heine–Borel für den Raum $\mathbb{R}^n$ ist etwas Besonderes!

$\overline{\quad}$ 3

Aufgabe 5. *Abbildungsgrad* (10 Punkte)

5A. Was besagt der Satz von Brouwer–Hopf über $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$?

Der Abbildungsgrad stiftet die Bijektion $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \underset{[\varphi_k] \leftarrow k}{\overset{\deg}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathbb{Z}$

Erläuterung: Die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ wird eindeutig festgelegt durch $\deg([\varphi_k]) = k$ auf den Modellabbildungen φ_k. Das ist die axiomatische Definition des Abbildungsgrades, aus der wir bereits erstaunlich viele geometrisch-topologische Anwendungen ableiten können.

$\overline{}$ 2

5B. Welche der Mengen $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q]$ wurden in der Vorlesung bestimmt und mit welchem Ergebnis?

Für $p < q$ gilt $[\mathbb{S}^p, \mathbb{S}^q] = \{*\}$, das heißt: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^q$ ist nullhomotop.

Erläuterung: Für $p > q$ gilt dies im Allgemeinen nicht! Zum Beispiel bewies Hopf 1931 das erstaunliche Ergebnis $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \cong \mathbb{Z}$. Die Berechnung der Homotopiegruppen der Sphären ist extrem schwierig und bis heute ein aktives Gebiet. Mehr hierzu in der Algebraischen Topologie. (Bewiesen haben wir bereits $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ stellvertretend für $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$, siehe die vorige Frage.)

$\overline{}$ 2

5C. Ist $\mathscr{C}(Z, X \times Y) \to \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) : f \mapsto (\mathrm{pr}_X \circ f, \mathrm{pr}_Y \circ f)$ eine Bijektion?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das ist die universelle Eigenschaft des Produkts, hier in der Kategorie `Top`.

Ausführlich: Zu jedem Paar (f_1, f_2) stetiger Abbildungen $f_1 : Z \to X$ und $f_2 : Z \to Y$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : Z \to X \times Y$ mit $\mathrm{pr}_X \circ f = f_1$ und $\mathrm{pr}_Y \circ f = f_2$. Das ist die Umkehrabbildung zu $\mathscr{C}(Z, X \times Y) \to \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) : f \mapsto (\mathrm{pr}_X \circ f, \mathrm{pr}_Y \circ f)$.

$\overline{}$ 2

5D. Ist $[Z, X \times Y] \to [Z, X] \times [Z, Y] : [f] \mapsto ([\mathrm{pr}_X \circ f], [\mathrm{pr}_Y \circ f])$ eine Bijektion?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das ist die universelle Eigenschaft des Produkts angewendet auf $Z' = [0, 1] \times Z$.

Ausführlich: Jede Homotopie $H : f \sim g : Z \to X \times Y$ induziert ein Paar (H_X, H_Y) von Homotopien $H_X : f_X \sim g_X : Z \to X$ und $H_Y : f_Y \sim g_Y : Z \to Y$. Dasselbe gilt umgekehrt. Die Bijektion der vorigen Frage induziert eine Bijektion auf den Quotienten modulo Homotopie.

$\overline{}$ 2

5E. Sind die Räume $X = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5$ und $Y = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$ homotopie-äquivalent?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Wir nutzen den homotopie-invarianten Funktor $[\mathbb{S}^2, -]$ und die Ergebnisse **5A–5D**:
$[\mathbb{S}^2, X] \cong [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2] \times [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^5] \cong \mathbb{Z} \times \{*\} \cong \mathbb{Z}$
$[\mathbb{S}^2, Y] \cong [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] \times [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4] \cong \{*\} \times \{*\} \cong \{*\}$

Erläuterung: Die Funktoren $[\mathbb{S}^1, -]$ und $[\mathbb{S}^3, -]$ hingegen taugen hier nicht zur Unterscheidung, ebensowenig $[-, \mathbb{S}^1]$. Weitere Varianten $[\mathbb{S}^k, -]$ und $[-, \mathbb{S}^k]$ sind meist schwierig zu berechnen.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 6. *Funktoren und Retrakte* (8 Punkte)

Ein *Retrakt* $f : X \to Y$ ist ein linksinvertierbarer Morphismus (in der jeweiligen Kategorie).

6A. Überführt jeder Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ Retrakte in Retrakte?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Gegeben sei $(f, g) : X \rightleftarrows Y$, also $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Funktorialität garantiert $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, also $(F(f), F(g)) : F(X) \rightleftarrows F(Y)$.

Erläuterung: Jeder Funktor erhält Retrakte. Ebenso: Jeder Funktor erhält Isomorphismen. Sie kennen dies aus nahezu allen Anwendungen der Vorlesung, Übung und (Schein-)Klausuren. Für Einbettungen allein gilt nichts dergleichen, wie die folgende Aufgabe kontrastiert.

2

6B. Überführt jeder Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ Einbettungen in Injektionen?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Gegenbeispiel zu π_0: Die Inklusion $f : \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Einbettung, aber $\pi_0(f) : \pi_0(\mathbb{S}^0) \to \pi_0(\mathbb{R}) = \{*\}$ ist keine Injektion, da $\pi_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{S}^0$.

Gegenbeispiel zu $[\mathbb{S}^1, -]$: Die Inklusion $g : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist eine Einbettung, aber $[\mathbb{S}^1, g] : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}] = \{*\}$ ist keine Injektion, da $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ dank **5A**.

Dasselbe gilt singgemäß für den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Set}$ und viele weitere Beispiele.

2

6C. Existiert ein Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ mit $F(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ und $F(\mathbb{C}) = \{0\}$?

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Hindernis:

In $\mathtt{Top}$ haben wir $(f, g) : \mathbb{R} \rightleftarrows \mathbb{C}$, aber in $\mathtt{Set}$ gilt nicht $\mathbb{Z} \rightleftarrows \{0\}$. Somit ist $(F(f), F(g)) : F(\mathbb{R}) \rightleftarrows F(\mathbb{C})$ unmöglich, also kann es F nicht geben.

Erläuterung: Ein Funktor muss nicht nur Objekte auf Objekte abbilden, sondern auch Morphismen auf Morphismen. Letzteres fehlt hier, und kann wie gesehen nicht ergänzt werden: Hier ist die vorliegende Retraktion ein Hindernis für den erhofften Funktor. In der nächsten Frage ist umgekehrt der vorliegende Funktor ein Hindernis für die Existenz einer Retraktion.

2

6D. Existiert ein Funktor $F : \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ mit $F(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ und $F(\mathbb{C}) = \{0\}$?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Der Funktor $F = [\mathbb{S}^1, -]$ leistet das Gewünschte. (Streng genommen beantworten $[-, \mathbb{S}^1]$ kontravariant und $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Set}$ mit Fußpunkt nicht ganz die Frage, sind aber akzeptabel.)
Erläuterung: Hier müssen Sie etwas in Ihrem Beispielfundus kramen, jedoch nicht besonders tief: Die extrem nützlichen Funktoren $[\mathbb{S}^k, -]$ kennen Sie gut aus Vorlesung und Übungen. Es gilt $F(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ dank **5A**. Zudem gilt $F(\mathbb{C}) = \{0\}$, denn $\mathbb{C}$ ist zusammenziehbar. Zusammen mit **6A** folgt: $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist kein Retrakt, ebensowenig $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$. Hieraus folgt der Brouwersche Fixpunktsatz, wie Sie wissen, und weitere bemerkenswerte Anwendungen.

2

Aufgabe 7. *Stetige Multiplikation und Fundamentalgruppe* (11 Punkte)

7A. Ist auf $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrixmultiplikation $(A, B) \mapsto A \cdot B$ stetig?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Die Abbildung $(A, B) \mapsto C = A \cdot B$ ist koordinatenweise eine Bilinearform in A und B: Explizit ausgeschrieben gilt $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$. Das zeigt insbesondere die Stetigkeit.

Erläuterung: Diese sehr einfache Frage soll auf den folgenden Aufgabenteil einstimmen. Die Anwesenheit einer stetigen Multiplikation hat Konsequenzen für die Fundamentalgruppe. 1

7B. Ist auf $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrixinversion $A \mapsto A^{-1}$ stetig?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:
Cramer: Die Abbildung $A \mapsto A^{-1}$ ist koordinatenweise rational in A mit Nenner $\det A \neq 0$.
Ausführlich: Es gilt $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$; hierbei besteht $A = (a_1, \dots, a_n)$ aus Spaltenvektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$, und die adjunkte Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{ij}$ erfüllt $\tilde{a}_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
Warnung: Der Gauß–Algorithmus hilft nicht direkt: Die Wahl der Pivotposition ist hochgradig unstetig! Auf $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ kann diese Wahl jedoch *lokal konstant* getroffen werden. Lokal zeigt dies Stetigkeit, denn jede der Umformungsmatrizen hängt stetig ab von den Koordinaten von A.
Alternativ: Lokal gelingt die Inversion auch mit der geometrischen Reihe und ist somit stetig. 1

7C. Sei $(X, 1)$ ein topologischer Raum X zusammen mit einem Fußpunkt $1 \in X$. Hierin sei $\varepsilon : ([0, 1], \{0, 1\}) \to (X, 1)$ die konstante Schleife und $\alpha : ([0, 1], \{0, 1\}) \to (X, 1)$ eine beliebige Schleife. Konstruieren Sie explizit eine Homotopie $H : \alpha * \varepsilon \sim \varepsilon * \alpha$.

Konstruktion:

$$H : [0,1]^2 \to X : (s,t) \mapsto \begin{cases} \alpha(2t-s) & \text{für } \frac{s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erläuterung: Machen Sie sich eine Skizze, wie immer, das hilft! Sie kennen diese und ähnlich grundlegende Konstruktionen zur Fundamentalgruppe aus Vorlesung und Übung. 2

7D. Wir betrachten Tripel $(X, \cdot, 1)$ bestehend aus einem topologischen Raum und einer stetigen Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ mit neutralem Element 1, also $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in X$. Gegeben sei $H : \alpha * \varepsilon \sim \varepsilon * \alpha$ und $K : \varepsilon * \beta \sim \beta * \varepsilon$. Konstruieren Sie hieraus $L : \alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

Konstruktion mit Begründung:

Wir erhalten $L = H \cdot K : \alpha * \beta \sim \beta * \alpha$ durch punktweise Multiplikation.

Es gilt $L(0, -) = (\alpha * e) \cdot (e * \beta) = \alpha * \beta$ und $L(1, -) = (e * \alpha) \cdot (\beta * e) = \beta * \alpha$.

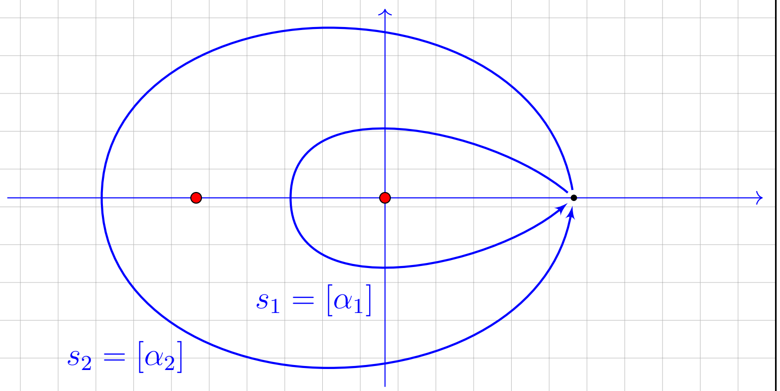
Für $t \in \{0, 1\}$ gilt $L(s, t) = 1 \cdot 1 = 1$, die Endpunkte werden also festgehalten.

Erläuterung: Wie nutzen hier genau die angegebenen Voraussetzungen, wie maßgeschneidert: Die Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ ist stetig und das Element $1 \in X$ ist beidseitig neutral. Auch hier können Sie durch eine Skizze die Konstruktion visualisieren, das hilft! Insbesondere gilt: Zu jeder topologischen Gruppe $(G, \cdot, 1)$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, 1)$ abelsch! 3

7E. Sei $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1\}$ die zweifach gelochte Ebene. Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, 1)$ durch Erzeuger und Relationen; interpretieren Sie die Erzeuger in einer Skizze.

Präsentation und Skizze:

$\pi_1(X, 1) = \langle\, s_1, s_2 \mid - \,\rangle$



2

Existiert auf diesem Raum $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1\}$ eine stetige Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ mit neutralem Element 1?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, 1) = \langle\, s_1, s_2 \mid - \,\rangle$ ist nicht abelsch, da $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$.

Gäbe es eine stetige Multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ mit Neutralem $1 \in X$, so wäre die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, 1)$ abelsch nach **7D**. Das ist hier nicht der Fall.

Erläuterung: Auf $(\mathbb{C}, 1)$ und $(\mathbb{C}^*, 1)$ hingegen haben wir die übliche Multiplikation. Tatsächlich sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathbb{C}, 1) = \{1\}$ und $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$ abelsch. Bei zwei und mehr Löchern gilt dies nicht mehr! Insbesondere ist X keine topologische Gruppe. Die Kommutativität der Fundamentalgruppe ist ein elegantes und nützliches Kriterium.

2

Aufgabe 8. *Flächen und Quotienten* (12 Punkte)

8A. Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf $\mathbb{R}^3$ durch Rotation um die z–Achse mit Periode 2π. Schreiben Sie diesen Gruppenhomomorphismus $\rho : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}, \cdot) : \theta \mapsto \rho(\theta)$ als Matrix $\rho(\theta)$.

Rechtsdrehung $\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder Linksdrehung $\rho(-\theta)$

Erläuterung: Für die Drehung um eine beliebige Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit beliebigem Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ kennen Sie aus der Vorlesung die Rodrigues–Formel. Hier genügt uns der einfache Spezialfall. 1

Diese Gruppenoperation können wir auf die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ einschränken und definieren so die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{S}^2$: Genau dann gilt $s \sim s'$, wenn ein $\theta \in \mathbb{R}$ existiert mit $\rho(\theta)s = s'$.

Nennen Sie alle möglichen Kardinalitäten der Äquivalenzklassen und je ein Beispiel.

Einpunktige Bahnen sind die Fixpunkte: Nordpol und Südpol.

Jede andere Bahn ist kreisförmig, etwa der Äquator, und somit überabzählbar.

Erläuterung: Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ entspricht 1–Parameter–Operationen, und das vorliegende klassische Beispiel ist besonders schön und einfach. Aus der Vorlesung kennen Sie das noch faszinierendere Beispiel $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$. Dies führt zur Hopf–Faserung $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$. Dies sind erste Beispiele von *Lie–Gruppen* und Operationen auf *glatten Mannigfaltigkeiten*. 2

Nennen Sie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to P$ auf ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$,
die auf dem Quotienten eine stetige Bijektion $\bar{f} : \mathbb{S}^2/_\sim \xrightarrow{\sim} P$ induziert.

Hier genügen das Intervall $P = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{S}^2 \to P : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$.

Das stiftet eine Bijektion, denn auf jeder Höhe $x_3 \in [-1, 1]$ liegt genau eine Bahn.

Erläuterung: Auch dies ist ein berühmtes Beispiel der Geometrie, genauer: ein erstes Beispiel einer Momentabbildung in der symplektischen Geometrie; mehr hierzu erfahren Sie in der Differentialgeometrie. Hienieden in der Topologie ist es einfach nur ein schöner Quotient, der sich direkt geometrisch konkretisieren und anschaulich interpretieren lässt. 2

Ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus?

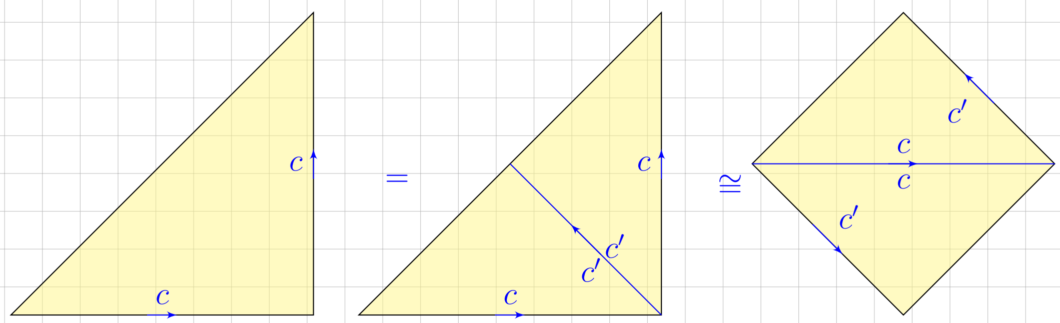
☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Dies folgt aus dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium **2J**.

Erläuterung: Die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist kompakt dank Heine–Borel, also auch jeder Quotient $\mathbb{S}^2/_\approx$. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist hausdorffsch, also auch der Teilraum $P \subset \mathbb{R}^n$. Dank dem Kompakt–Hausdorff–Kriterium **2J** ist $f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} P$ abgeschlossen, also $\bar{f}$ ein Homöomorphismus. 1

8B. Wir betrachten $\mathbb{D}^2/\langle\, ccd \,\rangle$. Welche Fläche $\mathbb{D}^2/\langle\, ccd \,\rangle \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$ entsteht so?

Dies ist das Möbiusband $F^{-}_{0,1}$. Am einfachsten sieht man dies durch Schneiden und Kleben:



2

8C. Wir betrachten das Quadrat $Q = [-1,+1]^2$ mit $(x,-1) \sim (x,+1)$ und $(-1,y) \sim (+1,y)$. Schreiben Sie diese Identifizierung $Q/_{\sim} \cong \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ als ein Flächenwort w.

Wir markieren zu identifizierende Seiten und lesen zyklisch das Wort ab: $w = aba^{-1}b^{-1}$.

Erläuterung: Dieses grundlegende Beispiel kennen Sie gut aus Vorlesung und Übung.

1

Nennen Sie eine stetige Abbildung $q : Q \to T$ auf den Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, die auf dem Quotienten einen Homöomorphismus $\bar{q} : Q/_{\sim} \xrightarrow{\sim} T$ induziert.

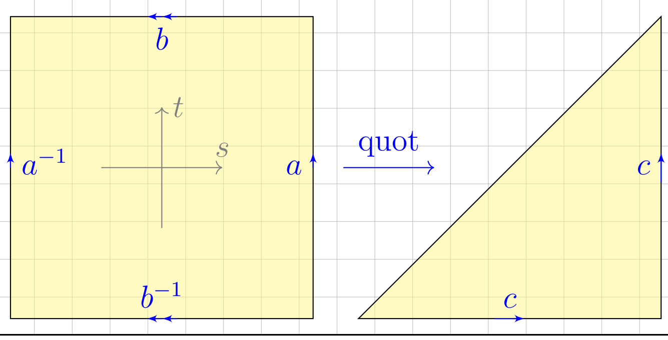
Es genügt $q : Q \to T : (s,t) \mapsto (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t})$.

Erläuterung: Dieses grundlegende Beispiel kennen Sie gut aus Vorlesung und Übung.

1

Auf dem Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ werde die Äquivalenzrelation $\approx$ erzeugt durch $(x,y) \approx (y,x)$. Schreiben Sie den Quotienten $T/_{\approx}$ als Flächenwort. Welche Fläche $T/_{\approx} \cong F^{\varepsilon}_{g,r}$ entsteht so?

Das Quadrat $Q/_{\approx} \cong \mathbb{D}^2/\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle$ falten wir entlang der Diagonalen und erhalten $\mathbb{D}^2/\langle ccd\rangle$, also das Möbiusband aus **8B**. Dem Flächenkalkül sei Dank; ohne ist es schwieriger zu sehen.



2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.