Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
/1	/12	/9	/6	/12	/10	/12	/10	/7	/79

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gibt es ein endliches Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit einem echt gemischten und zugleich strikten Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in [S_1] \times [S_2]$, $s_1 \notin S_1$, $s_2 \notin S_2$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2B. Hat jedes Spiel $g : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein gemischtes Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2C. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel und $x \in S_2$ sei niemals beste Antwort in $\bar{g}$. Wird x in allen Fällen strikt dominiert durch eine Strategie $y \in [S_2 \smallsetminus \{x\}]$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2D. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel. Kann man jede beliebige reine, *strikt* dominierte Strategie weglassen, ohne dadurch Nash–Gleichgewichte zu verlieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2E. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel. Kann man jede beliebige reine, *schwach* dominierte Strategie weglassen, ohne dadurch Nash–Gleichgewichte zu verlieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2F. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel mit genau einem Nash–Gleichgewicht. Hat dann das unendlich wiederholte Spiel $\Gamma = (1 - \delta) \prod_{n=0}^{\infty} \delta^n g$, geeignet diskontiert mit $\delta \in \,]0, 1[$, ebenfalls nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (9 Punkte)

3A. Gegeben ist das lineare Programm $x \geq 0$, $Ax + b \geq 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

$\Longleftrightarrow$

		v
u		

$\Longleftrightarrow$

		v
u		

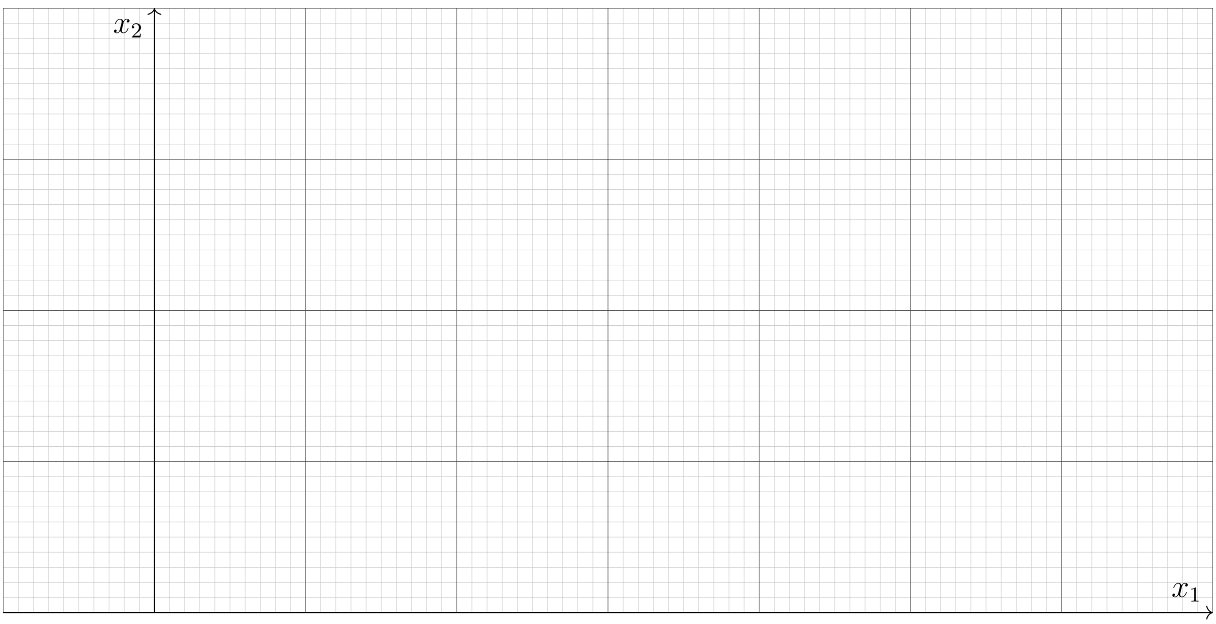
4

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

3

3B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{ \, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \; Ax + b \geq 0 \, \}$.



2

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (6 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1 1	0 0		0 0
s_2	0 0	2 2		0 0
$\dots$				0 0
s_n	0 0	0 0	0 0	n n

$$g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (k,k) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Alice spielt $s_A = \frac{6}{11}s_1 + \frac{3}{11}s_2 + \frac{2}{11}s_3$. Nennen Sie Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Bobs beste Antworten auf s_A:

Bob spielt $s_B = \frac{5}{10}s_1 + \frac{3}{10}s_2 + \frac{2}{10}s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Alice' beste Antworten auf s_B:

3

4B. Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$, ohne Beweis.

Gemischte Gleichgewichte:

3

Aufgabe 5. *Nash–Gleichgewichte* (12 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$.

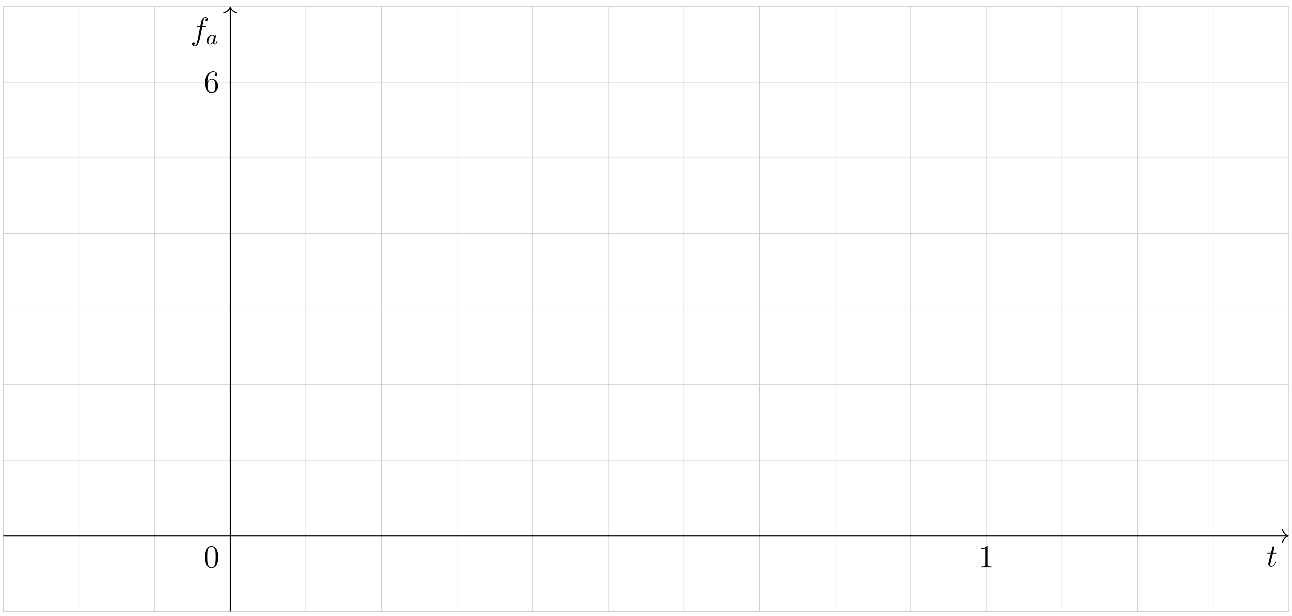
Alice ╲ Bob	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1 ╲ 3	3 ╲ 6	5 ╲ 5	4 ╲ 4
s_1	3 ╲ 5	3 ╲ 0	6 ╲ 1	2 ╲ 4

5A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

2

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs reinen Antworten $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S_B] = [s_2, s_3, s_4, s_5]$:

Intervall	$0 \le t <$		$< t <$		$< t \le 1$
Antwort					

4

5B. Eine von Bobs reinen Strategien $x \in S_B = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ ist nie beste Antwort. Nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [S_B \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

Antwort ohne Beweis:

2

5C. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

4

Aufgabe 6. *Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (10 Punkte)

Vor Alice liegen zwei Geldstapel: 4 € und 1 €. Alice kann akzeptieren, dann bekommt sie den größeren Stapel (4 €) und Bob den kleineren (1 €); oder sie kann an Bob übergeben, dabei werden beide Stapel verdoppelt. Bob kann akzeptieren, dann bekommt er den größeren Stapel (8 €) und Alice den kleineren (2 €); oder er kann an Alice übergeben, dabei werden beide Stapel wieder verdoppelt. Dies wiederholt sich: endgültig akzeptieren oder verdoppelt übergeben. Beim Stand von 64 € und 16 € bekommt Alice ungefragt den größeren Stapel, Bob den kleineren.

6A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

/2

6B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:

/2

Alice und Bob spielen wie zuvor, aber diesmal beginnt Alice mit zwei Stapeln zu 4 € und 2 €. Abwechselnd darf kann jede/r akzeptieren oder verdoppelt übergeben. Beim Stand von 64 € und 32 € bekommt Alice ungefragt den größeren Stapel, Bob den kleineren.

6C. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

2

6D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte und jeweils die zugehörige Auszahlung.

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:

4

Aufgabe 7. *Wiederholte Spiele* (12 Punkte)

Das Spiel Γ entsteht durch unendliche Wiederholung des Spiels $g\colon \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$,

Alice \ Bob	0	1
0	$(0,\ 0)$	$(5,\ -3)$
1	$(-2,\ 4)$	$(\alpha_1,\ \alpha_2)$

mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, wie üblich mit $\delta_1, \delta_2 \in [0,1[$ für $i \in \{1 = \text{Alice}, 2 = \text{Bob}\}$

und diskontierten Auszahlungen $u_i \,:\, \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto u_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g_i(x_n)$.

Alice und Bob vereinbaren das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$: Es wird abwechselnd 10 01 10 01 ... gespielt. Nach jeder anderen Vorgeschichte (Abweichung) wird 00 gespielt.

7A. Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf das Spiel Γ anwenden?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

7B. Unter welchen Bedingungen ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Bestimmen Sie hierzu vier Ungleichungen für $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$, die notwendig sind und gemeinsam auch hinreichend.

Vier Ungleichungen, ohne Herleitung:

4

7C. Wir betrachten nun speziell die konkreten Parameter $(\alpha_1, \alpha_2) = (5, 4)$:

Alice \ Bob	0	1
0	0 0	−3 5
1	4 −2	4 5

Bestimmen Sie alle reinen Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(g)$ des einfachen Spiels g.

Reine Gleichgewichte ohne Begründung:

2

Bestimmen Sie zudem alle echt gemischten Nash–Gleichgewichte des einfachen Spiels g.

Gemischte Gleichgewichte mit Begründung:

2

Für welche Diskontierungen $(\delta_1, \delta_2) \in [0, 1[^2$ ist das oben vereinbarte Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

Begründete Antwort:

2

Aufgabe 8. *Ein kontinuierliches Spiel* (10 Punkte)

Zwei Firmen produzieren identische Massenware. Firma 1 produziert die Menge $q_1 \in [0, 15]$ zu fixen Kosten $c_1 = 2$/Einheit, Firma 2 produziert die Menge $q_2 \in [0, 15]$ zu fixen Kosten $c_2 = 3$/Einheit. Der Marktpreis $p(q) = 16 - q$ pro Einheit hängt linear von der Gesamtmenge $q = q_1 + q_2$ ab. Die Nutzenfunktionen sind demnach $u_i : [0, 15]^2 \to \mathbb{R} : (q_1, q_2) \mapsto q_i(p(q_1 + q_2) - c_i)$.

8A. Berechnen und skizzieren Sie die beiden Reaktionsfunktionen/relationen
$F_1 = \{\ (q_1, q_2) \in [0, 15]^2 \mid q_1 \text{ ist beste Antwort auf } q_2\ \}$ und
$F_2 = \{\ (q_1, q_2) \in [0, 15]^2 \mid q_2 \text{ ist beste Antwort auf } q_1\ \}$.

Rechnung und Skizze:

$\overline{}$
5

8B. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels $u : [0, 15]^2 \to \mathbb{R}^2$.

Gleichgewichte:

2

8C. Firma 1 setzt $q_1 \in [0, 15]$ öffentlich fest, anschließend wählt Firma 2 ihre Produktionsmenge $q_2 \in [0, 15]$. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte dieses zweistufigen Spiels.

Gleichgewichte:

3

Aufgabe 9. *Strategisch abstimmen* (7 Punkte)

Alice, Bob und Chuck wollen über die drei Alternativen x, y, z abstimmen.
Ihre individuellen Präferenzen sind $A : x \succ y \succ z$ und $B : y \succ z \succ x$ und $C : z \succ x \succ y$.

Folgendes Duell–Verfahren wird angewendet: Zuerst wird durch Mehrheitswahl über y und z abgestimmt. Anschließend tritt der Gewinner gegen x an, erneut entscheidet die Mehrheit.

9A. Wie verläuft die Abstimmung, wenn jeder ehrlich nach seinen Präferenzen abstimmt?

Verlauf der beiden Abstimmungen:

/2

9B. Welche Spieler können durch einmalig unehrliche Stimmabgabe ihr Ergebnis verbessern?

Spieler und Abweichung:

/2

9C. Konstruieren Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in schwach dominanten Strategien.

Gleichgewichte:

/3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.