Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
/1	/12	/9	/6	/12	/10	/12	/10	/7	/79

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Dies war die zweite Klausur zur ersten Veranstaltung Spieltheorie. Lernen nach alten Klausuren wird gern genutzt, oft übertrieben, hier war es kaum möglich. Diese Klausur war sehr eng an Vorlesung und Übung angelehnt, so gesehen leicht. Die Fragen waren natürlich nicht identisch, die Herausforderung war also durchaus real, die erlernten Methoden auf einfache, neue Beispiele anzuwenden. Viele Punkte sind leicht, erfordern aber wie angekündigt Übung und Routine.

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderbare Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gibt es ein endliches Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit einem echt gemischten und zugleich strikten Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in [S_1] \times [S_2]$, $s_1 \notin S_1$, $s_2 \notin S_2$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Dank affin-linearer Fortsetzung von $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu $\bar{g} : [S_1] \times [S_2] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt:
Jede reine Strategie im Träger von s_1 bzw. s_2 ist eine beste Antwort auf s_2 bzw. s_1.
Das geforderte strikte Maximum kann hier also nicht vorliegen.

Erläuterung: Das ist eine Besonderheit affin-linearer Funktionen: Der Maximalwert wird in einer Ecke angenommen, strikte Maxima nur in Ecken. (Sie kennen allgemeinere Maximumprinzipien aus der Analysis, etwa für harmonische Funktionen oder holomorphe Funktionen.)

$\overline{}$ 2

2B. Hat jedes Spiel $g : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein gemischtes Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Es gibt viele naheliegende Gegenbeispiele, etwa $g(a, b) = (a, a)$ oder $g(a, b) = (a, 0)$.

Ausführlich: Offensichtlich gibt es kein (reines oder gemischtes) Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann leicht übertrumpft werden. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / WMaße zulassen, also $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) = 1$.

$\overline{}$ 2

2C. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel und $x \in S_2$ sei niemals beste Antwort in $\bar{g}$. Wird x in allen Fällen strikt dominiert durch eine Strategie $y \in [S_2 \setminus \{x\}]$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Das ist ein Satz der Vorlesung zur Rationalisierbarkeit:
Genau dann ist x strikt dominiert, wenn x nie beste Antwort ist.

$\overline{}$ 2

2D. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel. Kann man jede beliebige reine, *strikt* dominierte Strategie weglassen, ohne dadurch Nash–Gleichgewichte zu verlieren?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das ist ein Satz der Vorlesung zur Streichung strikt dominierter Strategien.

2

2E. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel. Kann man jede beliebige reine, *schwach* dominierte Strategie weglassen, ohne dadurch Nash–Gleichgewichte zu verlieren?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Es gibt viele naheliegende Gegenbeispiele, etwa folgendes:

A \ B	0	1
0	a, 1	b, 0
1	a, 0	b, 1

2

2F. Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Spiel mit genau einem Nash–Gleichgewicht. Hat dann das unendlich wiederholte Spiel $\Gamma = (1-\delta)\prod_{n=0}^{\infty} \delta^n g$, geeignet diskontiert mit $\delta \in \,]0,1[$, ebenfalls nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Das Gefangenendilemma g hat nur ein Gleichgewicht $(0,0)$. Hingegen hat Γ neben diesem Gleichgewicht „Spiele immer $(0,0)$“ noch weitere, etwa Grim-Trigger und allerlei Varianten.

Erläuterung: Das macht unendlich wiederholte Spiele so komplex und interessant!

2

Aufgabe 3. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (9 Punkte)

3A. Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	$-1/2$	$1/2$	3
y_2	$1/2$	$-5/2$	5
u	-1	2	9

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	$-2/5$	$-1/5$	4
x_2	$1/5$	$-2/5$	2
u	$-3/5$	$-4/5$	13

4

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

Der Punkt $x = (4, 2)^\intercal$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (0, 0)^\intercal \ge 0$, ist also primal zulässig.

Der Punkt $y = (3/5, 4/5)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0, 0) \le 0$, ist also dual zulässig.

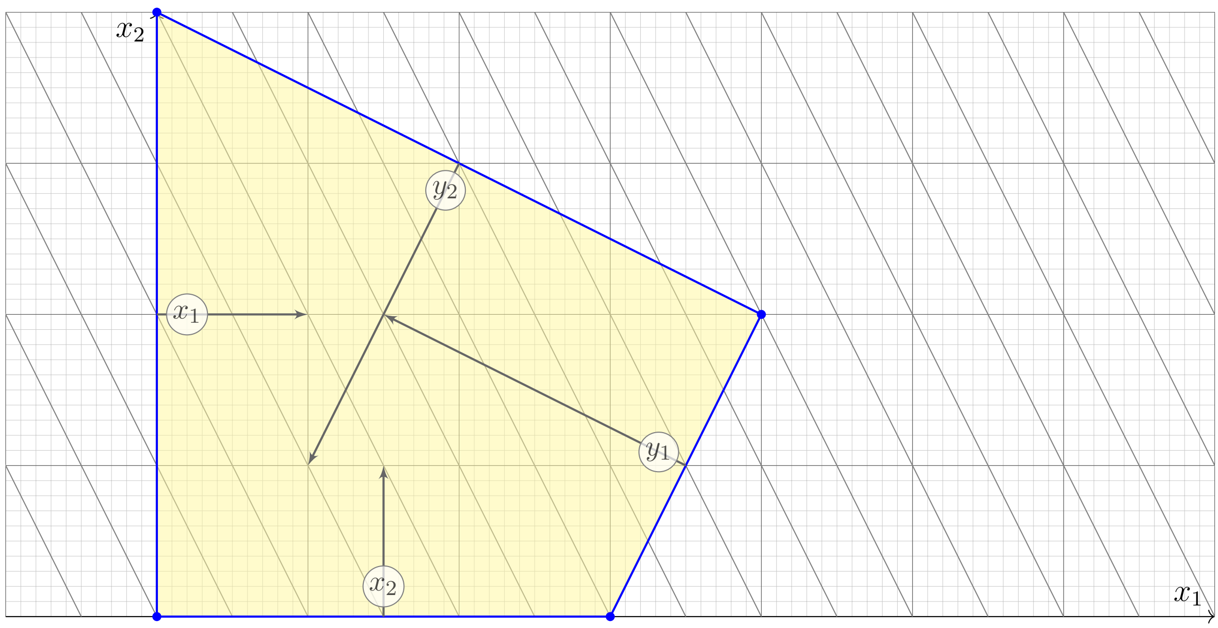
Untere Schranke $u(x) = cx + d = 13$ und obere Schranke $v(y) = yb + d = 13$ stimmen überein.

Erläuterung: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplex-Verfahren zugleich gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!* Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: Jeder Irrtum wird erkannt!

Zugegeben: Dieses lineare Programm ist winzig, um den Aufwand noch erträglich zu halten. Auch sind alle Ungleichungen hier straff, das ist eher etwas unrealistisch, aber na gut… Sie kennen etwas realistischere Beispiele aus der Vorlesung und den Übungen.

3

3B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.



2

Aufgabe 4. *Nash–Gleichgewichte* (6 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	...	s_n
s_1	1, 1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	2, 2		0, 0
...				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	n, n

$$g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (k,k) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

4A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Wir finden $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \,\}$.

Alice spielt $s_A = \frac{6}{11} s_1 + \frac{3}{11} s_2 + \frac{2}{11} s_3$. Nennen Sie Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Bobs beste Antworten auf s_A:

Bobs beste Antworten auf s_A sind $s_B \in [s_1, s_2, s_3]$.

Bob spielt $s_B = \frac{5}{10} s_1 + \frac{3}{10} s_2 + \frac{2}{10} s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Alice' beste Antworten auf s_B:

Alice' beste Antworten auf s_B sind $s_A \in [s_2, s_3]$. 3

4B. Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$, ohne Beweis.

Gemischte Gleichgewichte:

Die Gleichgewichte sind $s_A = s_B = \sum_{k \in X} \frac{1}{k} s_k \,/\, \sum_{k \in X} \frac{1}{k}$ für $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit $X \neq \emptyset$.

Erläuterung: Jedes dieser Strategiepaare (s_A, s_B) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte hier die Nennung der Lösung. Versuchen Sie die Ausführung als Übung! 3

Aufgabe 5. *Nash–Gleichgewichte* (12 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1, 3	3, 6	5, 5	4, 4
s_1	3, 5	3, 0	6, 1	2, 4

5A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

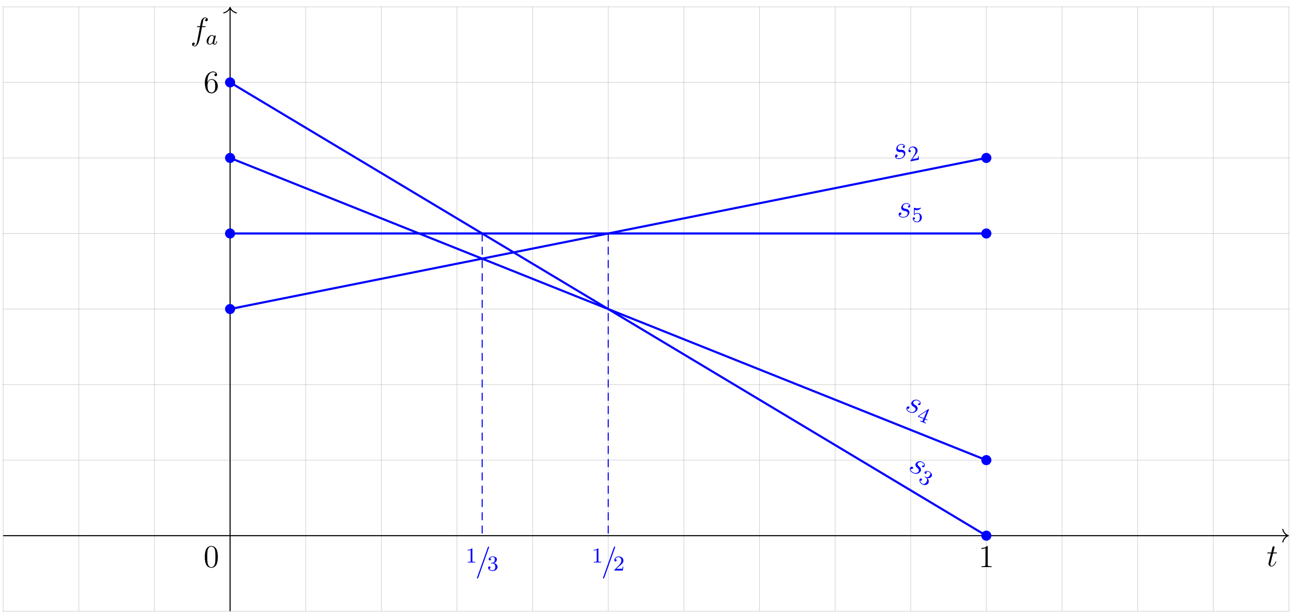
Reine Gleichgewichte:

Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\ (s_0, s_3),\ (s_1, s_2)\ \}$.

Erläuterung: Reine Gleichgewichte sind leicht zu finden. Wir suchen Spaltenmaxima für Alice und Zeilenmaxima für Bob. Wo beide zusammenfallen haben wir ein Nash–Gleichgewicht!

2

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0, 1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs reinen Antworten $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S_B] = [s_2, s_3, s_4, s_5]$:

Intervall	$0 \le t <$	$1/3$	$< t <$	$1/2$	$< t \le 1$
Antwort	$\{s_3\}$	$[s_3, s_5]$	$\{s_5\}$	$[s_5, s_2]$	$\{s_2\}$

4

5B. Eine von Bobs reinen Strategien $x \in S_B = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ ist nie beste Antwort.
Nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [S_B \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

Antwort ohne Beweis:

Der Skizze entnehmen wir, dass $x = s_4$ nie beste Antwort ist.

Die gemischte Strategie $y = \frac{2}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_5$ dominiert s_4 strikt. (Es gibt viele weitere Möglichkeiten.)

Erläuterung: Keine der reinen Strategien s_2, s_3, s_5 dominiert s_4 strikt; dies gelingt nur mit gemischten Strategien. Eine geeignete Konvexkombination, wie oben angegeben, finden wir graphisch oder rechnerisch. Diese Situation ist kein Zufall, aus der Vorlesung kennen Sie den allgemeinen Satz: Genau dann ist x strikt dominiert, wenn x nie beste Antwort ist.

2

5C. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte: Wir untersuchen $s_A = s_t$ für $t \in [0,1]$ und Bobs beste Antworten aus **5A**:

$0 \le t < \frac{1}{3}$: Bob spielt $s_B = s_3$. Darauf ist $s_A \in [s_0, s_1]$ Alice' beste Antwort.
Wir finden so die Nash–Gleichgewichte (s_t, s_3) für $0 \le t < \frac{1}{3}$.

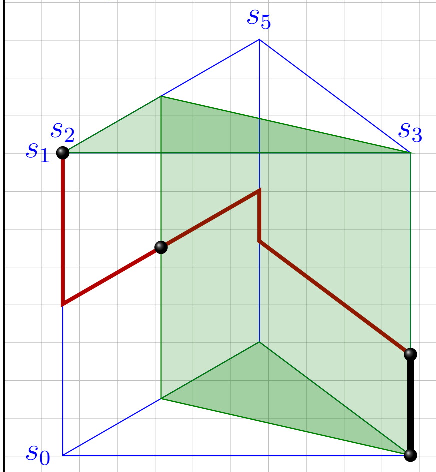
$t = \frac{1}{3}$: Bob spielt $s_B \in [s_3, s_5]$. Nur auf $s_B = s_3$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort.
Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_t, s_3) für $t = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$: Bob spielt $s_B = s_5$. Darauf ist $s_A = s_0$ Alice' beste Antwort.
Wir finden in diesem Intervall keine weiteren Nash–Gleichgewichte.

$t = \frac{1}{2}$: Bob spielt $s_B \in [s_2, s_5]$. Nur auf $s_B = \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_5$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort.
Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_t, s_B) für $t = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} < t \le 1$: Bob spielt $s_B = s_2$. Darauf ist $s_A = s_1$ Alice' beste Antwort.
Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_1, s_2).

Erläuterung: Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, genau wie die Definition von Nash–Gleichgewicht es verlangt. Hierzu ist jeweils eine kleine Rechnung notwendig. Als Graphik:



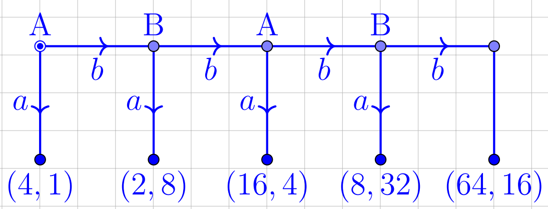
Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus Frage 5A. Bobs Strategie s_4 wird strikt dominiert und kommt daher in keinem Nash–Gleichgewicht vor. Spielt Bob die Strategie $s_B = p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_5 s_5$, dann erhält Alice die Auszahlung $p_2 + 3p_3 + 4p_5$, wenn sie s_0 spielt, und $3p_2 + 3p_3 + 2p_5$, wenn sie s_1 spielt. Also ist s_0 die beste Antwort falls $p_2 < p_5$, und s_1 ist die beste Antwort falls $p_2 > p_5$. Im Fall $p_2 = p_5$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 beste Antwort. So erhalten wir die Reaktionsfläche für Alice. Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet. 4

Aufgabe 6. *Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (10 Punkte)

Vor Alice liegen zwei Geldstapel: 4 € und 1 €. Alice kann akzeptieren, dann bekommt sie den größeren Stapel (4 €) und Bob den kleineren (1 €); oder sie kann an Bob übergeben, dabei werden beide Stapel verdoppelt. Bob kann akzeptieren, dann bekommt er den größeren Stapel (8 €) und Alice den kleineren (2 €); oder er kann an Alice übergeben, dabei werden beide Stapel wieder verdoppelt. Dies wiederholt sich: endgültig akzeptieren oder verdoppelt übergeben. Beim Stand von 64 € und 16 € bekommt Alice ungefragt den größeren Stapel, Bob den kleineren.

6A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

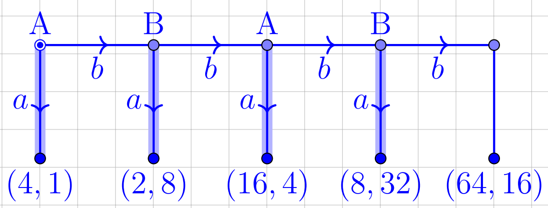


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, b^3, b^3a, b^4\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, b^3a, b^4\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß der Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, b^3\}$ sind abwechselnd Alice und Bob am Zug.

2

6B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:



Wir nutzen Rückwärtsinduktion und finden nur genau dieses teilspielperfekte Gleichgewicht: Egal wer am Zug ist, Alice oder Bob, jeder stimmt dem aktuellen Angebot zu. Der Satz von Zermelo garantiert, dass wir alle Gleichgewichte gefunden haben. Die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist demnach $(4, 1)$.

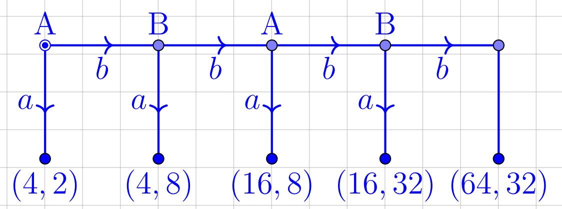
Erläuterung: Sie kennen solche Beispiele aus Vorlesung und Übung, vom Gefangenendilemma über diverse ähnliche soziale Dilemmata bis hin zu dynamischen Spielen wie diesem oder Varianten des Hundertfüßlerspiels. Wenn man es recht bedenkt, ist das Ergebnis doch immer etwas überraschend, beim ersten Kontakt wirkt es sogar paradox: Mit Kooperation könnten beide Spieler besser abschneiden. Doch hier ist Zusammenarbeit kein Gleichgewicht, auch können sie keine bindenden Absprachen treffen. Daher greift allein die individuelle Gewinnmaximierung, und Rückwärtsinduktion ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.

2

Alice und Bob spielen wie zuvor, aber diesmal beginnt Alice mit zwei Stapeln zu 4 € und 2 €. Abwechselnd darf kann jede/r akzeptieren oder verdoppelt übergeben. Beim Stand von 64 € und 32 € bekommt Alice ungefragt den größeren Stapel, Bob den kleineren.

6C. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

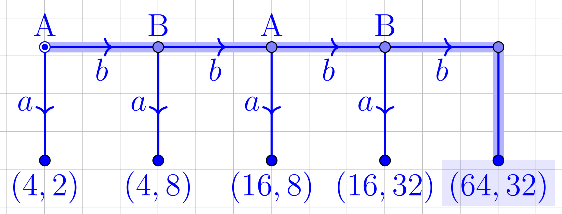
Spielbaum:

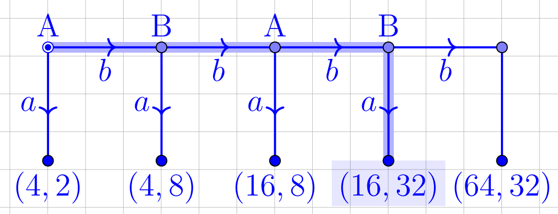


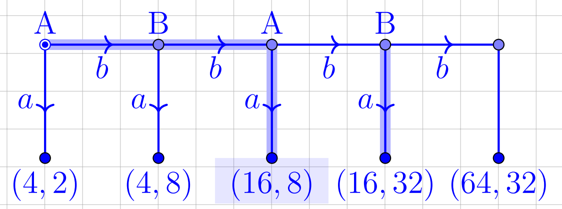
Formal ist dies genau der in **6A** erklärte Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, b^3, b^3a, b^4\}$, lediglich die Auszahlungen ändern sich wie angegeben gemäß Aufgabenstellung. Das hat Konsequenzen! 2

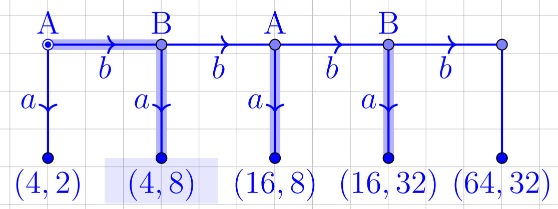
6D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte und jeweils die zugehörige Auszahlung.

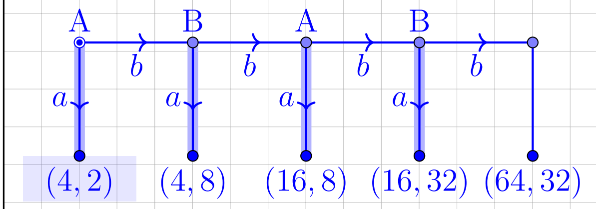
Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:











Erläuterung: Wir konstruieren Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion. Es gibt genau fünf teilspielperfekte Gleichgewichte, wie hier gezeigt. Alle liefern verschiedene Auszahlungen, so werden tatsächlich alle fünf Möglichkeiten als Gleichgewichtsauszahlungen realisiert.

Auch hier ist das Ergebnis bemerkenswert: Mit Kooperation können beide Spieler besser abschneiden, doch sie können keine bindenden Absprachen treffen. Hier wurde gerade der kritische Fall betrachtet; bitte versuchen Sie als Übung, alle Varianten aufzuschreiben.

4

Aufgabe 7. *Wiederholte Spiele* (12 Punkte)

Das Spiel Γ entsteht durch unendliche Wiederholung des Spiels $g\colon \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$,

Alice \ Bob	0	1
0	0, 0	5, -3
1	-2, 4	α_1, α_2

mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
wie üblich mit $\delta_1, \delta_2 \in [0,1[$
für $i \in \{1 = \text{Alice}, 2 = \text{Bob}\}$

und diskontierten Auszahlungen $u_i : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : x \mapsto u_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g_i(x_n)$.

Alice und Bob vereinbaren das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$: Es wird abwechselnd 10 01 10 01 ... gespielt. Nach jeder anderen Vorgeschichte (Abweichung) wird 00 gespielt.

7A. Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf das Spiel Γ anwenden?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Dank $0 \le \delta_i < 1$ sind die Auszahlungen $u_i(x) \in \mathbb{R}$ stetig in $x \in \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$.

2

7B. Unter welchen Bedingungen ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Bestimmen Sie hierzu vier Ungleichungen für $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$, die notwendig sind und gemeinsam auch hinreichend.

Vier Ungleichungen, ohne Herleitung: Wir nutzen das Prinzip der einmaligen Abweichung.

Das Paar 00 ist ein striktes Nash–Gleichgewicht des einfachen Spiels; Abweichung lohnt nicht.

Alice: $(-2 + 5\delta_1)/(1 - \delta_1^2) \ge 0$, also $\delta_1 \ge 2/5$, und $(5 - 2\delta_1)/(1 - \delta_1^2) \ge \alpha_1$

Bob: $(-3 + 4\delta_2)/(1 - \delta_2^2) \ge 0$, also $\delta_2 \ge 3/4$, und $(4 - 3\delta_2)/(1 - \delta_2^2) \ge \alpha_2$

Jede dieser vier Ungleichungen ist notwendig, damit Abweichungen nicht belohnt werden. Gemeinsam sind sie hinreichend für $s \in \mathrm{SPE}$, nach dem Prinzip der einmaligen Abweichung.

Erläuterung: Sie kennen diese Methode und die Ausführung an ähnlichen Beispielen aus der Vorlesung und den Übungen. Glücklicherweise haben wir eine präzise Notation und geeignete Techniken: Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

4

7C. Wir betrachten nun speziell die konkreten Parameter $(\alpha_1, \alpha_2) = (5, 4)$:

Alice \ Bob	0	1
0	0 \ 0	5 \ -3
1	-2 \ 4	5 \ 4

Bestimmen Sie alle reinen Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(g)$ des einfachen Spiels g.

Reine Gleichgewichte ohne Begründung:

Wir finden $\mathrm{NE}(g) = \{\ (0,0),\ (1,1)\ \}$

2

Bestimmen Sie zudem alle echt gemischten Nash–Gleichgewichte des einfachen Spiels g.

Gemischte Gleichgewichte mit Begründung:

Neben den beiden reinen Gleichgewichten gibt es keine echt gemischten Gleichgewichte.

Begründung: Angenommen, Alice spielt $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für $t \in \,]0,1[$.
Dann ist Bobs beste Antwort 0. Hierauf ist Alice beste Antwort 0.

2

Für welche Diskontierungen $(\delta_1, \delta_2) \in [0,1[^2$ ist das oben vereinbarte Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht?

Begründete Antwort:

Wir nutzen die vier Ungleichungen aus **7B**, hinreichend und notwendig für $(s_A, s_B) \in \mathrm{SPE}$:

Im vorliegenden Fall $(\alpha_1, \alpha_2) = (5, 4)$ finden wir $\delta_1 \in [2/5, 1[$ und $\delta_2 \in [3/4, 1[$.

Erläuterung: Das ist eine spezielle Variante von Nashs Folk Theorem. Wiederholte Spiele erlauben neue Gleichgewichte und damit manchmal höhere Auszahlungen als dies möglich wäre mit unabhängigen Einzelspielen (ohne Erinnerung, etwa durch anonyme Zulosung).

Fun fact: Im vorliegenden unendlichen Spiel wären beide Spieler besser dran, wenn sie das Strategiepaar 11 11 11 11 ... vereinbaren. Dieses ist sogar schwach dominant. Das oben vereinbarte Strategiepaar ist zwar auch ein Gleichgewicht, aber beide Auszahlungen sind geringer. Auch das kann also durchaus vorkommen.

2

Aufgabe 8. *Ein kontinuierliches Spiel* (10 Punkte)

Zwei Firmen produzieren identische Massenware. Firma 1 produziert die Menge $q_1 \in [0,15]$ zu fixen Kosten $c_1 = 2$/Einheit, Firma 2 produziert die Menge $q_2 \in [0,15]$ zu fixen Kosten $c_2 = 3$/Einheit. Der Marktpreis $p(q) = 16 - q$ pro Einheit hängt linear von der Gesamtmenge $q = q_1 + q_2$ ab. Die Nutzenfunktionen sind demnach $u_i : [0,15]^2 \to \mathbb{R} : (q_1, q_2) \mapsto q_i(p(q_1+q_2) - c_i)$.

8A. Berechnen und skizzieren Sie die beiden Reaktionsfunktionen/relationen
$F_1 = \{ (q_1, q_2) \in [0,15]^2 \mid q_1 \text{ ist beste Antwort auf } q_2 \}$ und
$F_2 = \{ (q_1, q_2) \in [0,15]^2 \mid q_2 \text{ ist beste Antwort auf } q_1 \}$.

Rechnung und Skizze:

Die Parabel $g_1(q_1) = q_1(14 - q_1 - q_2)$ hat ihr Maximum bei $q_1 = \frac{14-q_2}{2}$.
Dies ist unser Maximum falls $0 \le q_2 \le 14$; für $q_2 \ge 14$ liegt unser Maximum bei $q_1 = 0$.

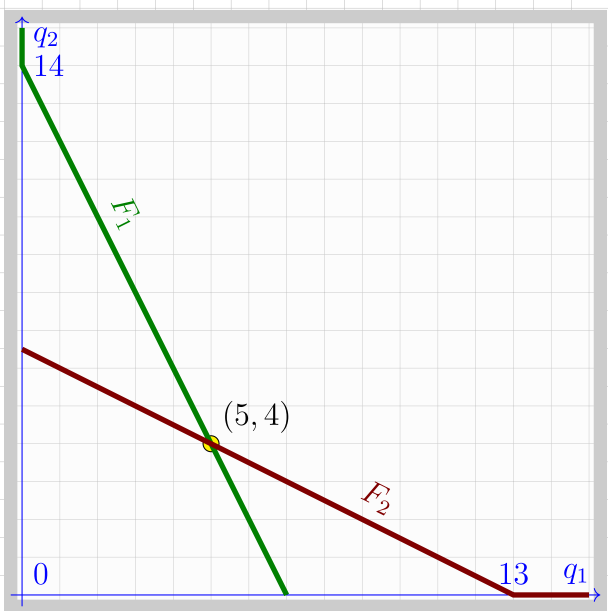
Die Parabel $g_2(q_2) = q_2(13 - q_1 - q_2)$ hat ihr Maximum bei $q_2 = \frac{13-q_1}{2}$.
Dies ist unser Maximum falls $0 \le q_1 \le 13$; für $q_1 \ge 13$ liegt unser Maximum bei $q_2 = 0$.

Erläuterung: In diesem besonders einfachen Fall sind die besten Antworten tatsächlich eindeutig. Wir erhalten also nicht bloß Reaktionsrelationen, sondern Reaktionsfunktionen.

$$f_1 : [0,15] \to [0,15] : q_2 \mapsto q_1 = \begin{cases} \frac{14-q_2}{2} & \text{für } q_2 \le 14, \\ 0 & \text{für } q_2 \ge 14. \end{cases}$$

$$f_2 : [0,15] \to [0,15] : q_1 \mapsto q_2 = \begin{cases} \frac{13-q_1}{2} & \text{für } q_1 \le 13, \\ 0 & \text{für } q_1 \ge 13. \end{cases}$$

Man beachte die Folgerungen $q_2 \ge 14 \Rightarrow q_1 = 0$ und $q_1 \ge 13 \Rightarrow q_2 = 0$. Der Preis $p(q_1+q_2) \le 0$ wird hier Null oder sogar negativ. Überproduktion ist zwar irrational, aber möglich.



5

8B. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels $u : [0, 15]^2 \to \mathbb{R}^2$.

Gleichgewichte:

Die Schnittmenge $\mathrm{NE}(u) = F_1 \cap F_2$ können wir graphisch ablesen oder ausrechnen.
Wir finden genau ein Gleichgewicht: $(q_1, q_2) = (5, 4)$

Erläuterung: Die Gewinne sind demnach $u(5, 4) = (25, 16)$ im Gleichgewicht.
Das ist ein extrem einfaches, klassisches Modell der Wirtschaftswissenschaften.
Sie kennen es gut aus den Übungen, als Illustration von Gleichgewichten.

2

8C. Firma 1 setzt $q_1 \in [0, 15]$ öffentlich fest, anschließend wählt Firma 2 ihre Produktionsmenge $q_2 \in [0, 15]$. Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte dieses zweistufigen Spiels.

Gleichgewichte:

Wir nutzen Rückwärtsinduktion: Firma 2 hat die oben berechnete Reaktionsfunktion

$$f_2 : [0, 15] \to [0, 15] : q_1 \mapsto q_2 = \begin{cases} \frac{13-q_1}{2} & \text{für } q_1 \le 13, \\ 0 & \text{für } q_1 \ge 13. \end{cases}$$

Das legt die Reaktion von Firma 2 in allen Fällen fest.

Firma 1 maximiert also $g(q_1) = q_1(14 - q_1 - \frac{13-q_1}{2}) = \frac{1}{2} q_1 (15 - q_1)$.

Das Maximum wird angenommen für die Produktionsmenge $q_1 = \frac{15}{2}$ und somit $q_2 = \frac{11}{4}$.

Erläuterung: Die öffentliche Bekanntgabe wird hier als bindend angesehen, ist also glaubhaft und keine leere Drohung, die später revidiert werden könnte. Für Firma 1 ist der Gewinn $225/8 > 25$ in diesem Falle etwas größer. Für Firma 2 hingegen ist der Gewinn $121/16 < 16$ deutlich kleiner. Da die Initiative hier von Firma 1 ausgeht, ist dieser Zug demnach vorteilhaft.

Fun fact: Wenn zuerst Firma 2 sich öffentlich bindet, so verschiebt sich das Gleichgewicht zu $(q_1, q_2) = (4, 6)$. Für Firma 2 ist der Gewinn $18 > 16$ in diesem Falle etwas größer. Für Firma 1 hingegen ist der Gewinn $16 < 25$ deutlich kleiner. Sie kennen dieses Phänomen von anderen Verhandlungssituationen als „Privileg des ersten Zugs“.

3

Aufgabe 9. *Strategisch abstimmen* (7 Punkte)

Alice, Bob und Chuck wollen über die drei Alternativen x, y, z abstimmen.
Ihre individuellen Präferenzen sind $A : x \succ y \succ z$ und $B : y \succ z \succ x$ und $C : z \succ x \succ y$.

Folgendes Duell–Verfahren wird angewendet: Zuerst wird durch Mehrheitswahl über y und z abgestimmt. Anschließend tritt der Gewinner gegen x an, erneut entscheidet die Mehrheit.

9A. Wie verläuft die Abstimmung, wenn jeder ehrlich nach seinen Präferenzen abstimmt?

Verlauf der beiden Abstimmungen:

Erste Runde $A : y \succ z$ und $B : y \succ z$ und $C : z \succ y$. Gewinner ist y.

Zweite Runde $A : x \succ y$ und $B : y \succ x$ und $C : x \succ y$. Gewinner ist x.

Erläuterung: Auf den ersten Blick scheint dieses Verfahren unverdächtig. Doch Sie wissen, dass es für drei (oder mehr) Alternativen kein perfektes (Aus)Wahlverfahren gibt: Dies ist Arrows Satz vom Diktator, hier genauer der Satz von Gibbard–Satterthwaite. Tatsächlich ist dieses Auswahlverfahren manipulierbar, wie wir nun zeigen.

/ 2

9B. Welche Spieler können durch einmalig unehrliche Stimmabgabe ihr Ergebnis verbessern?

Spieler und Abweichung:

Bob kann in der ersten Runde mit „$z \succ y$“ unehrlich abstimmen. Der Gewinner ist dann z und siegt in der zweiten Runde auch gegen x. Aus Sicht von Bob ist das eine Verbesserung!

Erläuterung: Dieses Auswahlverfahren ist somit manipulierbar. Sie kennen dieses Problem aus Vorlesung und Übung. Der Satz von Gibbard–Satterthwaite sagt bei drei (oder mehr) Alternativen: Jedes surjektive Auswahlverfahren ist entweder manipulierbar oder diktatorisch.

/ 2

9C. Konstruieren Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in schwach dominanten Strategien.

Gleichgewichte: (Am besten Sie skizzieren die folgenden Argumente in Baumform!)

Wir nutzen Rückwärtsinduktion und beginnen mit der zweiten Runde:
Im Duell x gegen y siegt x. (Schwach dominant ist hier das ehrliche Votum.)
Im Duell x gegen z siegt z. (Schwach dominant ist hier das ehrliche Votum.)

Erste Runde: Im Duell y gegen z siegt z. (Schwach dominant ist für Bob zu lügen, also „$z \succ y$“ zu stimmen. Hingegen wahrheitsgemäß stimmen Alice „$y \succ z$“ und Chuck „$z \succ y$“.)

Erläuterung: Die Voraussetzung „schwach dominante Strategien“ ist notwendig, um unsere Analyse zu vereinfachen und noch bizarrere Probleme zu vermeiden. Andernfalls entstehen weitere Gleichgewichte durch extreme Protestwahlen. Beispiel: Im Duell x gegen y könnten alle für y stimmen; das wäre ein Gleichgewicht, aber nicht in schwach dominanten Strategien.

/ 3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.