Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
/1	/12	/13	/11	/12	/12	/11	/6	/78

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2B. Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2C. Hat jedes unendliche Spiel $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2D. Sei Γ ein extensives Spiel mit vollständiger Information und endlich vielen Zuständen, in jedem sei nur ein Spieler am Zug. Hat Γ mindestens ein reines teilspielperfektes Gleichgewicht?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2E. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele. Angenommen, Γ_1 hat genau n Gleichgewichte und Γ_2 genau eins. Hat dann die Hintereinanderhängung $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ genau n Gleichgewichte?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2F. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele. Angenommen, Γ_1 hat genau ein Gleichgewicht und Γ_2 genau n. Hat dann die Hintereinanderhängung $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ genau n Gleichgewichte?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 3. *Nash–Gleichgewichte* (13 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1 / 1	0 / 0		0 / 0
s_2	0 / 0	1 / 1		0 / 0
$\dots$				0 / 0
s_n	0 / 0	0 / 0	0 / 0	1 / 1

$$g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

3A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Alice spielt $s_A = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Bobs beste Antworten auf s_A:

Bob spielt $s_B = \frac{2}{5} s_1 + \frac{2}{5} s_2 + \frac{1}{5} s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Alice' beste Antworten auf s_B: 3

3B. Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$, ohne Beweis.

Gemischte Gleichgewichte: 2

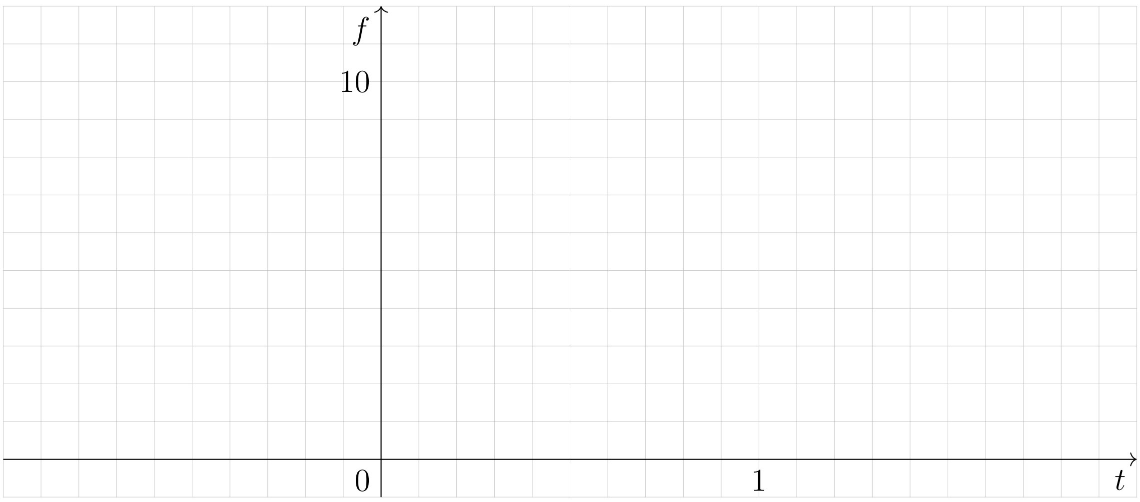
Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$.

Alice \ Bob	a	b	c
s_0	7 \ 5	7 \ 10	3 \ 8
s_1	1 \ 10	4 \ 0	9 \ 8

3C. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[a, b, c]$:

Intervall	$0 \le t <$		$< t <$		$< t \le 1$
Antwort					

4

3D. Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

4

Aufgabe 4. *Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (11 Punkte)

Alice und Bob erben bis zu 10 Mio Euro. Das Testament bestimmt folgendes Verfahren: Der Notar schlägt Alice die Auszahlung $(1,1)$ vor, in Mio Euro, der Rest geht an wohltätige Zwecke. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(0,3)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Alice $(2,2)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(1,4)$ vor, usw. Zustimmung entscheidet jeweils endgültig. Bei Ablehnung wird dem Ablehnenden eine Mio subtrahiert und dem anderen zwei Mio addiert. Das geht so weiter bis zum letzten Vorschlag $(5,5)$, der schließlich ungefragt entschieden wird.

4A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

2

4B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:

3

Versteigert werden 4 Euro. Alice und Bob bieten abwechselnd in ganzen Euro: Alice beginnt mit dem Startgebot $(1, 0)$, Bob kann auf $(1, 2)$ erhöhen, Alice auf $(3, 2)$ usw. bis $(7, 8)$ und zuletzt schließlich $(8, 8)$ Gleichstand. Wird nicht weiter erhöht, zahlen *beide* ihr letztes Gebot. Der Höchstbietende bekommt die 4 Euro, beim Gleichstand $(8, 8)$ bekommen beide 2 Euro.

4C. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

2

4D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:

4

Aufgabe 5. *Wiederholte Spiele* (12 Punkte)

Das Spiel Γ entsteht durch unendliche Wiederholung des Spiels $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$,

Alice \ Bob	0	1
0	0, 0	α, β
1	β, α	1, 1

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
wie üblich mit $0 \le \delta < 1$

und diskontierten Auszahlungen $u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$.

Wir untersuchen, ob das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, kurz $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$. Dabei ist die Strategie s_A bzw. s_B wie folgt definiert: Beginne im ersten Zug mit 1. Haben im letzten Zug beide dasselbe gespielt, spiele 1; andernfalls spiele 0.

5A. Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf das Spiel Γ anwenden?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

5B. Unter welchen Bedingungen ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Bestimmen Sie hierzu ein minimales System von Ungleichungen für α, β, δ, das notwendig und hinreichend ist.

Begründete Antwort:

4

5C. Wir betrachten nun speziell die konkreten Parameter $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$ und $\delta = 0.99$. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(\bar{g})$ des einfachen Spiels g, rein oder gemischt.

Begründete Antwort:

2

Welche Gesamtauszahlung $u_1 + u_2$ ist maximal erreichbar mit Gleichgewichten $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht.

Begründete Antwort:

2

5D. Wir betrachten schließlich $(\alpha, \beta) = (4, -1)$ und $\delta = 0.99$. Welche Gesamtauszahlung $u_1 + u_2$ ist maximal erreichbar mit teilspielperfekten Gleichgewichten $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht (ohne Beweis).

Begründete Antwort:

2

Aufgabe 6. *Korrelierte Gleichgewichte* (12 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g\colon \{U, V\} \times \{X, Y, Z\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suchen wir alle korrelierten Gleichgewichte:

Alice \ Bob	X	Y	Z
U	1 / p_{UX} / 4	2 / p_{UY} / 1	3 / p_{UZ} / 5
V	0 / p_{VX} / 0	2 / p_{VY} / 4	0 / p_{VZ} / 0

6A. Für die Wkten $p_{UX}, \dots, p_{VZ} \geq 0$ gilt wie immer $p_{UX} + \dots + p_{VZ} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

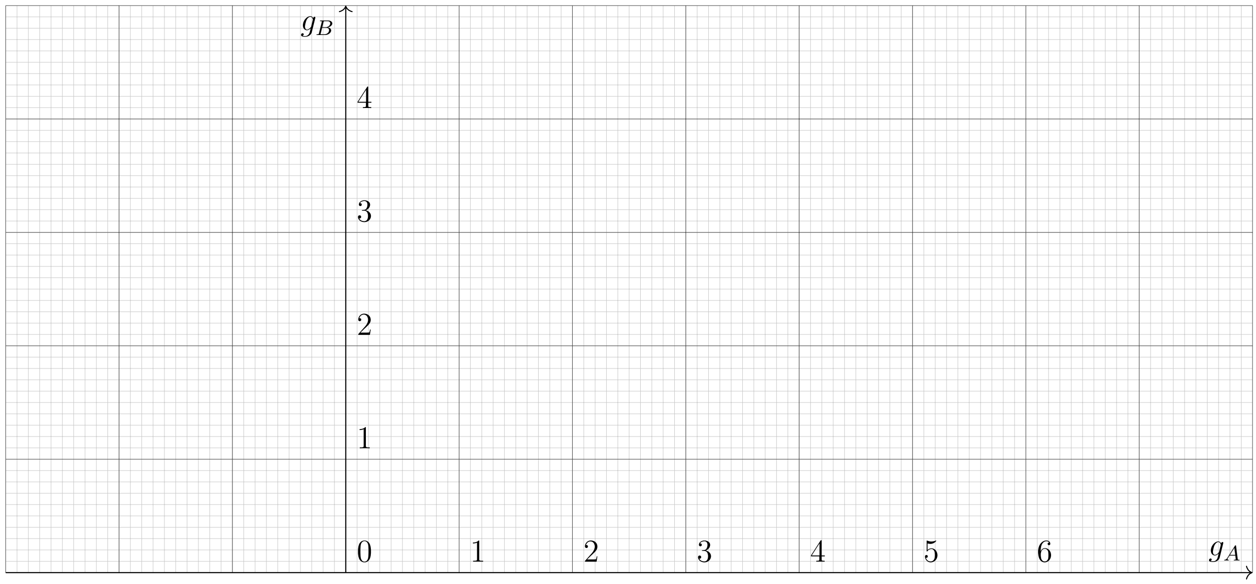
Alle Ungleichungen:

Lösen Sie dies zu einem äquivalenten, minimalen System von Un/Gleichungen:

Minimales System von Un/Gleichungen:

6

6B. Zeichnen Sie die Menge aller Auszahlungen $g(s) \in \mathbb{R}^2$, die durch korrelierte Gleichgewichte $s \in \mathrm{CE}(g)$ erreichbar sind.



2

6C. Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(g)$.

Reine Gleichgewichte:

Nennen Sie alle *gemischten* Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.
Hinweis: Die Wkten in den betroffenen Spalten / Zeilen müssen linear abhängig sein!

Gemischte Gleichgewichte:

4

Aufgabe 7. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (11 Punkte)

7A. Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie den letzten Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	2	1	1

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

$\Longleftrightarrow$

		v
u		

2

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

3

7B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.

2

7C. Existiert ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, sodass das primale LP und das duale LP beide erfüllbar sind, aber mindestens eines von beiden nicht lösbar?

Begründete Antwort:

2

7D. Wir betrachten nun folgende Familie mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	α	1	1

Wir haben oben den Fall $\alpha = 2$ untersucht.

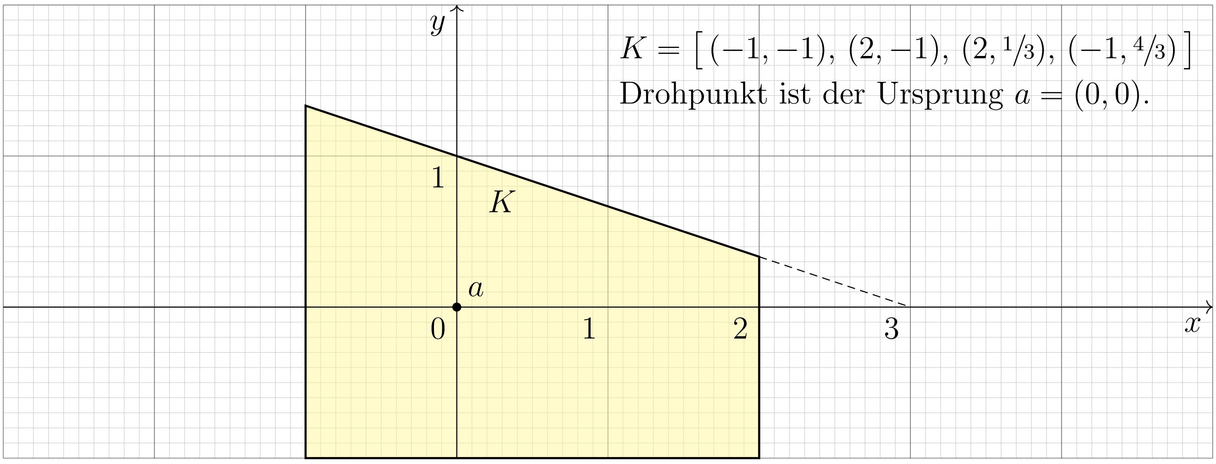
Nennen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ hat.

Begründete Antwort:

2

Aufgabe 8. *Verhandlungen – Haggle properly!* (6 Punkte)

Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem (K, a) mit $a \in K \subset \mathbb{R}^2$.



8A. Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung $M(K, a)$ nach Kalai–Smorodinsky.

Rechnung und Lösung:

/2

8B. Berechnen Sie die Nash–Verhandlungslösung $N(K, a)$.

Rechnung und Lösung:

/2

8C. Gibt es ein Verhandlungsproblem $(L, a) \supset (K, a)$ mit $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$?

Beispiel oder Gegenbeweis:

/2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.