Klausur zur Spieltheorie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
/1	/12	/13	/11	/12	/12	/11	/6	/78

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Dies war die erste Klausur zur ersten Veranstaltung Spieltheorie. Lernen nach alten Klausuren wird gern genutzt, oft übertrieben, hier war es unmöglich. Diese Klausur war sehr eng an Vorlesung und Übung angelehnt, so gesehen leicht. Die Fragen waren natürlich nicht identisch, die Herausforderung war also durchaus real, die erlernten Methoden auf einfache, neue Beispiele anzuwenden. Viele Punkte sind leicht, erfordern aber wie angekündigt Übung und Routine.

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderbare Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*, etwas größer aber bekannter ist *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash–Gleichgewichte.

A \ B	0	1
0	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1
1	$+1$ \ -1	-1 \ $+1$

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 \ 0	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1
Stein	$+1$ \ -1	0 \ 0	-1 \ $+1$
Papier	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1	0 \ 0

2

2B. Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Genau das garantiert Nashs Existenzsatz!

Ausführlich: Sei $g : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, also $S_1, \dots, S_n \neq \emptyset$ endlich, und $\bar{g} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien, wobei der Simplex $\bar{S}_i = [S_i]$ aus allen Konvexkombinationen der Menge S_i besteht. Dann besitzt das Spiel $\bar{g}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht, also $\mathrm{NE}(\bar{g}) \neq \emptyset$.

Fun fact: Generisch ist die Anzahl endlich und ungerade (für eine offene dichte Teilmenge solcher Spiele). Die Anzahl der Nash–Gleichgewichte kann exponentiell wachsen, siehe 3B.

2

2C. Hat jedes unendliche Spiel $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, etwa $g(s_1, s_2) = (s_1, s_2)$.

Ausführlich: Ebenso genügt $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$ falls $s_1 > s_2$ und $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$ falls $s_1 < s_2$ sowie $g(s_1, s_2) = (0, 0)$ falls $s_1 = s_2$. Offensichtlich gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann übertrumpft werden. Man sieht leicht, dass es auch keine gemischten Gleichgewichte gibt. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / WMaße zulassen, also $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$.

2

2D. Sei Γ ein extensives Spiel mit vollständiger Information und endlich vielen Zuständen, in jedem sei nur ein Spieler am Zug. Hat Γ mindestens ein reines teilspielperfektes Gleichgewicht?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das folgt per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo.

Erläuterung: Die im Satz erklärte Rückwärtsinduktion findet alle Gleichgewichte. Für die hier gefragte günstige Situation ist sie ein einfacher, aber wirkungsvoller Algorithmus zur Konstruktion aller Lösungen. Konkrete Beispiele finden Sie unten in Aufgabe 4 dieser Klausur.

2

2E. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele. Angenommen, Γ_1 hat genau n Gleichgewichte und Γ_2 genau eins. Hat dann die Hintereinanderhängung $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ genau n Gleichgewichte?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Das folgt per Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo.

Erläuterung: Wichtig ist bei diesem Argument, dass in jeder Kopie des Spiels Γ_2, egal zu welcher Vorgeschichte, dasselbe Gleichgewicht gespielt werden muss. Damit hat das erste Spiel Γ_1 keinen Einfluss auf den Fortgang, und es gilt $\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \mathrm{SPE}(\Gamma_2)$. Das steht im bemerkenswerten Gegensatz zur nachfolgenden Frage 2F.

2

2F. Seien Γ_1 und Γ_2 (extensive) endliche Spiele. Angenommen, Γ_1 hat genau ein Gleichgewicht und Γ_2 genau n. Hat dann die Hintereinanderhängung $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ genau n Gleichgewichte?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Wie in den Übungen kann man leicht Gegenbeispiele konstruieren. *Konkrete Illustration:*

$\Gamma_1 =$

A \ B	0	1
0	1 / 1	3 / 0
1	0 / 3	2 / 2

$\Gamma_2 =$

A \ B	0	1
0	1 / 1	0 / 0
1	0 / 0	3 / 3

Hier hat Γ_1 nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, Γ_2 hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky. Neben den offensichtlichen hat Γ noch weitere Gleichgewichte: Alice und Bob spielen 1 in Γ_2 genau dann, wenn 11 in Γ_1 gespielt wurde. Dasselbe gelingt für 01 und 10; die Belohnung aus Γ_2 macht diese Strategiepaare lukrativ.

2

Aufgabe 3. *Nash–Gleichgewichte* (13 Punkte)

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1 \ 1	0 \ 0		0 \ 0
s_2	0 \ 0	1 \ 1		0 \ 0
$\dots$				0 \ 0
s_n	0 \ 0	0 \ 0	0 \ 0	1 \ 1

$$g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

3A. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:

Wir sehen sofort die n Gleichgewichte (s_k, s_k) für $k = 1, 2, \dots, n$.

Erläuterung: Zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k. Damit ist alles klar. Insbesondere gibt es keine weiteren reinen Nash–Gleichgewichte als die hier angegebenen.

Alice spielt $s_A = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Bobs beste Antworten auf s_A:

Bobs beste Antworten auf s_A sind $s_B \in [s_1, s_2]$.

Bob spielt $s_B = \frac{2}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten als Teilmenge von $[S]$.

Alice' beste Antworten auf s_B:

Alice' beste Antworten auf s_B sind $s_A \in [s_1, s_2]$.

3

3B. Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$, ohne Beweis.

Gemischte Gleichgewichte:

Die Gleichgewichte sind $s_A = s_B = \frac{1}{|X|} \sum_{k \in X} s_k$ für $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit $X \neq \emptyset$.

Erläuterung: Jedes dieser Strategiepaare (s_A, s_B) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte hier die Nennung der Lösung. Versuchen Sie die Ausführung als Übung!

2

Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$.

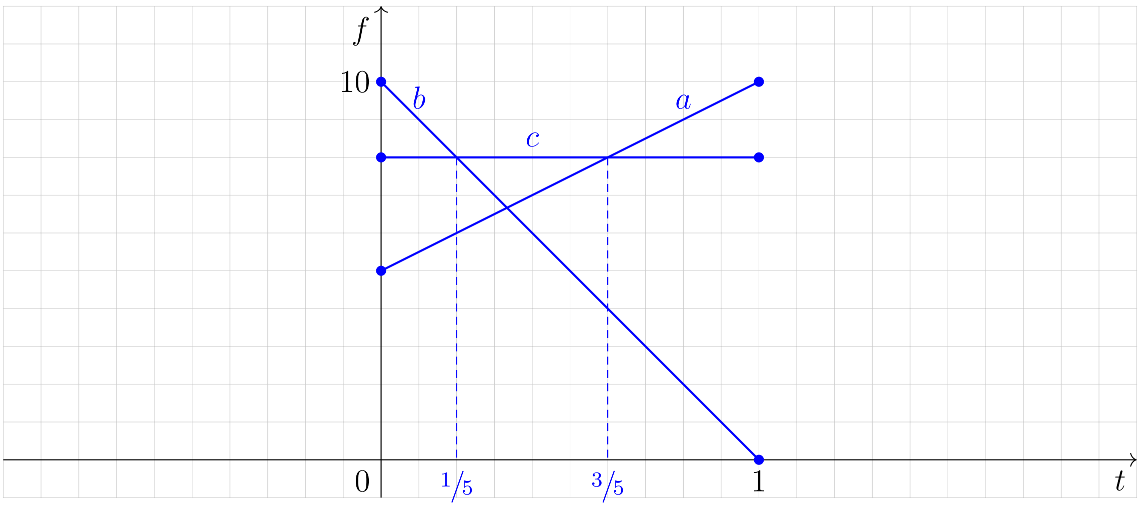
Alice \ Bob	a	b	c
s_0	5 / 7	10 / 7	8 / 3
s_1	10 / 1	0 / 4	8 / 9

3C. Nennen Sie zunächst alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$, ohne Beweis:

Reine Gleichgewichte:
Das einzige reine Gleichgewicht ist $(s_A, s_B) = (s_0, b)$, also $\mathrm{NE}(g) = \{\,(s_0, b)\,\}$.

Erläuterung: Reine Gleichgewichte sind leicht zu finden. Wir suchen Spaltenmaxima für Alice und Zeilenmaxima für Bob. Wo beide zusammenfallen haben wir ein Nash–Gleichgewicht!

Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0, 1]$.
Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.



Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten als Teilmenge von $[a, b, c]$:

Intervall	$0 \le t <$	$1/5$	$< t <$	$3/5$	$< t \le 1$
Antwort	$\{b\}$	$[b, c]$	$\{c\}$	$[a, c]$	$\{a\}$

4

3D. Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Gleichgewichte:

Neben (s_0, b) finden wir die Gleichgewichte $\left(\, s_{\frac{1}{5}},\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \,\right)$ und $\left(\, s_{\frac{3}{5}},\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \,\right)$.

Erläuterung: Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, genau wie die Definition von Nash–Gleichgewicht es verlangt. Hierzu ist jeweils eine kleine Rechnung notwendig. Aus der Übung kennen Sie die Klassifikation der 2×2–Spiele. Ebenso können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen.

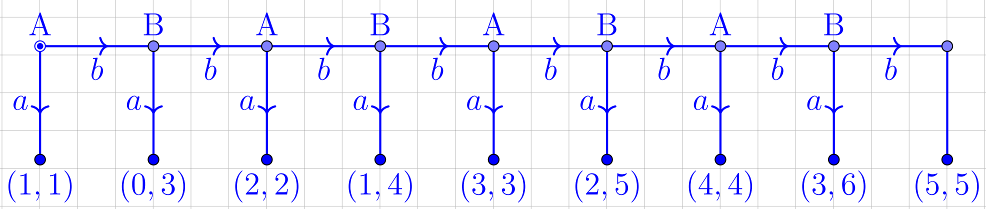
4

Aufgabe 4. *Vom Text zum Baum zu den Gleichgewichten* (11 Punkte)

Alice und Bob erben bis zu 10 Mio Euro. Das Testament bestimmt folgendes Verfahren: Der Notar schlägt Alice die Auszahlung $(1, 1)$ vor, in Mio Euro, der Rest geht an wohltätige Zwecke. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(0, 3)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Alice $(2, 2)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(1, 4)$ vor, usw. Zustimmung entscheidet jeweils endgültig. Bei Ablehnung wird dem Ablehnenden eine Mio subtrahiert und dem anderen zwei Mio addiert. Das geht so weiter bis zum letzten Vorschlag $(5, 5)$, der schließlich ungefragt entschieden wird.

4A. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

Spielbaum:

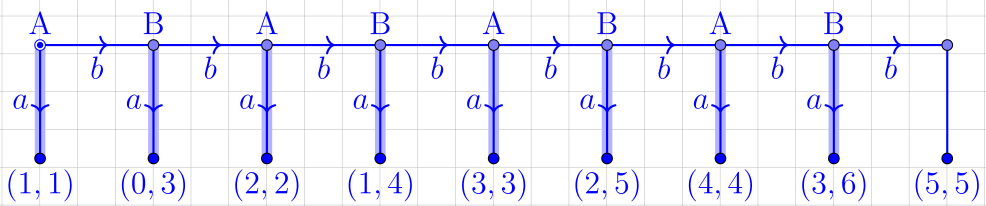


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Alice und Bob am Zug.

2

4B. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:



Wir nutzen Rückwärtsinduktion und finden dieses teilspielperfekte Gleichgewicht:
Egal wer am Zug ist, Alice oder Bob, jeder stimmt dem aktuellen Angebot zu.
Der Satz von Zermelo garantiert, dass wir alle Gleichgewichte gefunden haben.
Die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist demnach $(1, 1)$: für jeden nur eine Million.

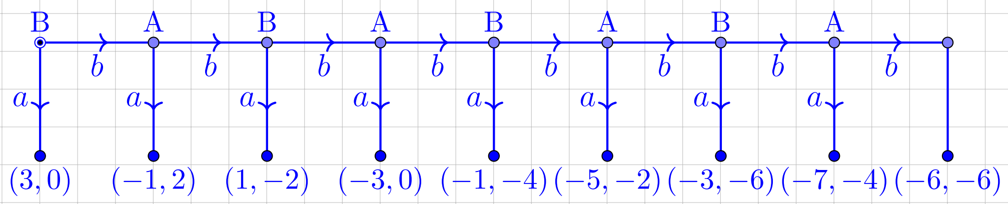
Erläuterung: Sie kennen solche Beispiele aus Vorlesung und Übung, vom Gefangenendilemma über diverse ähnliche soziale Dilemmata bis hin zu dynamischen Spielen wie diesem oder Varianten des Hundertfüßlerspiels. Wenn man es recht bedenkt, ist das Ergebnis doch immer etwas überraschend, beim ersten Kontakt wirkt es sogar paradox: Mit Kooperation könnten beide Spieler besser abschneiden. Doch hier ist Zusammenarbeit kein Gleichgewicht, auch können sie keine bindenden Absprachen treffen. Daher greift allein die individuelle Gewinnmaximierung, und Rückwärtsinduktion ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.

3

Versteigert werden 4 Euro. Alice und Bob bieten abwechselnd in ganzen Euro: Alice beginnt mit dem Startgebot $(1, 0)$, Bob kann auf $(1, 2)$ erhöhen, Alice auf $(3, 2)$ usw. bis $(7, 8)$ und zuletzt schließlich $(8, 8)$ Gleichstand. Wird nicht weiter erhöht, zahlen *beide* ihr letztes Gebot. Der Höchstbietende bekommt die 4 Euro, beim Gleichstand $(8, 8)$ bekommen beide 2 Euro.

4C. Zeichnen Sie den Spielbaum mit allen relevanten Informationen.

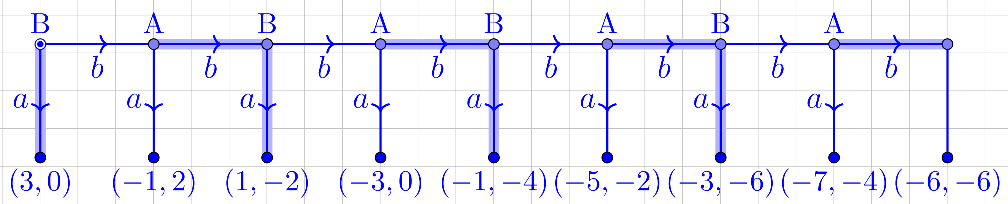
Spielbaum:

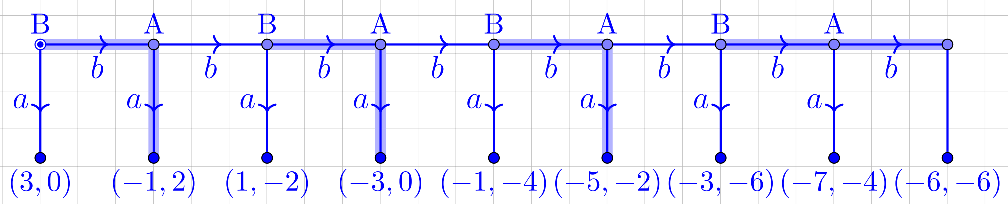


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Bob und Alice am Zug. 2

4D. Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}$ in einer geeigneten Schreibweise. Welche Auszahlungen sind demnach durch teilspielperfekte Gleichgewichte erreichbar?

Alle Gleichgewichte und ihre Auszahlungen:





Wir konstruieren Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion: Im letzten Zug entscheidet Alice immer für b. Im vorletzten Zug ist Bob indifferent zwischen a und b. Zu jeder dieser beiden Wahlen ergibt Rückwärtsinduktion dann eindeutig das angegebene Gleichgewicht.
Dies sind die einzigen teilspielperfekten Gleichgewichte, wie die Rückwärtsinduktion zeigt.
Die einzigen Gleichgewichtsauszahlung sind demnach $(3, 0)$ und $(-1, 2)$.

Erläuterung: Sie kennen dieses berühmte Beispiel aus der Vorlesung: Dies ist eine Variante der Versteigerung eines Euro, hier vereinfacht zu einem besonders übersichtlichen Baum. Es gibt genau zwei Gleichgewichte, beide sind von Anfang an entgegengesetzt und unvereinbar. Das erklärt das empirisch beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht. Leider sind beide Gleichgewichte vollkommen inkompatibel und führen zur beobachteten Bietspirale. 4

Aufgabe 5. *Wiederholte Spiele* (12 Punkte)

Das Spiel Γ entsteht durch unendliche Wiederholung des Spiels $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$,

Alice \ Bob	0	1
0	0 \ 0	α \ β
1	β \ α	1 \ 1

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
wie üblich mit $0 \le \delta < 1$

und diskontierten Auszahlungen $u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$.

Wir untersuchen, ob das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, kurz $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$. Dabei ist die Strategie s_A bzw. s_B wie folgt definiert: Beginne im ersten Zug mit 1. Haben im letzten Zug beide dasselbe gespielt, spiele 1; andernfalls spiele 0.

5A. Lässt sich das Prinzip der einmaligen Abweichung auf das Spiel Γ anwenden?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Dank $0 \le \delta < 1$ sind die Auszahlungen $u(x) \in \mathbb{R}^2$ stetig in $x \in \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$.

2

5B. Unter welchen Bedingungen ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht? Bestimmen Sie hierzu ein minimales System von Ungleichungen für α, β, δ, das notwendig und hinreichend ist.

Begründete Antwort: Wir nutzen das Prinzip der einmaligen Abweichung, siehe **5A**.

Für die Vorgeschichte $\emptyset$ oder $\dots 00$ oder $\dots 11$ gilt für Alice (und Bob entsprechend):
Fortsetzung 11 11 11 11 ... $u_1 = \mathrm{const} + \delta^n (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung 01 00 11 11 ... $u_1 = \mathrm{const} + \delta^n (\alpha + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $1 + \delta \ge \alpha$.

Für die Vorgeschichte $\dots 01$ oder $\dots 10$ gilt für Alice (und Bob entsprechend):
Fortsetzung 00 11 11 11 ... $u_1 = \mathrm{const} + \delta^n (0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung 10 00 11 11 ... $u_1 = \mathrm{const} + \delta^n (\beta + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $\delta \ge \beta$.

Jede dieser Ungleichungen ist notwendig, damit Abweichungen nicht belohnt werden.
Gemeinsam sind die Ungleichungen $1 + \delta \ge \alpha$ und $\delta \ge \beta$ hinreichend für $s \in \mathrm{SPE}$.

Erläuterung: Sie kennen diese Methode und die Ausführung an ähnlichen Beispielen aus der Vorlesung und den Übungen. Glücklicherweise haben wir eine präzise Notation und geeignete Techniken: Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

4

5C. Wir betrachten nun speziell die konkreten Parameter $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$ und $\delta = 0.99$. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(\bar{g})$ des einfachen Spiels g, rein oder gemischt.

Begründete Antwort:

Die Strategie 0 dominiert 1 strikt. Dies gilt für Alice und für Bob sobald $\alpha > 1$ und $\beta < 0$. Demnach ist das Strategiepaar $(0,0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht: $\mathrm{NE}(\bar{g}) = \{(0,0)\}$.

Erläuterung: Dieses Spiel entspricht dem Gefangenendilemma, bis auf schwache Isomorphie. Strikte Dominanz vereinfacht immer die Suche nach Gleichgewichten, hier hilft es extrem.

$\overline{2}$

Welche Gesamtauszahlung $u_1 + u_2$ ist maximal erreichbar mit Gleichgewichten $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht.

Begründete Antwort:

Das obige Strategiepaar (s_A, s_B) erreicht die Gesamtauszahlung $2/(1-\delta) = 200$. Wegen $1 + 1 > \alpha + \beta > 0 + 0$ ist dies maximal in jeder Runde, somit auch insgesamt.

Erläuterung: Das ist eine spezielle Variante von Nashs Folk Theorem. Wiederholte Spiele erlauben neue Gleichgewichte und damit sogar höhere Auszahlungen als dies möglich wäre mit unabhängigen Einzelspielen (ohne Erinnerung, etwa durch anonyme Zulosung).

$\overline{2}$

5D. Wir betrachten schließlich $(\alpha, \beta) = (4, -1)$ und $\delta = 0.99$. Welche Gesamtauszahlung $u_1 + u_2$ ist maximal erreichbar mit teilspielperfekten Gleichgewichten $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht (ohne Beweis).

Begründete Antwort:

Es wird abwechselnd 01 und 10 gespielt mit Gesamtauszahlung $(\alpha + \beta)/(1-\delta) = 300$. Als Gleichgewicht wird dies realisiert, indem jede Abweichung durch ewige Verdammnis $00\,00\,00\,\dots$ bestraft wird, also durch Rückfall auf das Nash–Gleichgewicht $00 \in \mathrm{NE}(\bar{g})$. Das ist die Grim-Trigger-Strategie $\mathrm{Grim}(01\,10\,01\,10\,\dots, 00\,00\,00\,00\,\dots)$ aus der Vorlesung.

Erläuterung: Unser oben untersuchtes Strategiepaar (s_A, s_B) ist nun kein Gleichgewicht mehr, denn kurzfristige Gewinnmitnahme wird nur eine Runde lang bestraft und ist somit lukrativ. Aus der Vorlesung kennen Sie jedoch die Strategie *Eine Hand wäscht die andere* oder allgemein $\mathrm{Grim}(a, z)$; hier wird Verrat durch ewige Verdammnis bestraft, und diese stärkere Drohung wiegt schwer genug: Die zugehörige Bedingung $\delta \geq -\beta/\alpha = 1/5$ ist hier erfüllt, also erhalten wir ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dies können Sie genauso leicht nachrechnen wie im obigen Beispiel. Nashs Folk Theorem macht hierzu noch allgemeinere Aussagen, wie in Vorlesung und Übungen ausgeführt und illustriert.

$\overline{2}$

Aufgabe 6. *Korrelierte Gleichgewichte* (12 Punkte)

Zu folgendem Spiel $g\colon \{U,V\} \times \{X,Y,Z\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suchen wir alle korrelierten Gleichgewichte:

Alice \ Bob	X	Y	Z
U	1; p_{UX}; 4	2; p_{UY}; 1	3; p_{UZ}; 5
V	0; p_{VX}; 0	2; p_{VY}; 4	0; p_{VZ}; 0

6A. Für die Wkten $p_{UX}, \dots, p_{VZ} \ge 0$ gilt wie immer $p_{UX} + \dots + p_{VZ} = 1$. Schreiben Sie alle weiteren Ungleichungen explizit aus, die die Definition für korrelierte Gleichgewichte verlangt.

Alle Ungleichungen: Die Definition verlangt die folgenden 8 Vergleiche:

$$1 \cdot p_{UX} + 2 \cdot p_{UY} + 3 \cdot p_{UZ} \ge 0 \cdot p_{UX} + 2 \cdot p_{UY} + 0 \cdot p_{UZ} \qquad \text{Das ist immer erfüllt.}$$
$$0 \cdot p_{VX} + 2 \cdot p_{VY} + 0 \cdot p_{VZ} \ge 1 \cdot p_{VX} + 2 \cdot p_{VY} + 3 \cdot p_{VZ} \qquad \Leftrightarrow p_{VX} = p_{VZ} = 0$$

$$4 \cdot p_{UX} + 0 \cdot p_{VX} \ge 1 \cdot p_{UX} + 4 \cdot p_{VX} \qquad \text{immer erfüllt, dank } p_{VX} = 0$$
$$4 \cdot p_{UX} + 0 \cdot p_{VX} \ge 5 \cdot p_{UX} + 0 \cdot p_{VX} \qquad \Leftrightarrow p_{UX} = 0$$

$$1 \cdot p_{UY} + 4 \cdot p_{VY} \ge 4 \cdot p_{UY} + 0 \cdot p_{VY} \qquad \text{folgt aus der nächsten Zeile}$$
$$1 \cdot p_{UY} + 4 \cdot p_{VY} \ge 5 \cdot p_{UY} + 0 \cdot p_{VY} \qquad \Leftrightarrow p_{VY} \ge p_{UY}$$

$$5 \cdot p_{UZ} + 0 \cdot p_{VZ} \ge 4 \cdot p_{UZ} + 0 \cdot p_{VZ} \qquad \text{immer erfüllt}$$
$$5 \cdot p_{UZ} + 0 \cdot p_{VZ} \ge 1 \cdot p_{UZ} + 4 \cdot p_{VZ} \qquad \text{immer erfüllt, dank } p_{VZ} = 0$$

Lösen Sie dies zu einem äquivalenten, minimalen System von Un/Gleichungen:

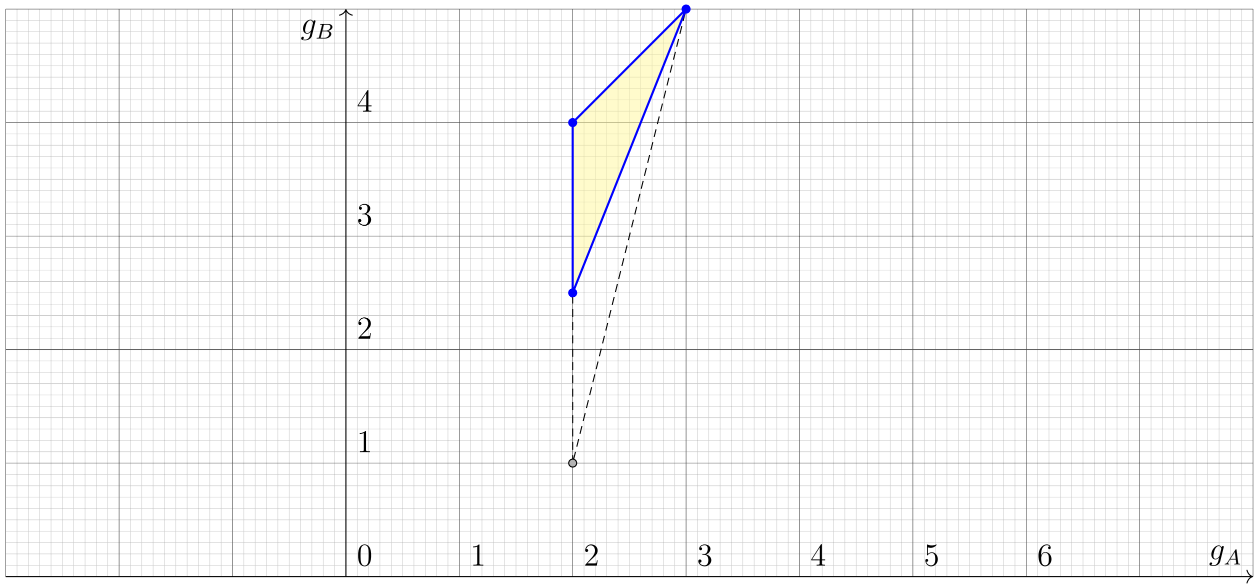
Minimales System von Un/Gleichungen:

Wir finden zusammenfassend das folgende, sehr einfache System von Un/Gleichungen:
$p_{UX} = 0$,
$p_{VX} = 0$,
$p_{VZ} = 0$,
$p_{VY} \ge p_{UY}$.

Erläuterung: In komplizierteren Fällen ist dies eine wunderbare Anwendung für das Simplex-Verfahren. Hier jedoch genügen bereits genaues Hinschauen und sorgfältige Buchführung.

6

6B. Zeichnen Sie die Menge aller Auszahlungen $g(s) \in \mathbb{R}^2$, die durch korrelierte Gleichgewichte $s \in \mathrm{CE}(g)$ erreichbar sind.



2

6C. Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(g)$.

Reine Gleichgewichte:

Wir finden $\mathrm{NE}(g) = \big\{(U, Z), (V, Y)\big\}$.

Nennen Sie alle *gemischten* Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Hinweis: Die Wkten in den betroffenen Spalten / Zeilen müssen linear abhängig sein!

Gemischte Gleichgewichte:

Über die beiden bereits angegebenen reinen Gleichgewichte (U, Z) und (V, Y) hinaus finden wir die gemischten Nash–Gleichgewichte $((1-t)U + tV, Y)$ für $1/2 \le t \le 1$.

Erläuterung: Das sind die korrelierten Gleichgewichte mit $p_{UY}p_{VZ} - p_{VY}p_{UZ} = 0$, also $p_{VY} = 0$ oder $p_{UZ} = 0$. Dies liefert genau die angegebenen Lösungen, eine interessante Teilmenge!

Sie kennen das aus Vorlesung und Übungen: Die Teilmenge $\mathrm{NE}(\bar{g}) \subseteq \mathrm{CE}(g)$ besteht aus den Gleichgewichten in Produktform, das heißt die betroffenene Spalten / Zeilen sind Vielfache voneinander. Die Determinante formuliert dies als algebraisch interessante Teilmenge.

Hier nutzen wir die Vorarbeit zu $\mathrm{CE}(g)$. Sie können die gemischten Nash–Gleichgewichte auch direkt ausrechnen, ohne zuerst die korrelierten zu finden. Versuchen Sie es als Übung!

4

Aufgabe 7. *Lineare Programme und Simplex-Verfahren* (11 Punkte)

7A. Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax+b \ge 0$, $u(x) = cx+d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix}A & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau. Führen Sie den letzten Basiswechsel zur optimalen Form aus:

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	2	1	1

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	-1	0	3
x_2	1	-1	2
y_3	-3	2	3
u	-1	-1	9

___ / 2

Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das erzielte Maximum u, mit Probe:

Zertifizierte Lösung mit Probe:

Der Punkt $x = (3, 2)^\intercal$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (0, 0, 3)^\intercal \ge 0$, ist also primal zulässig.

Der Punkt $y = (1, 1, 0)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0, 0) \le 0$, ist also dual zulässig.

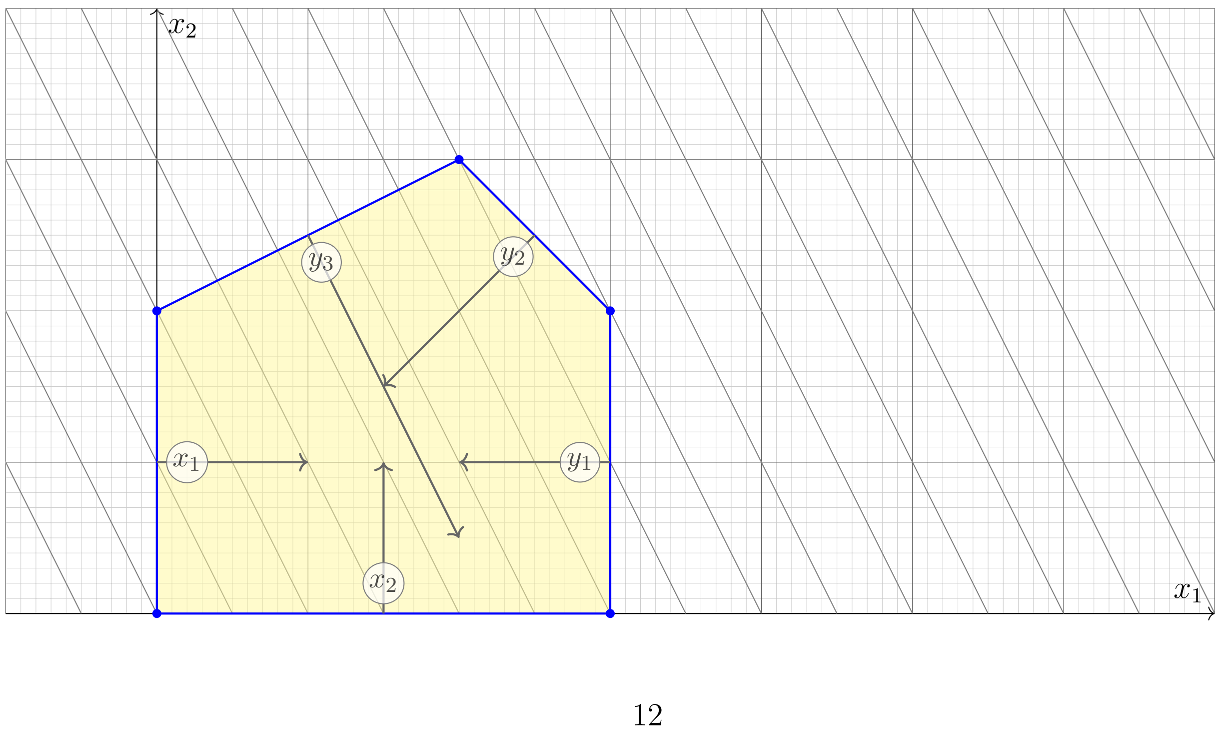
Untere Schranke $u(x) = cx + d = 9$ und obere Schranke $v(y) = yb + d = 9$ stimmen überein.

Erläuterung: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplex-Verfahren zugleich gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!* Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: Jeder Irrtum wird erkannt!

Ich habe oft dafür geworben, in dieser Klausur können Sie es stolz und glücklich vorführen.

___ / 3

7B. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.



___ / 2

7C. Existiert ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, sodass das primale LP und das duale LP beide erfüllbar sind, aber mindestens eines von beiden nicht lösbar?

Begründete Antwort:

Nein. Das folgt sofort aus dem schwachen Dualitätssatz.

Erläuterung: Erfüllt $x \geq 0$ das primale LP, $Ax + b \geq 0$, und y das duale LP, $yA + c \leq 0$, so gilt $u(x) = cx + d \leq (-yA)x + d = y(-Ax) + d \leq yb + d = v(x)$. Somit ist u nach oben beschränkt und nimmt ein Maximum an. Ebenso ist v nach unten beschränkt und nimmt ein Minimum an. Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

2

7D. Wir betrachten nun folgende Familie mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	α	1	1

Wir haben oben den Fall $\alpha = 2$ untersucht.

Nennen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ hat.

Begründete Antwort:

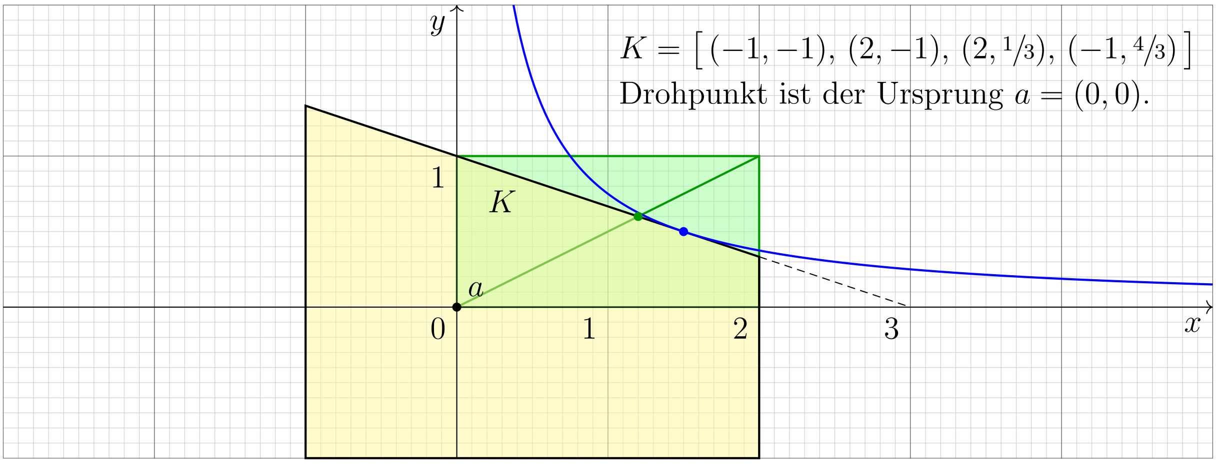
Der Skizze entnehmen wir $\alpha = 1$ und $\alpha = -1/2$. Weitere gibt es nicht.

Erläuterung: Aus den Übungen kennen Sie zahlreiche weitere Beispiele von linearen Programmen, die diverse Sonderfälle beleuchten. Die hier illustrierte Frage nach Mehrdeutigkeit liegt nahe und ist zudem graphisch leicht zu durchschauen. Algebraisch äußert sie sich ebenfalls im Simplex-Verfahren, versuchen Sie es als Übung!

2

Aufgabe 8. *Verhandlungen – Haggle properly!* (6 Punkte)

Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem (K, a) mit $a \in K \subset \mathbb{R}^2$.



8A. Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung $M(K, a)$ nach Kalai–Smorodinsky.

Rechnung und Lösung:

Für $z_i = \max \operatorname{pr}_i K_{\geq a}$ finden wir $(z_1, z_2) = (2, 1)$, wie oben in der Skizze gezeigt.
Der Schnittpunkt $[a, z] \cap \operatorname{Max} K$, von $y = x/2$ und $y = 1 - x/3$, ist $M(K, a) = (6/5, 3/5)$.

Erläuterung: In diesem Falle ist die Skizze besonders leicht, und eine ausreichend genaue Zeichnung ergänzt oder ersetzt die Rechnung. Ich gebe hier deshalb beide Wege an.

/2

8B. Berechnen Sie die Nash–Verhandlungslösung $N(K, a)$.

Rechnung und Lösung:

Wir maximieren die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ entlang der Geraden $y = 1 - x/3$.
Die Funktion $h(x) = x(1 - x/3) = x - x^2/3$ hat ihr Maximum in $x = 3/2$.
Dies ist somit das Maximum auf K. Die Nash–Lösung ist also $N(K, a) = (3/2, 1/2)$.

/2

8C. Gibt es ein Verhandlungsproblem $(L, a) \supset (K, a)$ mit $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$?

Beispiel oder Gegenbeweis:

Ja. Das minimale Beispiel ist $L = [K, (3, 0)]$, die konvexe Hülle von K und dem Punkt $(3, 0)$.

Erläuterung: Die Nash–Lösung $N(L, a) = N(K, a)$ ist invariant unter irrelevanten Alternativen. Die monotone Lösung $M(K, a)$ hingegen verschiebt sich zu $M(L, a)$. Dies können wir so einrichten, dass $M(L, a) = N(L, a) = N(K, a)$. Der relevante Teil der Lösung, $L_{\geq a} = [K_{\geq a}, (3, 0)]$, ist hier sogar eindeutig, was mir für eine Klausur sehr willkommen ist.

/2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.