

PRÄSENZÜBUNGEN 14: Mit Konfidenz in die Zukunft!

Für die Gruppenübungen am 6.–9. Februar 2018

1 Ja? Nein? Warum? Beantworten Sie folgende Fragen (so präzise wie üblich...).

- (a) Bestimmen Erwartungswert und Varianz jede Verteilung eindeutig?
- (b) Gibt es Binomialverteilungen $B(n, t)$ mit Erwartungswert $\mu = 20$ und Varianz $\sigma^2 = 16$? Gibt es solche Poisson-Verteilungen? und auch Normalverteilungen? Dieselbe Frage für $(\mu, \sigma^2) = (20, 17), (20, 18), (20, 20)$ und $(20, 24)$.
- (c) Nennen Sie je eine kontinuierliche Verteilung einer Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$, für die $\mathbf{P}(X \geq \mu) = \mathbf{P}(X \leq \mu) = 0.5$ gilt bzw. nicht gilt.
- (d) Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein für Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, welche nicht? Was gilt, wenn X und Y unabhängig sind?
- | | |
|---|--|
| (i) $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$ | (ii) $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ |
| (iii) $\mathbf{E}(\lambda X) = \lambda \mathbf{E}(X)$ | (iv) $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ |
| (v) $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) \cdot \mathbf{V}(Y)$ | (vi) $\mathbf{V}(\lambda X) = \lambda \mathbf{V}(X)$ |
| (vii) $\mathbf{V}(X \cdot Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ | (viii) $\mathbf{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbf{V}(X)$ |

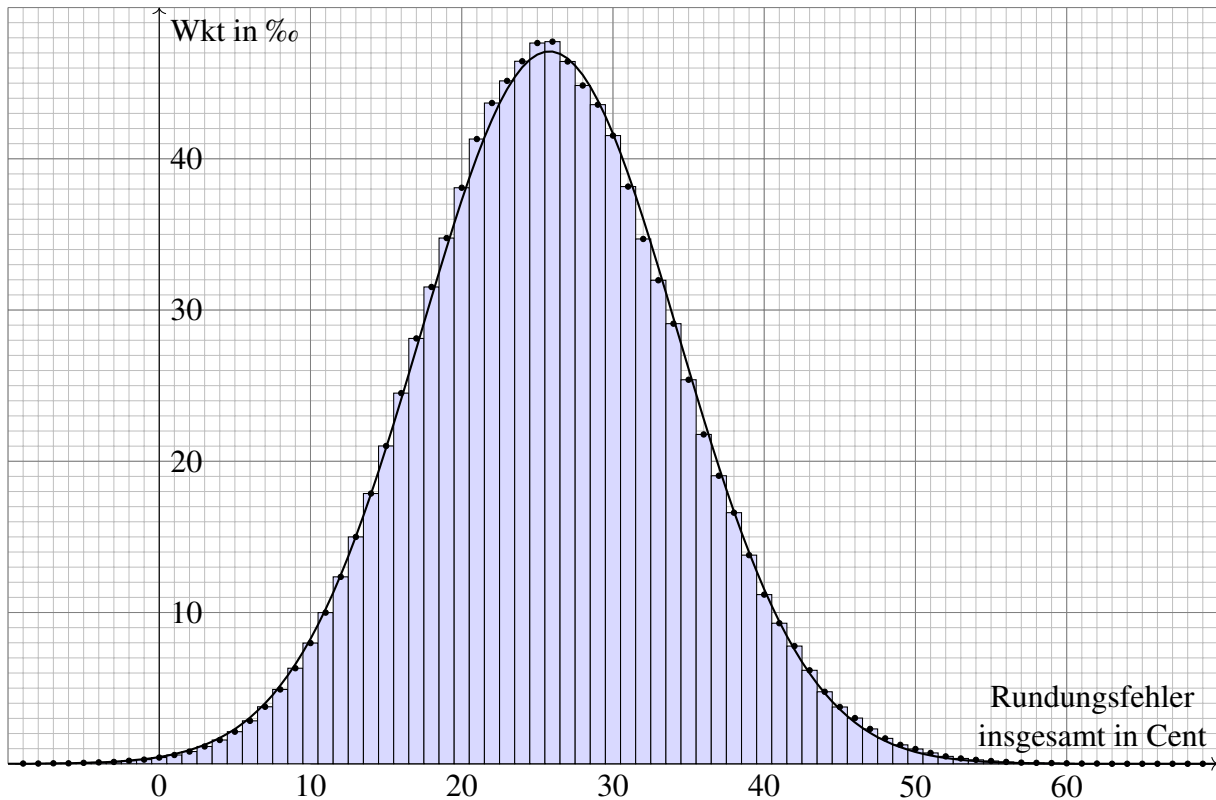
2 Back to the Spätzle machine. Ihr Super-Luxus-High-Tech-Spätzle-Gerät verkauft sich bestens. Seit Produkteinführung auf Blatt 11 haben 20000 Kunden ein Gerät zu je 1199€ gekauft. Zurück von Ihrer letzten Zeitreise planen Sie die *next generation*, zusätzlich zu Warp-Antrieb T_1 und Antimateriefilter T_2 tüfteln die Developmentnerds am dringend benötigten Fluxkompensator T_3 .

- (a) Die Marketingsfuzzies befragen derweil 200 Kunden, ob sie für den Fluxkompensator 300€ mehr bezahlen würden. Sie wollen den Gesamtanteil $p = K/20000$ aller Fluxkunden mit einer Genauigkeit von ± 0.03 bestimmen. Wie ist die Anzahl X der Fluxkunden unter den 200 Befragten verteilt? Welche Näherungen eignen sich? Mit welchem maximalen Fehler?
- (b) Angenommen, Sie haben insgesamt $K = 14000$ Fluxkunden. Wie viele der 200 Befragten müssten Fluxkunden sein, damit Ihre Schätzung von p die gewünschte Genauigkeit hat? Wie groß ist die Wkt., dass Sie mit der Befragung p in der gewünschten Genauigkeit schätzen?
- (c) Tatsächlich kennen Sie K gar nicht, aber Sie rechnen damit, dass sich der Gesamtanteil p der Fluxkunden zwischen 40% und 80% bewegt. Mit welcher Wkt. schätzen Sie p in der gewünschten Genauigkeit mindestens? Gehen Sie dazu wie in (b) vor.

3 Erstaunliche Rundungen. Beim Einkauf im Discounter macht Frau K (ardashian) folgende Überschlagsrechnung: Sie rundet jeden Betrag auf zehn Cent und summiert dann. Wie groß ist die Wkt, dass ihre Gesamtsumme bei zwanzig Artikeln nicht mehr als 30 Cent vom tatsächlichen Endbetrag abweicht? Dazu benötigen wir die Verteilung der Einzelpreise und damit der Rundungsfehler. Die folgende Verteilung basiert auf einer umfangreichen Auswertung von Kassenzetteln:

Endziffer im Preis	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rundungsfehler	0	-1	-2	-3	-4	5	4	3	2	1
Wahrscheinlichkeit	0.12	0.01	0.02	0.02	0.02	0.14	0.02	0.02	0.01	0.62

Nutzen Sie hierzu die Näherung durch die Normalverteilung. Berechnen Sie zur Kontrolle die allgemeine (aber oft allzu pessimistische) Fehlerschranke des zentralen Grenzwertsatzes, anschließend ignorieren Sie diese bitte: Die Näherung ist hier tatsächlich viel besser (siehe Graphik im Anhang). Was raten Sie Frau K für die Zukunft, um ihre Rundungen noch wesentlich zu verbessern?



Making of. Wie haben wir diese schöne Graphik erstellt? Die Wkten für die Rundungsfehler $-4, -3, \dots, 5$ eines einzelnen Artikels können wir trickreich als (Laurent-)Polynom kodieren:

$$p(x) = 0.02x^{-4} + 0.02x^{-3} + 0.02x^{-2} + 0.01x^{-1} \\ + 0.12x^0 + 0.62x^1 + 0.01x^2 + 0.02x^3 + 0.02x^4 + 0.14x^5$$

Die folgenden Werte erkennen Sie aus Ihren Rechnungen zur obigen Aufgabe wieder:

$$p_1(x) = x p'(x), \quad p_1(1) = 1.29, \quad p_2(x) = x p_1'(x), \quad p_2(1) = 5.25.$$

Die Wkten für die Rundungsfehler von zwei Artikeln sind die Koeffizienten des Quadrats p^2 : Warum? Die Wkten für die Rundungsfehler von n Artikeln sind demnach die Koeffizienten der n -ten Potenz p^n . Das kann man leicht berechnen (lassen). Die obige Graphik zeigt diese Wkten für $n = 20$ und zum Vergleich die zugehörige Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$. Die Näherung ist hier erstaunlich gut, obwohl 20 noch nicht sonderlich groß ist. Manchmal ist uns das Schicksal hold.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu habe ich hier wöchentlich unsere Kommentare aufgeschrieben als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Ich höre nun damit auf. Der Weg war weit und anstrengend, nicht nur für Sie als Teilnehmer, auch für Ihren Dozenten und das HM3-Team. Hat sich die Mühe gelohnt? Ich hoffe es! Die Zeit wird es weisen. Ich wünsche Ihnen im Namen des gesamten HM3-Teams viel Erfolg, zunächst in den anstehenden Klausuren, dann im weiteren Studium, vor allem aber im gesamten weiteren Leben.

Möge die Mathematik mit Ihnen sein!