PRÄSENZÜBUNGEN 13: Total normal verteilt

Für die Gruppenübungen am 30. Januar–2. Februar 2018

1 Vor uns liegt eine strahlende Zukunft! Wir öffnen ein Fass aus dem Klausurenendlager. Ein Atom Uran 238 zerfällt in der nächsten Stunde mit Wkt $2 \cdot 10^{-14}$. Eine Probe von 80mg enthält etwa $2 \cdot 10^{20}$ Atome. Wir nehmen die Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere keine Kettenreaktion. Sei X die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.

(a) Geben Sie die theoretisch exakte Verteilung $\mathbf{P}(X{=}k)$ an. Berechnen Sie hierzu Erwartungswert, Varianz und Streuung. Schreibweisen: $X \sim \mathbf{P}_X$ mit $\mathbf{P}_X(\{k\}) = \mathbf{P}(X{=}k)$.

(b) Durch welche Poisson–Verteilung lässt sich $\mathbf{P}_X$ approximieren?
Was ist der totale Abstand der zwei Verteilungen?

(c) Durch welche Normalverteilung lässt sich $\mathbf{P}_X$ approximieren?
Welchen Fehler machen Sie dabei maximal auf Intervallen?

(d) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(|X - 4 \cdot 10^6| \le 2500)$. Welche der drei Rechnungen (exakt, Poisson- oder Normalverteilung) können Sie (bis auf 0.01 genau) von Hand ausrechnen? Welche können Sie in der Tabelle ablesen? Welche können Sie mit elektronischer Hilfe bestimmen? Welche nicht? Wie genau ist das Ergebnis?

(e) Würden Sie diese Rechnung auch bei spaltbarem Material wie Uran 235 durchführen?

2 Reif für die Insel. Eine kleine Insel wird als Geheimtipp beworben: Eine Insel mit zwei Bergen und dem tiefen weiten Meer, mit viel Tunnels und Geleisen und dem Eisenbahnverkehr. Sie wird nur von wenigen Eisenbahnnerdindividualtouristen besucht. Nur einmal im Monat kommt das Postschiff, dabei verlassen alle Gäste die Insel und machen den Neuankömmlingen Platz. Die Anzahl der Touristen auf der Insel kann als Poisson–verteilt angesehen werden (große Population, geringe Wkt), erfahrungsgemäß mit Erwartungswert 10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) mit dem letzten Schiff gar kein Tourist gekommen ist?

(b) genau die erwartete Anzahl von Touristen auf der Insel weilt?

(c) höchstens 10 Gäste da sind?

(d) die Anzahl der Touristen sich von der erwarteten Anzahl um weniger als die einfache Standardabweichung unterscheidet?

Legen Sie selbst eine Poisson–Tabelle an, oder suchen Sie nach „Poisson–Tabelle“ im Internetz.

3 Ruck-zuck, weg ist der Puck! Die Verantwortlichen eines Eishockey-Verbandes wissen aus Erfahrung, dass bei 60% der Spiele 5 Pucks, bei 30% der Spiele 6 Pucks, und bei 10% der Spiele 7 Pucks in den Taschen der Souvenirjäger verschwinden. Pro Saison werden 110 Spiele ausgetragen.

(a) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz des Puck-Schwundes pro Saison?

(b) Durch welche Verteilung lässt sich der Puck-Schwund approximieren? Warum?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass pro Saison mehr als 625 Pucks verschwinden?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass pro Saison weniger als 590 Pucks verschwinden?

(e) Wie viele Pucks müssen pro Saison eingekauft werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der Bedarf an Pucks in einer Saison gedeckt werden soll?

Zusammenfassung: wichtige Verteilungen und Grenzwertsätze

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\substack{\text{Normalverteilung} \\ N(\mu,\sigma^2)}} & \boxed{\substack{\text{Summe unabhängiger ZV} \\ S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}} \arrow[l, "\substack{\mu = \sum_k \mu_k \\ \sigma^2 = \sum_k \sigma_k^2}"', "\substack{\text{ZGS V2A} \\ \delta < \rho_0^3/\sigma_0^3\sqrt{n}}"] \arrow[dl, "\text{Spezialfall}", "X_k \sim B(1,t)"'] \arrow[d, "\substack{\text{Satz V3A} \\ \text{Gesetz der} \\ \text{kleinen Zahlen}}"', "\substack{X_k \sim B(1,t_k) \\ \mu = \sum_k t_k \\ \|\cdot\| < \sum_k t_k^2}"] \\
\boxed{\substack{\text{Binomialverteilung} \\ B(n,t)}} \arrow[u, "\substack{\mu = nt \\ \sigma^2 = nt(1-t)}", "\substack{\text{LGS U3A} \\ \delta < 1/6\sigma \\ (\text{für } \sigma \geq 5)}"'] \arrow[r, "\mu = nt", "\substack{\text{Satz T3E} \\ \|\cdot\| \leq \mu^2/n}"'] & \boxed{\substack{\text{Poisson–Verteilung} \\ P(\mu)}} \\
\boxed{\substack{\text{Hypergeometrisch} \\ H(N,K,n)}} \arrow[u, "t = K/N", "\substack{\text{Satz T3F} \\ \|\cdot\| < n/N \\ (\text{für } n < K)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Diese Übersicht zeigt einige der wichtigsten Verteilungen und ihre Beziehungen: Sie sind ähnlich und liegen meist nahe beieinander! Grenzübergänge und Fehlerschranken sind Inhalt der genannten Grenzwertsätze.

Motivation zu den Aufgaben

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

In Natur- und Ingenieurwissenschaften, in Wirtschaft und Gesellschaft treten oft *zufällige Größen* X auf. Sie sind meist unvermeidbar, genauere Informationen sind oft zu teuer oder manchmal gar nicht zugänglich. Die Stochastik liefert Werkzeuge zum sicheren Umgang mit unsicheren Ereignissen, allgemein zum rationalen Entscheiden unter Unsicherheit. Hierzu ist es von zentraler Bedeutung, die *Verteilung* $\mathbf{P}_X$ zu kennen, oder zumindest so gut abzuschätzen wie es eben geht.

Oft ist unsere Zufallsgröße S die Summe zahlreicher kleiner Einflüsse, die unabhängig voneinander wirken. Der zentrale Grenzwertsatz erklärt, dass wir dann eine *Normalverteilung* erwarten dürfen, $\mathbf{P}_S \approx N(\mu,\sigma^2)$. Wie in der Mathematik üblich, geht man zum *Grenzwert* über, um die Ergebnisse bequem und übersichtlich formulieren zu können. Für praktische Anwendungen ist eine *Fehlerschranke* notwendig für den Wechsel von $\mathbf{P}_S$ zu $N(\mu,\sigma^2)$. Satz V2A stellt hierzu alles bereit.

Für große Fallzahlen mit geringen Wkten entsteht die Poisson–Verteilung. Hierzu stellt Poissons Gesetz der kleinen Zahlen alles bereits: Satz T3E und allgemeiner Satz V3A. Damit gewappnet wählen Sie in vielen praktischen Anwendungen schnell und sicher das passende Werkzeug.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sind ein faszinierendes und allgegenwärtiges Thema. Diese erste Impfung soll Sie darauf vorbereiten und Ihnen erste Anwendungen zeigen.

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997
4.0	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998