PRÄSENZÜBUNGEN 12: Das Ende ist nah (wahrscheinlich)

Für die Gruppenübungen am 23.–26. Januar 2018

1 Zocke, zocke, Häusle baue und nach dr Wahrscheinlichkeit schaue! Spiel- & Geschäftsidee: Spielen Sie in Teams gegeneinander, schätzen Sie zunächst die gerundeten Wahrscheinlichkeiten (in ganzen Prozent $0\%, 1\%, 2\%, \dots, 100\%$), dann lassen Sie sich überraschen!

Vom Spiel nun zum Ernst der Übung: Hinter jeder Frage steckt eine Verteilung aus der Vorlesung: Welche? Finden Sie die exakte Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit und berechnen Sie diese dann auf $0.5 \cdot 10^{-3}$ genau (also drei Nachkommastellen, falls Rechner zur Hand). Kann man die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe anderer, bequemerer Verteilungen annähern? Also insbesondere mit einer Exponentialnäherung oder von hypergeometrisch zu binomial zu Poisson? Wie gut ist die Approximation? Ist sie hier gut genug? Was sagt die allgemeine Fehlerschranke?

(a) Kollisionskurs. In Ihrer Übungsgruppe wählt jede/r zufällig und unabhängig eine Zahl aus $\{0, \dots, 99\}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass zwei gleiche Zahlen darunter sind?

(b) Frauenquote. In der Vorlesung Höhere Mathematik 3 (vertieft) wird eine Scheinklausur geschrieben. Die 399 Studierenden, darunter 61 Studentinnen, werden dazu zufällig auf die zwei Hörsäle V53.01 (218 Studierende) und V47.01 (181 Studierende) verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Hörsaal V53.01 genau 30 Frauen mitschreiben?

(c) Ich dreh' am Rad. Sie drehen ein Glücksrad mit gleich großen Feldern, die mit den Zahlen 1 bis 10 nummeriert sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Primzahl zu erdrehen?

(d) Eieiei! Ein Süßwarenhersteller füllt seine Schokoladeneier mit verschiedenen Spielsachen und Figuren. Von Zeit zu Zeit gibt es eine Sonderedition. Der Hersteller verspricht, dass in jeder Palette mit 672 Schokoladeneiern ein Siebtel der Eier eine Figur der Sonderedition enthält. Sie kaufen 14 Schokoladeneier, die Sie zufällig aus einer vollen fabrikneuen Palette entnehmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau zwei Eier mit einer Figur der Sonderedition gekauft haben?

(e) Aleae iactae sunt*. Sie werfen einen fairen sechsseitigen Würfel 120-mal nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau 20 Sechsen würfeln?

*Die Würfel sind gefallen.

(f) Schwarz-Weiß-Gebäck. In einer Keksdose befinden sich 1000 Kekse, die Hälfte der Kekse ist schwarz, die andere weiß. Sie nehmen zufällig, ohne hinzuschauen, fünf Kekse aus der Dose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens vier davon schwarz sind?

(g) This is Major Tom to ground control. Eine Raumsonde funkt über einen Nachrichtenkanal, der die Ziffern 0 und 1 übermitteln kann, und will die Nachricht „1“ übermitteln. Da eine Ziffer jeweils nur mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit richtig übermittelt wird, sendet die Sonde ihre Nachricht fünfmal hintereinander (also 11111). Der Empfänger erhält fünf Ziffern und interpretiert diese als 1, wenn mindestens drei der Ziffern gleich 1 sind und 0 sonst (Mehrheitsregel). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Empfänger die Nachricht richtig entschlüsselt?

Die Hausübungen (in dieser Woche zum zwölften und letzten Mal) finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung. Insgesamt gab es 48 Punkte + 4 Zusatzpunkte. Sie benötigen mindestens 24 Punkte aus den Hausübungen.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Unser Ziel in der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Wir suchen *begründete* und *quantitative* Aussagen. Dazu müssen Sie die nötigen Werkzeuge kennen und beherrschen. Gerade Ingenieure müssen Risiken abschätzen, minimieren, verkaufen bzw. Chancen berechnen, maximieren, kaufen. Hierzu dient Ihnen die Stochastik!

Aufgabe 1: In vielen Fällen müssen Sie zuerst ein geeignetes stochastisches Modell $(\Omega, \mathbf{P})$ finden: Es kodiert präzise all Ihre Voraussetzungen, Annahmen, Kalibrierungen, Messwerte, etc.

Einige stochastische Modelle treten besonders häufig auf, diese müssen Sie nicht neu erfinden, sondern können von der bereits vorliegenden Erfahrung profitieren.

- Soweit möglich beginnen Sie beim einfachsten und suchen eine Beschreibung auf Grundlage einer *endlichen Gleichverteilung* (Laplace–Modell, etwa beim Würfeln), manchmal auch einer *kontinuierlichen Gleichverteilung*. In den einfachsten Fällen nutzen Sie hierzu die vorliegende *Symmetrie* als wesentliche Annahme bzw. Forderung.
- In komplizierteren Fällen gibt es zwar nur endlich viele Ergebnisse, und alle sind gleichwahrscheinlich etwa aus Symmetriegründen, aber es sind sehr viele und Sie müssen das Abzählen gut organisieren. Hierzu dienen die Abzählformeln der Kombinatorik.
- Typisch sind Stichproben oder unabhängig wiederholte Experimente. Hier eignen sich meist die hypergeometrische Verteilung, die Binomalverteilung oder die Poisson–Verteilung.
- Innerhalb gewisser Fehlergrenzen können Sie verschiedene Verteilungen gegeneinander austauschen. Deshalb fragt diese Aufgabe nach der *exakten* Antwort und nach geeigneten *Näherungen*. Die Güte Ihrer Näherung erkennen Sie an den zugehörigen *Fehlerschranken*.

Die Mathematik ist voll von solchen erfolgreichen Lösungen, die sich seit langem bewährt haben und immer wieder bewähren. Nutzen Sie diesen Erfahrungsschatz, machen Sie ihn zu Ihrem eigenen!

Aufgabe 2: Hier ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung vorgegeben, diesmal kontinuierlich, da dies der Realität am nächsten scheint. Die Verteilung ist eine zweidimensionale, rotationssymmetrische Glockenkurve; sie entspricht einem ungeübten Dartspieler, der zwar recht gut die Mitte der Scheibe trifft, aber alles Weitere dem Zufall überlassen muss. Auf Grundlage dieses Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathbf{P})$ können Sie alle Wahrscheinlichkeiten berechnen und alle Fragen beantworten.

Sie üben hier nochmal integrieren, insbesondere Fubini und den Transformationssatz, hier speziell Polarkoordinaten. Die Funktionaldeterminante vergessen Sie selbstverständlich nie mehr in Ihrem Leben. Auch die Frage der Unabhängigkeit von Ereignissen (S2E) ist hier interessant.

Aufgabe 3: Die hypergeometrische, Binomial- und Poisson–Verteilungen sind eng verwandt. Hier ein sehr realistisches Beispiel aus der Physik. Hier sehen Sie auch eine ganz praktisches und handfestes Beispiel zum totalen Abstand zweier diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße.

Aufgabe 4: Die Überbuchung von Flügen und die Berechnung von Ticketpreisen ist heutzutage ein hochspezialisiertes Geschäft, manche sagen: schwarze Magie. Die Fluggesellschaften versuchen auf sehr kreative Weisen, ihren Profit zu optimieren. Diese Aufgabe ist der klassische Fall einer solchen Risikoabschätzung bzw. Optimierung und einigermaßen realistisch. Wenn Sie programmieren können, dann ist die Optimierung eine lehrreiche Aufgabe.

HAUSÜBUNGEN 12: This is the end of the Hausübung as we know it.

Abzugeben in den Gruppenübungen am 30. Januar–2. Februar 2018

2 Red Bull's Eye verleiht Gauß Flügel. Sie werfen Pfeile auf eine handelsübliche Dartscheibe $\mathbb{D} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 17^2 \,\}$ mit Wahrsch'dichte $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/68}$.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ und den Erwartungswert dieser Verteilung.

(b) Mit welcher Wkt treffen Sie ins Bull's Eye (Polar $\rho \le 0.635$)? Obwohl Sie in die Mitte zielen, treffen Sie gelegentlich die Triple 20 (Polar $9.9 \le \rho \le 10.7$, $\frac{9\pi}{20} \le \varphi \le \frac{11\pi}{20}$): Mit welcher Wkt?

(c) Seien (X,Y) die geworfene Position. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $R = \sqrt{X^2+Y^2}$? Das heißt: Wie groß ist die Wkt $G(r) = \mathbf{P}(R \in [0,r])$ und ihre Dichte $g(r)$? Können Sie den Erwartungswert von R exakt bestimmen? Geben Sie eine Näherung an.

(d) Sei $a \in [0,17]$. Sind die drei Ereignisse $X \ge 0$, $Y \ge 0$, $R \le a$ stochastisch unabhängig?

3 Der Zerfall ist nicht mehr aufzuhalten. Ein klassisches Beispiel für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable ist die Anzahl X der pro Sekunde emittierten α-Partikel einer radioaktiven Substanz. Die Probe enthält sehr viele Atome, aber jedes Atom zerfällt mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit – gleichverteilt und unabhängig von allen anderen. (Bei einer Kettenreaktion sieht es anders aus!)

Messungen an einer Probe Americum-241 (Halbwertszeit 458 Jahre) ergaben für 12169 Intervalle von 1-Sekunde-Länge die folgende Verteilung (nach Berkson 1966)

Anzahl Zerfälle	x	0	1	2	3	4	5	Σ
Anzahl Intervalle	$n(X=x)$	5267	4436	1800	534	111	21	12169

(a) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert μ dieser Messdaten.

(b) Sie wollen eine Poisson–Verteilung $P(\lambda)$ an diesen Datensatz anpassen. Wegen $\lambda = \mathbf{E}(P(\lambda))$ bietet sich die Wahl $\lambda = \mu$ an. Berechnen Sie damit die theoretischen Häufigkeiten.

(c) Bestätigen die Daten, dass die Zahl der Zerfälle einer Poisson-Verteilung folgt? Was ist der totale Abstand zwischen der empirischen und theoretischen Verteilung?

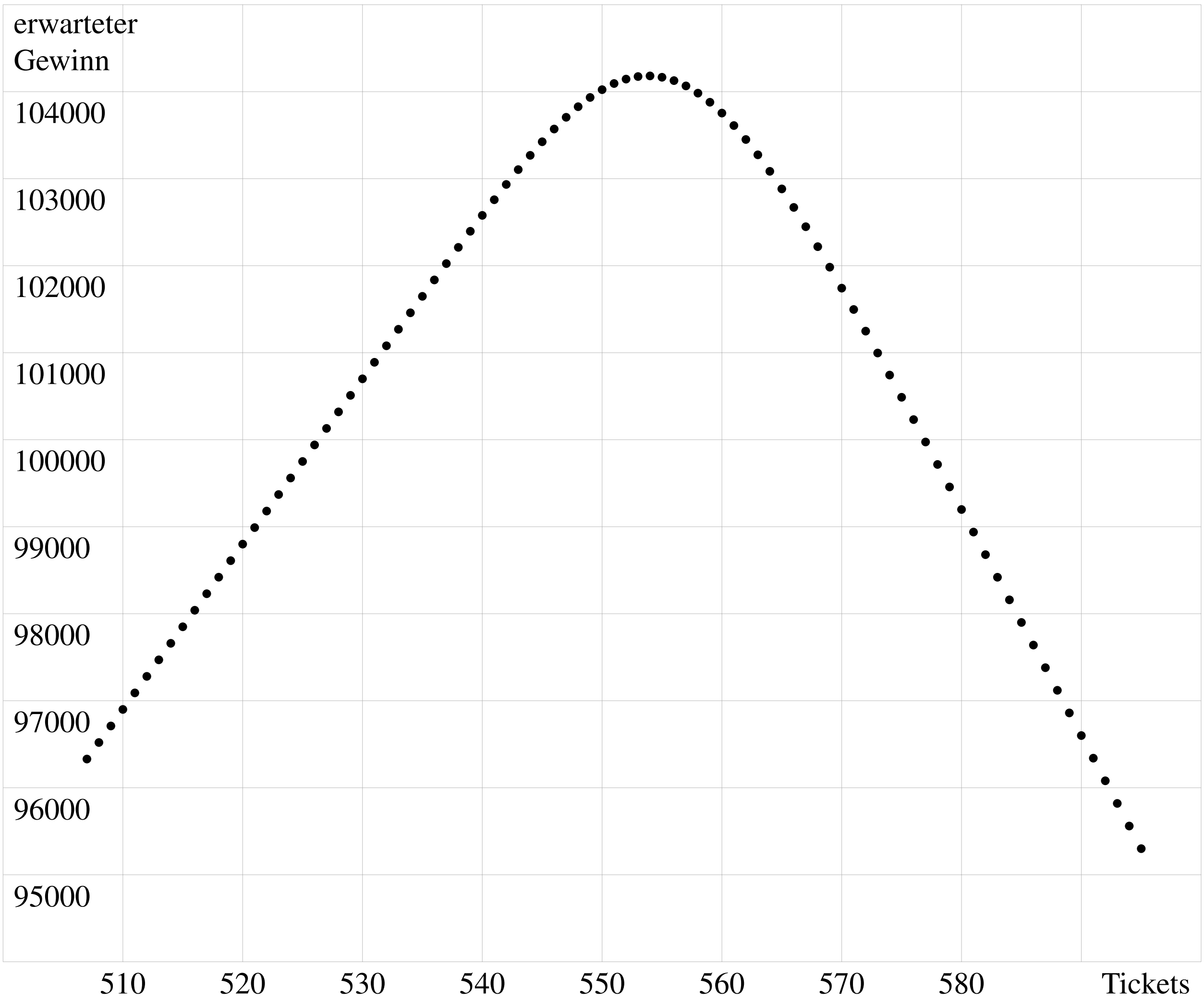
4 Erst buchen, dann fluchen! Auf der Flugstrecke Stuttgart – Frankfort/Kentucky setzt die Fluggesellschaft „ChickenWings" einen Airbus 380 mit 500 Plätzen ein. Die Flüge sind stets ausgebucht, allerdings werden im Mittel $p = 10\%$ der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

(a) Aus langjähriger Erfahrung verkauft ChickenWings 10% mehr Tickets als vorhandene Plätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen genau 500 Reisende zum Checkin? mehr als 500?

(b) Welche Annäherung für diese Wahrscheinlichkeiten liefert der lokale Grenzwertsatz?

(c) Für jeden Reisenden, der tatsätlich fliegt, nimmt ChickenWings $P = 200$ Euro ein, bei jeder Stornierung nur $S = 100$ Euro. Jedem Reisenden, der wegen Überbuchung zurückbleiben muss, zahlt ChickenWings $R = 500$ Euro. Formulieren Sie den erwarteten Gewinn $E(N)$ bei $N \ge 500$ verkauften Tickets. Wie würden Sie den erwarteten Gewinn maximieren?

(d) Freiwillige Zusatzaufgabe: Lösen Sie diesen Ansatz zur Gewinnmaximierung (mit einem selbstgeschriebenen Computerprogramm oder einer Tabellenkalkulation).


erwarteter Gewinn
104000
103000
102000
101000
100000
99000
98000
97000
96000
95000
510
520
530
540
550
560
570
580
Tickets