PRÄSENZÜBUNGEN 11: Liberté, égalité, probabilité!

Für die Gruppenübungen am 16.–19. Januar 2018

1 Ja? Nein? Warum? Beantworten Sie folgende Fragen; begründen Sie (durch ein Ergebnis aus Ihrer Vorlesung) oder widerlegen Sie die Aussage (durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus).

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante Matrix und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist dann die Lösungsmenge L_b des DGSystems $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ ein Vektorraum? Was gilt speziell für $b(t) = 0$?

(b) Ist die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{R}^n : y \mapsto y(t_0)$ injektiv? surjektiv? bijektiv?

(c) Zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei v ein Hauptvektor der Stufe ℓ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.
Ist dann $(A-\lambda)^k v$ ein Eigenvektor? für welche Exponenten k?

(d) Gibt es zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren? aus Hauptvektoren?
Gibt es zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren? aus Hauptvektoren?

(e) Zu lösen sei $(a_{11}x + a_{12}y)\,\partial_x u(x,y) + (a_{21}x + a_{22}y)\,\partial_y u(x,y) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Existiert immer eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Ist sie eindeutig? Wie hilft Ihnen hier unsere Klassifikation zweidimensionaler Dynamik?

(f) Existiert zu $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ eine Lösung $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$? Gibt es eine Lösung mit $u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0$, $u(x,1) = 1$ für $x,y \in \,]0,1[$? Und eine mit $u(x,0) = u(0,y) = u(x,1) = 0$, $u(1,y) = 1$? Und eine mit $u(x,0) = 1$, $u(0,y) = 2$, $u(x,1) = 3$, $u(1,y) = 4$?

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit? Ja, bitte, unbedingt!

(a) **Faule Socke.** In einer Schublade liegen 6 schwarze, 4 blaue und 2 rote Socken durcheinander. Wenn Sie (noch verschlafen und im Dunkeln und in Eile) zweimal blind in die Schublade greifen, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie zwei gleichfarbige Socken?

(b) **Unabhängigkeitserklärung.** Es werden drei (verschiedenfarbige) Würfel geworfen. Berechnen Sie $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ und $\mathbf{P}(A \cap B)$ für die Ereignisse $A = \{\text{Es fällt mindestens eine Eins}\}$ und $B = \{\text{Jeder Würfel hat eine andere Augenzahl}\}$. Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig? Vergleichen Sie $\mathbf{P}(A)$ mit $\mathbf{P}(A|B)$ sowie $\mathbf{P}(B)$ mit $\mathbf{P}(B|A)$.

(c) **Hurra, hurra, die Uni brennt!** Sie gehen zur Sprechstunde im siebten Stock. Die Wahrscheinlichkeit eines Feuers ist gering, sagen wir 0.1% jeden Tag. Im Brandfall wird mit Sicherheit $s = 0.98$ Alarm ausgelöst. Leider gibt es mit Wahrscheinlichkeit $f = 0.005$ an feuerfreien Tagen einen Fehlalarm.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit a geht der Feueralarm los?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit b brennt es, wenn Sie den Alarm hören?

(iii) Wie weit müssen Sie f senken, damit $b \ge 90\%$ gilt (bei sonst gleichen Daten)?

(iv) Genügt es alternativ, s weiter zu erhöhen (bei sonst gleichen Daten)?

(d) **Die Reise in einem verrückten Flickzeug.** Ein vierstrahliges Flugzeug kann mit nur zwei Triebwerken noch weiterfliegen. Der Ausfall eines Triebwerkes trete mit Wkt p auf, etwa $p = 0.1$ oder $p = 0.01$, und sei stochastisch unabhängig von den anderen. Mit welcher Wkt fallen drei oder vier Triebwerke aus? Wie realistisch ist die Annahme der Unabhängigkeit bei Verschleiß? Wartungsfehlern? Vogelschlag? Vulkanasche? Treibstoffmangel?

Die Hausübungen finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze. Solche Gleichungen sind in Naturwissenschaft und Technik allgegenwärtig, daher bauen Ihre Studiengänge konsequent auf Ihre umfassende mathematische Grundlagenausbildung. Nach Integration und Integralsätzen haben wir uns ein halbes Semester um Fourier–Theorie sowie gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen bemüht. Zum guten Schluss des Semesters kommt nun die Zeit der Ernte: Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist einer der Höhepunkte unserer kleinen Vorlesung.

Einige Eigenschaften, Sätze und Beispiele zu Differentialgleichungen werden hier wiederholt und vertieft. Bei diesem Frageformat „Ja? Nein? Warum?“ müssen Sie alle relevanten Sätze und Beispiele parat haben. Dies hat sich auch in Klausuren bewährt: Es belohnt diejenigen mit leicht und schnell verdienten Punkten, die die Vorlesung und die Übungen ernsthaft bearbeiten. Bitte üben Sie sich dabei in Präzision, wie in der Aufgabenstellung gefordert.

Unser Ziel in der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit: Viele Vorgänge haben unsicheren Ausgang, viele Prozesse stehen unter dem Einfluss von Zufällen. Stochastische Argumente sind daher unausweichlich. Wir suchen hierzu *begründete* und *quantitative* Aussagen. Gerade Ingenieure müssen Risiken abschätzen, minimieren, verkaufen bzw. Chancen berechnen, maximieren, kaufen. Hierzu dient Ihnen die Stochastik!

Statt *Wahrscheinlichkeitsrechnung* spricht man gleichbedeutend von *Wahrscheinlichkeitstheorie*: Auf Grundlage eines geeigneten Modells berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse. Das Gegenstück ist die *Statistik*: Damit untersuchen Sie empirische Daten (Messwerte, Beobachtungen) und versuchen, relevante Informationen zu extrahieren, insbesondere um ein geeignetes Modell zu bilden, zu testen oder anzupassen. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ergänzen sich demnach. Beide fasst man unter dem Oberbegriff *Stochastik* zusammen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung begann im 17. Jh. mit Rechnungen zu Glücksspielen. Sie ist jedoch ebenso auf fast alle Lebensbereiche anwendbar. Heutzutage wird sie überall eingesetzt, von der Wettervorhersage über klinische Tests neuer Medikamente bis zur Industrieproduktion. In ihrer Bedeutung für den Alltag kommt sie wohl gleich nach Grundrechenarten und Dreisatz.

Leider erstaunlich häufig werden aber selbst einfache Fragen falsch behandelt – manchmal mit katastrophalen Folgen. Damit es Ihnen nicht so, sondern besser ergeht, sollen Sie hier mit (einer homöopathischen Dosis) Wahrscheinlichkeitsrechnung geimpft werden. Zu Experten werden Sie dadurch noch nicht, aber die Grundideen müssen Sie kennen und fehlerfrei anwenden.

Unsere **Aufgaben** variieren von abstrakt-allgemein bis (auf diesem Blatt extrem) anschaulich-konkret. Lassen Sie sich davon motivieren aber nicht ablenken, im Kern geht es immer um dasselbe: Sie benötigen präzise Begriffe und Techniken, effiziente Sprache und Rechnung. Das gilt allgemein für mathematische Modelle, ganz speziell für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wiederholen Sie hierzu das Kapitel S, es stellt alles bereit: Rechnen mit Ereignissen (S117-S117), bedingte Wkt (S2A), Bayes (S2B), Unabhängigkeit (S2E), diskrete Zufallsvariablen (S3A), Erwartung (S3C), Varianz (S3E), Chebychev (S3F), Unabhängigkeit von Zufallsvariablen (S3H) und Fubini (S3I): Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen addieren sich! Daraus folgt das Gesetz der großen Zahlen (S3J). So können Sie Wahrscheinlichkeiten experimentell messen; dazu demnächst noch mehr.

HAUSÜBUNGEN 11: Mit absoluter Wahrscheinlichkeit tolle Aufgaben!

Abzugeben in den Gruppenübungen am 23.–26. Januar 2018

3 It's all about that Bayes. Sagt mein HM3–Trainor.

(a) Kartentricks. Aus einem Kartendeck mit 52 Karten (Werte A,2,…,10,B,D,K in den Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo) werden zufällig zwei Karten entnommen (verschiedene, ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei folgende Ereignisse eintreten:

- A: Beide Karten sind rot, also von der Farbe Herz oder Karo
- B: Die Karten haben denselben Wert.

Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

(b) Ein Mann sieht rot… oder doch grün? In Deutschland leben 49% Männer und 51% Frauen. (Das dritte Geschlecht wird hier noch nicht eingerechnet; das BVerfG lässt uns für die Aktualisierung unserer Übungsaufgaben noch bis Ende 2018 Zeit. Bis dahin zurück zum Thema…) Etwa 4.8% aller Deutschen haben eine Rot-Grün-Sehschwäche, bei den Männern sind es sogar 9%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- dass eine zufällig gewählte Frau rot-grün-blind ist?
- dass jemand, der rot-grün-blind ist, männlich ist?
- dass jemand, der nicht rot-grün-blind ist, weiblich ist?

(c) Mit Fehlern gespickte Lösungen. In einem Spick-und-Abschreib-Forum posten drei Studierende Hausaufgabenlösungen (zwar lieblos und unverständlich und meist falsch, aber unter den Einäugigen sind die Blinden die Soulsänger). Anthony produziert 15% der Lösungen, davon sind 5% richtig, Bethany produziert 40% der Lösungen, davon sind 15% richtig, Charley produziert den Rest mit einer Trefferquote von 10%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit,

- dass eine zufällig abgeschriebene Lösung korrekt ist?
- dass eine korrekte Lösung von Bethany stammt?

4 Welcome to the Spätzle machine! Ihre Start-Up-Firma im Cyber-Ländle verkauft für 1200 Euro ein Super-Luxus-High-Tech-Spätzle-Gerät mit Warp-Antrieb T_1 und Antimateriefilter T_2; die Marketingfuzzies wollten das unbedingt, die Developmentnerds auch. Sie als junge Chefin oder junger Chef müssen vor allem die Finanzen im Blick behalten. Ihr Produkt steckt leider noch in den Kinderschuhen und hat zwei Schwachstellen… Sie wissen schon welche: Die zwei Teile T_1 und T_2 fallen mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 10\%$ und $p_2 = 5\%$ (unabhängig voneinander) während der Garantiezeit aus. Die Reparatur von T_1 kostet Sie dann 50 Euro, die von T_2 sogar 200 Euro.

(a) Welche Reparaturkosten erwarten Sie pro Gerät? Was ist die Standardabweichung?

(b) Sie verkaufen 1000 Geräte. Welche Reperaturkosten erwarten Sie *insgesamt*? Wie groß ist die Standardabweichung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit weichen die Reparaturkosten um mehr als 2000 Euro vom erwarteten Wert ab? Nutzen Sie Chebychev zur (groben) Abschätzung. (Der zentrale Grenzwertsatz wird später eine viel bessere Näherung bieten.)

(c) Die anfallenden *durchschnittlichen* Reparaturkosten sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% höchstens 30 Euro betragen. Wie viele Geräte muss die Firma dafür mindestens verkaufen? Nutzen Sie auch hier vorläufig Chebychev (später besser den ZGS).

Die folgende Aufgabe ist schön, leicht und lehrreich aber diesmal nur eine freiwillige Bonusaufgabe, da Sie diese Woche vermutlich nicht genug Zeit haben — wie jede Woche, aber diesmal besonders.

5 Google: zufällige Irrfahrt und diskrete Wärmeleitung! Wir illustrieren einen Zusammenhang von PDE und Wkt, zwischen der Numerik der Wärmeleitungsgleichung und einer zufälligen Irrfahrt.

Für numerische Experimente genügt eine Tabellenkalkulation, Sie finden eine Vorlage online: `www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2017/Hoehere-Mathematik-3/Irrfahrt.ods`

(a) Wir betrachten die Spielfelder $0,1,\dots,20$ zyklisch mit $20 \equiv 0$. Sie starten zur Zeit $t=0$ mit Wkt 1 auf Spielfeld 10. Zum Zeitschritt $t=1$ gehen Sie mit Wkt $p_- = 0.3$ nach links, mit Wkt $p_+ = 0.3$ nach rechts, mit Wkt $p_0 = 1 - p_- - p_+ = 0.4$ bleiben Sie stehen. Dies wiederholen Sie nun. Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Zeiten $t = 0,1,2,\dots,50$.

(b) Inwiefern ähnelt die beobachtete Diffusion der Wärmeleitung? Welche Verteilungen sind stationär? Variieren Sie die Startwerte und die Parameter, evtl. auch die Größe. Wie verhalten sich Minimum und Maximum zur Zeit $t = 0,1,2,\dots$? Wie schnell gleichen diese Werte sich an? Welche Verteilung erwarten Sie für große Werte von t? Vermuten Sie eine Konvergenz für $t \to \infty$? wogegen? Was bedeuten die Grenzfälle $p_0 = 1$, $p_\pm = 0.5$, $p_- = 1$ oder $p_+ = 1$?

Seit 1998 wendet die Suchmaschine Google dieses Verfahren auf das Internet an: Webseiten und Links bilden einen Graphen (aus Ecken und gerichteten Kanten). Die zufällige Irrfahrt entspricht einem Surfer, der zufällig den Links folgt. Die daraus entstehende *stationäre Verteilung* entspricht recht genau der *Popularität* der Webseiten. Diese Bewertung (PageRank, inzwischen mit zahlreichen Verfeinerungen) nutzt Google zur Sortierung der Suchergebnisse nach *Relevanz*. Hätten Sie diese genial-einfache Idee vor 20 Jahren gekannt und zu Geld gemacht, so wären Sie heute Milliardär!

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u(t,x) = \kappa\,\partial_x^2 u(t,x)$. Die Ableitungen nach t und x (Differentialquotienten) nähern wir durch Differenzenquotienten mit Schrittweite Δt und Δx:

$$\frac{u(t+\Delta t,x) - u(t,x)}{\Delta t} \approx \kappa\,\frac{u(t,x-\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Dies können wir umstellen und als sehr einfache Rekursionsgleichung nutzen:

$$u(t+\Delta t,x) \approx u(t,x) + \frac{\kappa\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\big[u(t,x-\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x+\Delta x)\big]$$

Den neuen Wert links zur Zeit $t+\Delta$ berechnen wir aus den bekannten Werten rechts zur Zeit t. Damit approximieren wir numerisch die Wärmeverteilung $u : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) = \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) && \text{für } 0 < t \le T \text{ und } a < x < b,\\
&u(t,a) = u(t,b) && \text{periodische Randbedingungen für } t \ge 0,\\
&u(0,x) = g(x) && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b.
\end{aligned}$$

(c) Approximieren Sie $u : [0,5] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit der Diskretisierung $\Delta t = 0.1$ und $\Delta x = 0.1$. Für welchen Parameter κ und welche diskreten Startwerte entspricht dies der Irrfahrt aus (a)?

(d) Welche Parameter κ entsprechen welchen Wahrscheinlichkeiten? Variieren Sie den Parameter $\kappa \in \{0.02, 0.03, \dots, 0.07\}$. Es gibt eine Überraschung! Wie erklären Sie sich das pathologische Verhalten? Können Sie dieses Problem durch Verfeinerung der Schrittweiten lösen?