PRÄSENZÜBUNGEN 10: Zeigen Sie Charakter!

Für die Gruppenübungen am 9.–12. Januar 2018

1 Ba, watt habt ihr für e'ne fiese Charakter! Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x u + (1+y^2)\partial_y u = 0.$$

(a) Finden und skizzieren Sie die charakteristischen Kurven $s \mapsto (x(s), y(s))$. Schneiden alle Charakteristiken die x-Achse? Schneiden alle Charakteristiken die y-Achse?

(b) Parametrisieren Sie die Charakteristik $s \mapsto (x(s), y(s))$ mit $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$.

Sei umgekehrt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $(x_0, 0)$ und (x,y) auf derselben charakteristischen Kurve liegen. Ist die Lösung x_0 eindeutig?

(c) Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die obige Differentialgleichung mit Anfangswerten $u(x,0) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ erfüllen. Ist die Lösung eindeutig?

(d) Wir ersetzen nun die Anfangsbedingung aus (c) durch $u(0,y) = 0$ für $y \in \mathbb{R}$. Ist die Nullfunktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto u(x,y) = 0$ eine Lösung? Gibt es weitere?

2 La victòria dels separatistes. ¡Viva Catalunya!
Wir nutzen die übliche und bequeme Notation $u_x = \partial_x u = \partial u/\partial x$ und $u_{xy} = \partial_y \partial_x u = \partial^2 u/(\partial x\, \partial y)$ etc. Lösen Sie durch Trennung der Variablen folgende Differentialgleichungen:

$$(a)\ u_x - u_y = 0, \qquad (b)\ u_x + u_y = (x+y)u, \quad (c)\ u_{xy} - u = 0.$$

Wie sehen Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)\, w(y)$ aus? Sind dies bereits alle Lösungen?

3 ¡Hasta la victoria siempre, separatistas! (Sorry, uns gehen die Separatistenscherze aus.)
Gesucht ist eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0,\pi] \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ &u(t,0) = u(t,\pi) = 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0,\pi\} \text{ und } t \geq 0, \\ &u(0,x) = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin(2x), \quad \tfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(a) Trennen Sie die Variablen durch den Produktansatz $u(t,x) = v(t) \cdot w(x)$.
Finden und lösen Sie die separaten Gleichungen für v und w (wie in der Vorlesung).

(b) Lösen Sie das Randwertproblem für w. Wie lautet demnach die allgemeine Lösung u?

(c) Nutzen Sie Fourier–Reihen zur Erfüllung der Anfangsdaten.

Die Hausübungen finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung.

Motivation zu den Aufgaben

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Bei *gewöhnlichen Differentialgleichungen* (ODE) und Differentialgleichungssystemen geht es zunächst um Funktionen $u(x)$ in nur einer Variablen x, also $u : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^m : x \mapsto u(x)$. Gesucht sind Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(x,u,u',u'',\dots,u^{(\nu)},\dots) = 0.$$

Bei *partiellen Differentialgleichungen* (PDE) betrachten wir allgemein Funktionen $u(x_1,\dots,x_n)$ in mehreren Variablen $x_1,\dots,x_n$, $n \ge 1$, also $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m : (x_1,\dots,x_n) \mapsto u(x_1,\dots,x_n)$. Gesucht sind Lösungen einer partiellen Differentialgleichung

$$F(x_1,\dots,x_n,u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u,\dots,\partial^\nu u,\dots) = 0$$

in der Funktion u und ihren *partiellen Ableitungen* $\partial^\nu u = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} u$.

Die Allgegenwart und die Wichtigkeit der (gewöhnlichen und partiellen) Differentialgleichungen beruht auf der Erfahrung, dass sich beinahe alle Naturphänomene so beschreiben lassen.

Die Lösung partieller Differentialgleichungen mobilisiert alle bisher erarbeiteten Techniken der Höheren Mathematik: mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung, Integralsätze, Fourier–Theorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, und viele mehr. Differentialgleichungen sind ein riesiges Gebiet, zu dem die HM3 nur einen winzigen Einblick geben kann. Die mathematische und oft numerische Bearbeitung praxisrelevanter Probleme führt schnell zu Fragestellungen der aktuellen Forschung und sprengt daher bei weitem den Rahmen dieser kleinen Vorlesung.

Aufgabe 1&4&5: Partielle Differentialgleichungen, speziell lineare von erster Ordnung, lassen sich mit der *Charakteristikmethode* lösen, wie in der Vorlesung ausgeführt. Zu lösen sei

$$\begin{aligned} a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u &= c(x,y,u) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\\ u(x,y) &= u_0(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in A \subset \Omega. \end{aligned}$$

Eine *charakteristische Kurve* der PDE durch den Punkt $(x_0,y_0) \in A$ ist ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ mit $s \mapsto (x(s),y(s),z(s))$ und

$$\begin{aligned} x' &= a(x,y,z), && x(0) = x_0,\\ y' &= b(x,y,z), && y(0) = y_0,\\ z' &= c(x,y,z), && z(0) = u_0(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Längs jeder Charakteristik erfüllt die Lösung u dann $u(x(s),y(s)) = z(s)$. Damit werden solche PDE auf (wesentlich einfachere) ODE zurückgeführt.

Aufgabe 2&3&6: Die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind die Potentialgleichung, die Wellengleichung, und die Wärmeleitungsgleichung. In diesen und vielen ähnlichen Problemstellungen ist die *Separationsmethode* mit dem Produktansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ erfolgreich. Auch sie führt eine PDE auf (mehrere gekoppelte) ODE zurück.

HAUSÜBUNGEN 10: Partielle Gleichungen, vollständige Lösungen

Abzugeben in den Gruppenübungen am 16.–19. Januar 2018

4 Alles eine Frage des Charakters! Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der quasilinearen partiellen Differentialgleichung

$$u_y + (u+y)u_x = u \qquad \text{mit Startwerten} \qquad u(x,0) = x \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Nutzen Sie die Charakteristikmethode. Haben Sie alle Lösungen gefunden? Warum?

5 For your convenience, here are some WTF8 characters: !#$@€¡¿*%‰ßš

(a) Bestimmen und skizzieren Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

(b) Nennen Sie eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren charakteristische Kurven genau die Lösungen aus Teil (a) sind.

(c) Entscheiden Sie mit der Skizze (a) und der Gleichung (b) ohne weitere Rechnung:
Gibt es zu jeder stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$
eine Lösung u mit $u(x,0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? sogar mehrere?
Und eine Lösung mit $u(x,1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? sogar mehrere?

(d) Nun andersherum: Gegeben ist für $u(x,y,t)$ mit $y > 0$ die partielle Differentialgleichung

$$xu_x + yu_y + (x^2+y^2)u_t = 0 \quad \text{und} \quad u(x,1,t) = x^2 - t^3.$$

Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

6 Die Katze auf dem heißen Blechdach. Finden Sie die Lösung u der Laplace–Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

auf dem Rechteck $R = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$ mit $a = b = 24$ und den Randwerten $u(x,b) = 20$, $u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0$.

(a) Finden Sie alle Lösungen von $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in Produktform $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$, die zudem die Randbedingungen $u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0$ erfüllen.

(b) Wie erfüllen Sie die letzte Randbedingung $u(x,b) = 20$?

Harmonische Funktionen wie Ihre Lösung u mit $\Delta u = 0$ sind stationäre Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$: Stationär bedeutet hier zeitunabhängig, also $\partial_t u = 0$ und somit $\Delta u = 0$. Das erklärt den Titel von Aufgabe 6: Ein quadratförmiges Blech wird an drei Seiten auf konstante Temperatur gekühlt, an der vierten Seite erwärmt. Wie wird sich die Temperatur verteilen? Die Katze wird ausprobieren, wo ihr die Temperatur am besten gefällt, Sie können es ausrechnen: Finden Sie erst alle Lösungen in Produktform, die den ersten drei Randbedingungen genügen (Teil (a)), ähnlich wie in er Vorlesung (R202ff). Für jedes $n \ge 1$ werden Sie dabei Lösungen $u_n(x,y)$ finden. In Teil (b) führt Sie der Ansatz $\sum_{n\ge 1} u_n(x,y)$ zur Lösung. Die folgenden Graphiken zeigen die Partialsummen bis zum 9. bzw. bis zum 25. Summanden, sowie die exakte Lösung (also die gesamte Reihe als unendliche Summe). Vergleichen Sie die Bilder mit den Folien (§I2) zur Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion. Was fällt Ihnen auf? Warum sollte Sie das nicht überraschen?