# PRÄSENZÜBUNGEN 9: Wir gewöhnen uns an Differentialgleichungssysteme.

*Für die Gruppenübungen am 19.–22. Dezember 2017*

**1 Spare Ordnung, zahle Dimension.** Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$p(\partial)\,y \;:=\; y''' - 6y'' + 12y' - 8y \;=\; 0.$$

**(a)** Formulieren Sie diese um in ein Differentialgleichungssystem *erster* Ordnung der Form $u'(t) = A\,u(t)$ mit $u(t) = (y(t), y'(t), y''(t))$. Was ist hierzu die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$?

**(b)** Nennen Sie das charakteristische Polynom $p$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_A$ der Systemmatrix $A$. Was fällt Ihnen auf?

**(c)** Finden Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $p(\partial)\,y = 0$. Gewinnen Sie hieraus das zugehörige Fundamentalsystem des Systems $u'(t) = A\,u(t)$.

**(d)** Eine der Fundamentallösungen von $u'(t) = A\,u(t)$ ist von der Form $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1)$. Ist $v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0$ eine Hauptvektorkette von $A - \lambda E$? Prüfen Sie dies sorgfältig!

**2 Wir können auch anders, hier sogar 5D.** Gegeben sind über dem Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie für $i = 1,2,3,4$ den Vektor $Av_i$ und schreiben Sie diesen als Linearkombination von $v_1, v_2, v_3, v_4$. Erkennen Sie hier Hauptvektorketten? (W)Elche?

**(b)** Aus Teil (a) kennen Sie vier Eigenwerte von $A$. (W)Elche? Was ist demnach der fünfte (fast ohne weitere Rechnung)? Finden Sie dazu einen Eigenvektor $v_5$. Geben Sie schließlich (ohne weitere Rechnung) das charakteristische Polynom von $A$ in faktorisierter Form an.

**(c)** Ist $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^5$? Warum? Geben Sie die Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ an.

**(d)** Bestimmen Sie zum linearen Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ ein Fundamentalsystem und die zugehörige Fundamentalmatrix $Y(t)$ mit $Y'(t) = A\,Y(t)$.

**(e)** Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem mit Anfangswerten:

$$y'(t) = A\,y(t) + b(t), \quad b(t) = 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Tipp**: Sie lösen hier das inhomogene Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + b(t)$. Zur Lösung durch Variation der Konstanten (Satz O3D) benötigen Sie $c'(t) = Y(t)^{-1} b(t)$. Hierzu müssen Sie $Y(t)$ nicht invertieren: Es genügt, Lösungen $c'(t)$ der Gleichung $Y(t)c'(t) = b(t)$ zu finden (hier: durch scharfes Hinsehen). Dasselbe gilt für $\tilde{y}_0 = Y(t_0)^{-1} y_0$ und $Y(t_0)\tilde{y}_0 = y_0$.

# Motivation zu den Aufgaben

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

[stream of consciousness on] *Woher bloß nehmen wir jede Woche diese Motivation? Die Lage ist ernst, aber nicht hoffnungslos. Oder doch umgekehrt? Im Nachhinein sind wir schlauer, wie immer. Hallo, hört mir noch jemand zu? Blicken wir nicht nur auf das, was jetzt ist, sondern vor allem auf das, was sein wird! Möge die Mühe sich lohnen und die Saat aufgehen. Wer lernen will, sollte vertrauen. Wer lehren will, muss hoffen.* [stream of consciousness off]

**Aufgabe 1:** Sie können jede eindimensionale Differentialgleichung $n$–ter Ordnung umschreiben in ein $n$–dimensionales System erster Ordnung. Das ist oft vorteilhaft, theoretisch und praktisch: Hierzu haben Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz (O1A, O1B), explizite Lösungskonstruktion durch iterierte Integration (Picard–Lindelöf O1C), Abhängigkeit von den Anfangsdaten (O1E), Fehlerschranken (O1F, O1H), numerische Methoden (Euler, Runge–Kutta) und vieles mehr!

Hier sollen Sie diese Umrechnung einmal explizit ausführen und die Lösungsmethoden vergleichen.

**Aufgabe 2:** Unter den Differentialgleichungssystemen sind die linearen mit konstanten Koeffizienten der wichtigste Spezialfall. Diese treten insbesondere immer bei Linearisierungen auf, wie in Aufgabe 5. Seien Sie ehrlich: Beim ersten Blick auf die Matrix $A$ erkennen / erraten Sie keine einzige Lösungen zu des Differentialgleichungssystems $y' = A\,y$. Glücklicherweise haben Sie die besonders effizienten Methoden der linearen Algebra:

Wenn Sie nur die Matrix $A$ kennen, dann ist das Standardverfahren hilfreich: Sie berechnen das charakteristische Polynom, seine Nullstellen, damit Eigenvektoren und falls nötig Hauptvektoren.

In dieser Aufgabe gehen Sie besser anders herum vor, da Sie über zusätzliche Informationen verfügen: Sie prüfen die Vektoren (2a), finden damit alle Eigenwerte (2b), den fehlenden Eigenvektor und damit schließlich das vollständig faktorisierte charakteristische Polynom. In der so gefundenen Basis ist $v \mapsto Av$ besonders einfach (2c). Damit können Sie $y' = A\,y$ leicht explizit lösen (2d).

Für inhomogene lineare Systeme (2e) kennen Sie zudem die Lösungsmethode durch Variation der Konstanten (O3D). Die $5 \times 5$–Matrix ist allerdings groß und mühsam zu invertieren: Denken hilft!

**Aufgabe 3&4:** Die Techniken der vorigen Aufgaben 1&2 können Sie hier anwenden. Die Aufgaben sind hierzu in kleine Schritte strukturiert, so wie Sie es kennen und lieben. Die Hoffnung ist, dass es Ihnen jetzt hilft, und Sie dereinst selbst ähnliche Aufgaben in kleine Arbeitsschritte strukturieren.

**Aufgabe 5:** Typische Differentialgleichungssysteme sind nicht-linear, so wie hier. Eine explizite Lösung ist dann meist schwierig. Um dennoch das Verhalten des Systems zu verstehen, können Sie zunächst Fixpunkte finden und klassifizieren (stabil/instabil, Wirbel, Strudel, Sattel, Knoten, usw.)

Zur Anschauung des Systems $(x,y)' = f(x,y)$ und zum Verständnis seiner Lösungen hilft Ihnen, das Vektorfeld $(x,y) \mapsto f(x,y)$ zu skizzieren, siehe Seite 4. Zu diesem System gibt es zudem eine schöne anschauliche (Weihnachts-?) Geschichte, mit Rehen und Wölfen, das volle Dekor. Es handelt sich um ein Räuber–Beute–Modell, so wie die Lotka–Volterra Gleichungen aus der Vorlesung.

*Lieber Weihnachtsmann, das HM3-Team wünscht sich, dass alle Teilnehmer fleißig lernen und üben, und damit schließlich auch erfolgreich sind, und dass niemand mehr seine Hausaufgaben hirnlos abschreibt. Wenn das zu viel verlangt ist, dann eben Weltfrieden. Und für jeden einen Elch!*

# HAUSÜBUNGEN 9: Das System schlägt zurück.

*Abzugeben in den Gruppenübungen am 9.–12. Januar 2018*

**3 Niemand entkommt dem System. Oder doch?** Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} u'' = & 2u & +2u' & -2v & -v', \\ v'' = & -u & & +v & +v'. \end{cases}$$

**(a)** Formulieren Sie dieses um in ein lineares Differentialgleichungssystem *erster* Ordnung $y' = Ay$ für $y = (u, u', v, v')$. Was ist hierzu die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$?

**(b)** Zur Matrix $A$ sind 0, 1 und $-1$ Eigenwerte. Was ist demnach der vierte Eigenwert? Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix $A$.

**(c)** Geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen des ursprünglichen Systems zweiter Ordnung an. Welche allgemeinen Lösungen sind konvergent? divergent?

**(d)** Lösen Sie das Anfangswertproblem $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v'(0) = 2$.

**4 Das System gewinnt immer.**

Zu lösen ist das (lineare inhomogene) Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ mit AWP:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + \mathrm{e}^{-t}, & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -y_1(t) - 2\,\mathrm{e}^{-t}, & y_2(0) = 2 \end{cases}$$

**(a)** Bestimmen Sie die Matrix $A$, ihr charakteristisches Polynom und die Eigenwerte. Ist $w = \binom{0}{1}$ ein Eigenvektor? oder allgemeiner ein Hauptvektor? welcher Stufe?

**(b)** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und die zugehörige Fundamentalmatrix $Y$.

**(c)** Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_b$ durch Variation der Konstanten.

**(d)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung. Lösen Sie damit schließlich das Anfangswertproblem.

**5 Finden Sie fix Punkte!** Zu untersuchen ist das nicht-lineare Differentialgleichungssytem

$$\begin{cases} x' = (3 - x - y)x, \\ y' = (1 - y + x)y. \end{cases}$$

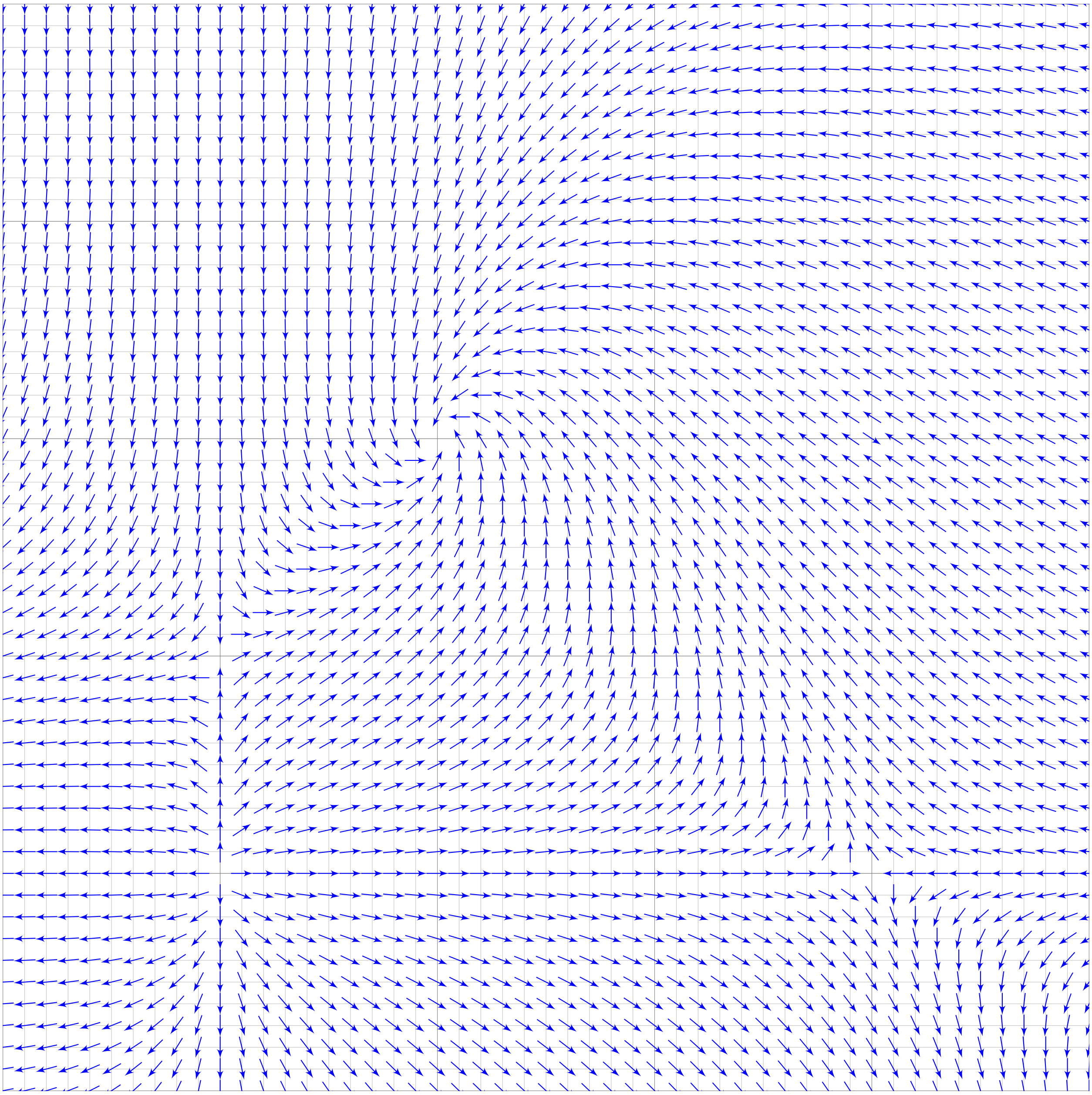
**(a)** Schreiben Sie dies als $(x,y)' = f(x,y)$ mit dem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle (vier) Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von $f$.

**(b)** Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt $p$, also $f(p) = 0$ und $f(p+u) = Au + \text{h.o.t.}$: Was ist die Jacobi–Matrix $A$? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut Katalog P208)? Ist er in/stabil?

**(c)** Finden Sie alle Lösungen der linearisierten Differentialgleichung um den Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^2_{>0}$.

**Zusatzaufgabe:** Wie verhalten sich Lösungen $(x(t), y(t))$ mit Anfangspunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ für $t \to \infty$? Formulieren Sie eine qualitative Vermutung und begründen Sie anschaulich!

**Zuzusatzaufgabe:** Was bedeuten in den Fixpunkten die Eigenvektoren der Jacobi–Matrix? Sehen Sie dies anschaulich-geometrisch in folgender Skizze des Vektorfeldes?



**Rechtzeitig zum Feste: Das Vektorwimmelfixpunktsuchbild, der Spaß für die ganze Familie!** Where's Wally, the rednosed Rehtier? Ein schwarzes Reh schwimmt gegen den Strom. Wo? *Sie sind müde, sehr müde, Sie schlafen langsam ein. Sie sind jetzt ein Reh… oder ein Wolf… Sie lösen die Aufgabe wie im Schlaf. Dann wachen Sie auf und haben alles verstanden. Schnipp!*

Auf einer Insel vermehren sich friedlich Rehe. Zunächst wächst die kleine Rehpopulation proportional zur Populationsgröße $x(t)$, in unserem Beispiel $x'(t) \approx 3x(t)$. Bei wachsender Population machen sich die begrenzten Ressourcen bemerkbar. Realistischer ist daher die logistische Gleichung $x' = (3-x)x$. Fixpunkte sind $x = 0$ (keine Rehe) und $x = 3$ (Population im Gleichgewicht).

Eines Tages schwimmt ein kleines Rudel Wölfe zur Insel. Die Rehpopulation $x(t)$ bietet der Wolfspopulation $y(t)$ ein paradiesisches Nahrungsangebot: Für die Wölfe gilt $y' = (1-y)y + xy$. Für die Rehe hingegen gilt jetzt $x' = (3-x)x - xy$. Die Entwicklung dieser beiden Populationen ist damit ein gekoppeltes nicht-lineares Differentialgleichungssystem. Voilà, Aufgabe 5!

Die obige Skizze zeigt das Vektorfeld (auf Einheitslänge normiert). Sie erkennen hier graphisch die vier Fixpunkte, die Sie in Aufgabe (5a) ausgerechnet haben. Sie sehen auch den Typ jedes Fixpunkts (5b). Quantitativ berechnen Sie dies stellvetretend für den besonders interessanten Fixpunkt (5c).