PRÄSENZÜBUNGEN 8: Differentialgleichungen am laufenden Band

Für die Gruppenübungen am 12.–15. Dezember 2017

1 Ja? Nein? Warum? Beantworten Sie folgende Fragen; begründen Sie (durch ein Ergebnis aus Ihrer Vorlesung) oder widerlegen Sie die Aussage (durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus).

(a) Sei $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $y : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [-1,1]$. Existiert immer eine solche Lösung?

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zum Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ suchen wir ein Intervall $[x_0, x_1]$ mit $x_1 > x_0$ und eine Funktion $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$. Existiert immer eine solche Lösung? Kann es auf $[x_0, x_1]$ auch mehrere geben?

(c) Besitzt die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt[3]{\cos(t)^2}\,\sin(y(t))$ Lösungen $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $u(a) < v(a)$, aber $u(b) > v(b)$?

(d) Die Differentialgleichung $y'(x) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ hat als mögliche Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Gibt es überkreuzende Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

(e) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Gibt es genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ von $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ mit $y(x_0) = y_0$? Können Sie alle Lösungen explizit angeben? Kann es überkreuzende Lösungen $y, z : I \to \mathbb{R}$ geben mit $y(x_0) < z(x_0)$ und $y(x_1) > z(x_1)$?

(f) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear?

2 Außergewöhnlich gewöhnliche Differentialgleichungen

(a) Lösen Sie $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = b_i(x)$ mit den rechten Seiten

$$
\begin{aligned}
&b_1(x) = 0 && b_2(x) = \mathrm{e}^x, && b_3(x) = 2x^2\,\mathrm{e}^x,\\
&b_4(x) = 4\,\mathrm{e}^x - 6x^2\,\mathrm{e}^x, && b_5(x) = 4x\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}, && b_6(x) = 4x\,\mathrm{e}^{2x}\sin(x),\\
&b_7(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos(x)}.
\end{aligned}
$$

Geben Sie für $i = 1,2,3,4,6$ die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für $i = 5$ entsprechend $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Zu b_7 ist die allgemeine Lösung $y : \,]-\pi/2, \pi/2[\, \to \mathbb{R}$ gefragt. Die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen können hilfreich sein.

(b) Lösen Sie $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = b_i(x)$ mit den rechten Seiten

$$
b_1(x) = 4\cos(x), \qquad b_2(x) = 3 - x.
$$

(c) Lösen Sie die DG $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 3 - x$ aus Teil (b) mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace–Transformation.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Aufgabe 1: Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze. Auf Blatt 7 haben Sie gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst, also Gleichungen von der Form $y' = f(x,y)$. Diese Beispiele und Cauchys Existenz- und Eindeutigkeitssatz (M1C) werden hier wiederholt und vertieft. Bei diesem Frageformat „Ja? Nein? Warum?“ müssen Sie alle relevanten Sätze und Beispiele parat haben. Dies hat sich auch in Klausuren bewährt: Es belohnt diejenigen mit leicht und schnell verdienten Punkten, die die Vorlesung und die Übungen ernsthaft bearbeiten.

Aufgaben 2–4 widmen sich Differentialgleichungen höherer Ordnung, $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$. Wichtig und noch gut lösbar sind *lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung*:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = b(x).$$

Hierbei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder allgemeiner $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die stetigen Funktionen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ heißen *Koeffizienten*. Die stetige Funktion $b : I \to \mathbb{K}$ heißt *Störterm*, *Inhomogenität* oder kurz *rechte Seite*. Die linke Seite ist der *Differentialoperator* $L : C^n(I,\mathbb{K}) \to C^0(I,\mathbb{K})$,

$$L : y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Dies ist eine *lineare Abbildung*. Zur Lösung hilft uns der grundlegende Struktursatz N3A:

(a) Globale Existenz und Eindeutigkeit: Zu jedem Anfangsdatum $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}$ mit $Ly = b$ und $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$.

(b) Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid Ly = 0 \,\}$ ist ein *Vektorraum*, der Dimension n dank (a). Wir wählen ein *Fundamentalsystem* von L_0, also eine Basis $y_1, \dots, y_n \in L_0$, und erhalten:

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

(c) Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid Ly = b \,\}$ ist ein *affiner Raum*, ebenso der Dimension n dank (a). Für jede *Partikulärlösung* $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

Daher der Slogan: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Dies strukturiert und vereinfacht das Problem, *alle* Lösungen zu finden! Die lineare Struktur war schon für lineare DG 1. Ordnung sichtbar, doch erst für lineare DG höherer Ordnung spielt die lineare Algebra eine zentrale Rolle und entfaltet ihre ordnende Kraft in voller Schönheit.

Aufgabe 2–4: Im Falle $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ haben wir *konstante Koeffizienten*. Für diesen Fall gibt es besonders effiziente Lösungsmethoden, die auf den Folien N201–N204 zusammengefasst sind und danach in Sätzen und Beispielen ausgeführt werden. Die Aufgaben 2–4 sind von diesem Typ.

Aufgabe 5: Sie sehen hier ein vierdimensionales Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also vier Differentialgleichungen, die miteinander *gekoppelt* sind. Hier zahlt sich Ihre Investition in die Grundlagen der linearen Algebra aus: In einer geeigneten Basis werden die Gleichungen soweit möglich *entkoppelt* (5a). In dieser neuen Basis können Sie leicht Lösungen ablesen bzw. prüfen (5b). Die Dimension ergibt sich wie zuvor aus Cauchys E&E–Satz, und so finden Sie leicht eine Basis: Es genügt eine linear unabhängige Familie entsprechender Länge (5c). Da Sie nun *alle* Lösungen kennen, finden Sie leicht die beschränkten, periodischen, konvergenten, etc (5d).

HAUSÜBUNGEN 8: Denken Sie mal linear!

Abzugeben in den Gruppenübungen am 19.–22. Dezember 2017

3 An ODE a day keeps the doctor away.

Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + by' + y = 0.$$

(a) Welche Parameter $b \in \mathbb{C}$ führen zu kritischer Dämpfung (doppelte Nullstelle)? Finden Sie für jedes dieser b die allgemeine Lösung! Welche dieser Lösungen erfüllt $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$?

(b) Finden Sie für $b = -\frac{5}{2}$ die Lösung mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

(c) Finden Sie für $b = 0$ alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + by' + y = 5\cos(x).$$

Machen Sie die Probe: Ist Ihr Ergebnis wirklich eine Lösung? Wie können Sie sicher sein, dass Sie wirklich alle Lösungen gefunden haben?

4 Linear hilft sogar.

(a) Finden Sie zu $y^{(4)} - y = \mathrm{e}^{-2x}$ die allgemeine homogene Lösung y_h sowie eine partikuläre Lösung y_p, und somit die allgemeine Lösung $y = y_p + y_h$.

(b) Finden Sie zu $y^{(4)} - y = \cos(2x)$ die allgemeine homogene Lösung y_h sowie eine partikuläre Lösung y_p, und somit die allgemeine Lösung $y = y_p + y_h$.

(c) Finden Sie alle Lösungen zu $y'' + 3y' + 2y = (x^2 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

5 Das hat System!

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem sowie eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ des $\mathbb{C}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} y_1' = & -3y_1 & +2y_2 & +3y_3 & -y_4 \\ y_2' = & y_1 & -2y_2 & -y_3 & \\ y_3' = & -y_1 & +2y_2 & +y_3 & -y_4 \\ y_4' = & & y_2 & +y_3 & \end{array}\right\}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \overline{v_3}.$$

(a) Schreiben Sie dieses Differentialgleichungssystem in der Form $y'(t) = A\,y(t)$ mit $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Schreiben Sie die Vektoren Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : v \mapsto A\,v$ als Matrix bzgl. der Basis $\mathscr{B}$.

(b) Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen von $y'(t) = A\,y(t)$?

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} v_1, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} v_2, \qquad y_3(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t} v_1, \qquad y_4(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t} v_2,$$
$$y_5(t) = \mathrm{e}^{-2t}(v_2 + t v_1), \qquad y_6(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_3, \qquad y_7(t) = \mathrm{e}^{\mu t} v_4, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ geeignet.}$$

(c) Welche Dimension hat der reelle Lösungsraum $L_0 = \{\, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y' = Ay \,\}$? Geben Sie ein Fundamentalsystem an, also eine Basis von L_0. Was ist die allgemeine reelle Lösung?

(d) Welche Lösungen sind für $t \geq 0$ beschränkt? Gibt es periodische Lösungen? Wenn ja, mit welcher Periode? und solche, die für $t \to \infty$ konvergieren? Wenn ja, wogegen?