PRÄSENZÜBUNGEN 7: Differenzierte Fragen, undifferenzierte Antworten

Für die Gruppenübungen am 5.–8. Dezember 2017

1 Fingerübungen: Für eine handvoll Differentialgleichungen.
Mit welchen Methoden lassen sich die folgenden Differentialgleichungen lösen? Lösen Sie jede Differentialgleichung mit jedem der möglichen Verfahren. Machen Sie am Ende die Probe!

	Separation	exakte DG	lineare DG
(a) $yy' + 2\sin(x) = 0$			
(b) $y' = x + y$			
(c) $y' = y^2 \sin(x)$			
(d) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$			
(e) $4 - \dfrac{y^2}{x^2} + 2\dfrac{y}{x}y' = 0$			

2 Was noch nicht exakt ist, wird exakt gemacht! Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$xy\cos(y^2)y' = -2\sin(y^2) \quad \text{mit} \quad y(2) = \sqrt{\pi/2}.$$

(a) Schreiben Sie diese Differentialgleichung in der Form $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$.
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ist diese DG exakt?

(b) Berechnen Sie $-\operatorname{rot}(f,g)/g$ und $\operatorname{rot}(f,g)/f$ und entscheiden Sie, ob ein integrierender Faktor $\lambda(x)$ oder $\lambda(y)$ in nur einer Variablen existiert. Finden Sie diese Faktoren. Machen Sie die Probe: Ist das reskalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g)$ wirklich rotationsfrei?

(c) Finden Sie ein Potential zum Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g)$. Berechnen Sie hiermit explizit eine Lösung des Anfangswertproblems. Machen Sie die Probe: Ist Ihr Ergebnis wirklich eine Lösung?

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze, sie formulieren die Dynamik: Alles ändert sich, alles fließt. Als Startwert kennen Sie den Zustand heute, als Prognose suchen Sie die Werte morgen und in der weiteren Zukunft. Dazu nutzen und lösen Sie Differentialgleichungen:

- Oft ist der unabhängige Parameter $x \in \mathbb{R}$ die Zeit.
- Die abhängige Größe $y(x)$ ist der Zustand zur Zeit x.
- Die Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ ist das Bewegungsgesetz.
- Die Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ sind gegeben durch den Punkt (x_0, y_0).

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form. Auch viele Fragen der Geometrie oder der Optimierung lassen sich so formulieren und lösen. Es ist schön, wenn Differentialgleichungen mit einer Geschichte umkleidet sind, etwa wie in Aufgabe 5, das kann Sie motivieren und Ihre Anschauung schulen, so können Sie Lösungen erahnen oder nachträglich empirisch überprüfen.

Alternativ können solche Gleichungen auch nüchtern-abstrakt daherkommen wie in Aufgabe 1–4. Lassen Sie sich davon nicht täuschen: Die verschiedensten Differentialgleichungen kommen nahezu überall vor, und es lohnt sich, diese systematisch zu studieren – auch ohne dekorative Geschichte.

Aufgabe 1: Hier üben Sie die grundlegenden Lösungsmethoden (M1A, M2A, M2E). Welche sind auf die gegebenen Probleme anwendbar? Nach dem Überblick lösen Sie die Gleichung. Lösen ist schwer, prüfen ist leicht: Deshalb am Ende jeder Rechnung die Probe nicht vergessen!

Aufgabe 2: Wenn eine Differentiagleichung $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ exakt ist, also ein Potential Φ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$ existiert, dann lassen sich die Lösungen besonders einfach finden (M2A): Die Lösungskurven sind die Niveaulinien von Φ. Das ist eine sehr nützliche und weitreichende Technik – und ein sehr guter Grund, warum wir Sie auf Potentiale vorbereitet haben: Sie können damit Differentialgleichungen lösen, die anderweitig nicht lösbar wären. Ist die DG noch nicht exakt, so können Sie versuchen, sie durch einen geeigneten Faktor exakt zu machen (M2B, M2C).

Aufgabe 3: Bei diesem offenen Aufgabentyp sind die möglichen Lösungsmethoden die erste, implizite Frage: Welche Techniken können Sie hier anwenden? Zum Glück haben Sie die Vorbereitung aus den vorigen Aufgaben 1–2. Am Ende jeder Rechnung die Probe nicht vergessen!

Aufgabe 4: Cauchys Existenz- und Eindeutigkeitssatz (M1C) ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Verständnis von Differentialgleichungen: Seine Voraussetzungen sind milde aber wesentlich. Sind sie erfüllt, so können Sie sicher sein, dass es eine Lösung gibt und zwar genau eine. Was nützt das?

Oft ist eine explizite Lösung schwierig oder gar unmöglich. Bevor Sie Lösungsversuche oder numerische Näherungen unternehmen, müssen Sie sicherstellen, dass die Differentialgleichung gut gestellt ist, also das Problem überhaupt eine eindeutige Lösung hat, die Sie approximieren könnten. Die Sorgfalt gebietet daher, das Problem zunächst qualitativ zu lösen, also Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung sicherzustellen, und den Verlauf der Lösung möglichst präzise einzugrenzen. Erst dann können Sie sich getrost der numerischen Näherung zuwenden.

Aufgabe 5: Diese Aufgabe hat eine schöne geometrische Bedeutung. Wir können damit anfangen, aber dann wäre zunächst viel Vorrede nötig. Entscheiden Sie für sich selbst! Wir gehen hier den umgekehrten Weg: Erst die Arbeit, dann das Vergnügen. *Lesen Sie weiter auf Seite 4.*

HAUSÜBUNGEN 7: ODE an die Differentialgleichung

Abzugeben in den Gruppenübungen am 12.–15. Dezember 2017

3 Exactly, my dear Watson, elementary indeed.

Finden Sie die maximale Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$(2\cos(y) + 4x^2) - x\sin(y)y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = \pi/2.$$

Machen Sie die Probe: Ist Ihr Ergebnis wirklich eine Lösung? Warum lässt sich das Definitionsintervall I nicht vergrößern? *Hinweis:* Welche Methoden kennen Sie? Welche sind hier anwendbar?

4 Existenz und Eindeutigkeit: Nicht nichts ohne dich aber nicht dasselbe.

Wir untersuchen folgende Differentialgleichungen mit Anfangwerten:

$$\begin{aligned} (1+x^2)y' + 4xy &= \frac{1}{(1+x^2)^2}, \qquad & y(1) &= 0 \\ y' &= x \cdot \sqrt{1+y}, \qquad & y(1) &= -1 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie die Differentialgleichungen in expliziter Form. Garantiert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (E&E) eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem? Skizzieren Sie für die zweite DG das Richtungsfeld. (Daran sehen Sie qualitativ mögliche Lösungen.)

(b) Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem: Geben Sie entweder die eindeutige Lösung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an oder drei verschiedene Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Rechnen reinigt die Seele... auch vom Irrglauben.)

5 Yea-hah! Der Ritt auf dem Affensattel. Wir untersuchen die implizite Differentialgleichung

$$\frac{3}{2}y^2 - x^2 + 2xyy' = 0.$$

Sie hat eine schöne geometrische Bedeutung, Bilder und Motivation folgen auf der nächsten Seite.

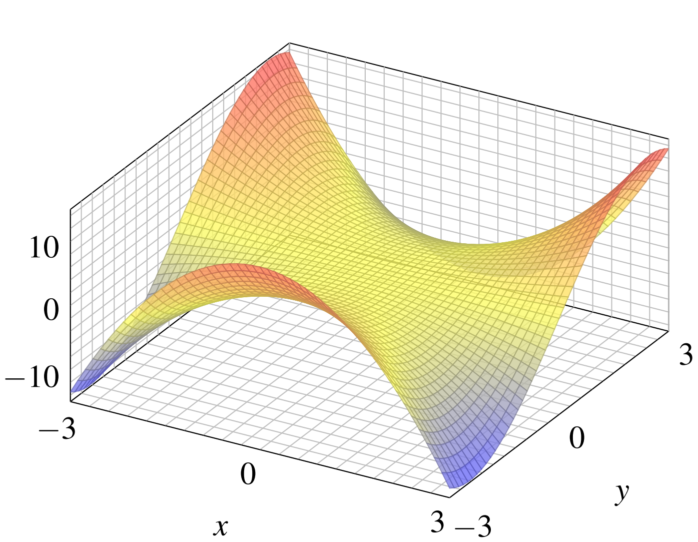
Diese *Gleichung* ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Unsere *Rechnung* zwingt uns zu Fallunterscheidungen, wir müssen dann geeignet einschränken und konzentrieren uns daher auf $x > 0$ und $y < 0$.

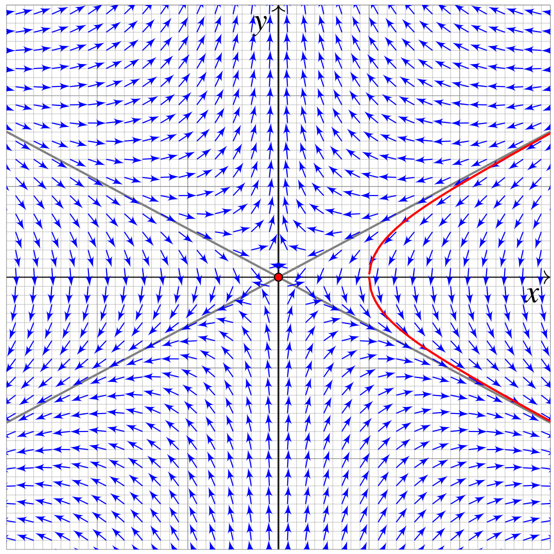
(a) Geben Sie die DG in expliziter Form an. Für welche Startwerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ garantiert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (E&E) eine eindeutige Lösung?

(b) Sind $y_+(x) = \sqrt{2/7} \cdot x$ und $y_-(x) = -\sqrt{2/7} \cdot x$ Lösungen der DG? Warum gilt für jede Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ folgende Schranke: Aus $|y(x_0)| < \sqrt{2/7} \cdot x_0$ für *ein* $x_0 > 0$ folgt $|y(x)| < \sqrt{2/7} \cdot x$ für *alle* $x > 0$ in I, das heißt $y_- < y < y_+$. Wie hilft Ihnen hier der E&E–Satz?

(c) Die DG mit dem Anfangswert $(x_0, y_0) = (4, -\sqrt{889}/14)$ lässt sich explizit und elementar lösen, erstaunlicherweise sogar mit verschiedenen Methoden. Führen Sie mindestens zwei davon aus. Geben Sie das maximale Definitionsintervall an. Zur Auswahl bieten wir Ihnen:

- Integrierender Faktor, ausgehend von der eingangs implizit gegebenen Gleichung,
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (Substitution mit $u = y/x$),
- Bernoulli-Differentialgleichung (Substitution mit $v = y^{1-n}$ mit geeignetem n).





Der Graph der Funktion $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto x^2y-y^3/2$ ist der berühmte **Affensattel**, den Sie aus der HM2 kennen und hier erneut bewundern können. Handelsübliche Sättel sind für Zweibeiner gemacht, ein Affe hingegen hat drei Extremitäten. Sie wollen diese Fläche gerne als 3D-Modell bestaunen? Ihr HM-Team macht es möglich: Pilgern Sie zum Schrein vor Prof. Stroppels Büro. Quizfrage: Welches Tier reitet auf dem Affensattel? (Nein, es ist kein Affe.)

Die Skizze oben zeigt das (normierte negative) Gradientenfeld $g=-\operatorname{grad}F/|\operatorname{grad}F|$. Demnach weist $g(x,y)$ in jedem Punkt $(x,y)\neq(0,0)$ in Richtung des steilsten Abstiegs auf der Fläche. Wir suchen nun Wege entlang des Gradientenfeldes g, also Wege in Richtung des steilsten Abstiegs. Ein naiver Wanderer, der nur lokale Informationen besitzt, wird so den schnellsten Abstieg suchen. (Im Zeitalter der Globalisierung wissen Sie natürlich, dass globale Informationen wichtig sind, insbesondere um noch schneller ab- oder aufzusteigen. Der naive Wanderer weiß davon aber nichts.)

Physikalisch realisieren Sie dies wie folgt: Sie bestreichen die Fläche mit Honig und lassen dann eine kleine Metallkugel hinunterrollen. Der Honig bremst die Kugel so, dass sie nicht beschleunigt, sondern immer brav die Richtung des steilsten Abstiegs sucht (genau wie der naive Wanderer) und entlang g hinunterrollt. Diese Lösungskurve ist in jedem Punkt *senkrecht* zur Niveaulinie von F in diesem Punkt; das ist somit das duale Problem zur exakten Differentialgleichung.

Wir suchen die Lösungskurven $x\mapsto(x,y(x))$, zunächst ohne Berücksichtigung der Richtung. (Auf- und Abstieg entscheidet sich später, am Ende der Saison.) Dies führt sofort zur Differentialgleichung $(1,y')\times\operatorname{grad}F=0$ aus Aufgabe 5: Diese besagt, dass $(1,y')$ und $\operatorname{grad}F$ in dieselbe Richtung zeigen.

In Teil (a) klären Sie als erstes, ob sich Ihre Mühe lohnt, also insbesondere, ob es überhaupt etwas zu berechnen gibt. In Teil (b) grenzen Sie die Lösung ein, dies wird in der weiteren Rechnung (c) genutzt. In Teil (c) schließlich lösen Sie die DG: Viele verschiedene Wege führen zum Ziel.

Das obige Vektorfeld zeigt Ihnen, wie die Lösungen verlaufen. Die Pfeile sind dabei alle von gleicher Länge und zeigen bergab. Für $y'(x)$ lässt man üblicherweise alle Pfeile nach rechts zeigen (warum?), oder lässt die Orientierung einfach ganz weg, das ist ebenso üblich und bequem.

Zusatzaufgabe zum geometrischen Verständnis: In Aufgabe 5 haben Sie die Lösung $x\mapsto y(x)$ der Differentialgleichung mit Anfangswert berechnet. Parametrisieren Sie nun die *gesamte* Kurve entlang des Gradientenfeldes durch den Punkt $(4,-\sqrt{889}/14)$. Haben Sie in Aufgabe 5 schon die maximale Lösung gefunden? Oder war die Beschränkung nur ein Artefakt unserer Willkür? Physikalisch gefragt: Was würde die Kugel tun, auch wenn sie von Ihrer Rechnung gar nichts weiß?