PRÄSENZÜBUNGEN 6: Transform yourself!

Für die Gruppenübungen am 28. November – 1. Dezember 2017

Hinweise zur ersten Scheinklausur: Unsere erste Scheinklausur findet statt am Samstag, den 2. Dezember, von 9 bis 11 Uhr. Nachname A – Li in V53.01, Nachname Lj – Z in V47.01

1 Zeig mir deine Fourier–Koeffizienten, und ich sage dir, wie stetig du bist.

Für $a < 0$ sei $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin(kx)$; diese Reihe konvergiert in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ (Satz B3D).

(a) Ist $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/3} \sin(kx)$ quadrat-integrierbar, das heißt $\|f\|_{L_2} < \infty$? und stetig?

(b) Für welche Exponenten $a < 0$ ist die Funktion f quadrat-integrierbar?

(c) Ist f stetig differenzierbar für $a \in [-1, 0[$? Und für $a \in]-\infty, -2[$?

2 Laplace, voll krraaass!

(a) Berechnen Sie zu $f(t) = \sin^2(t)$ die Laplace–Transformierte $F = \mathscr{L}(f)$ indem Sie

- direkt das Integral ausrechnen (mit zweimaliger partieller Integration),
- oder alternativ geschickt umformen und die $\mathscr{L}$–Tabelle verwenden.

(b) Was ist die Konvergenzabszisse dieser Funktion $f(t) = \sin^2(t)$?

(c) Lösen Sie durch $\mathscr{L}$-Transformation die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -4t$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(d) Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis aus (c) tatsächlich eine Lösung ist.

3 Fourier ableiten ohne ableiden

Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ 1 + x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Erwarten Sie, dass die Fourier–Transformierte $\widehat{f}$ stetig ist? und beschränkt?

(b) Berechnen Sie die Ableitung $g = f'$, hierzu die Fourier–Transformierte $\widehat{g}$ und daraus $\widehat{f}$. Welche Rechenregeln helfen Ihnen hier?

(c) Zum Vergleich ein alternativer Rechenweg: Berechnen Sie $\widehat{f}$ erneut, indem Sie direkt die Definition einsetzen. Ist $\widehat{f}$ stetig? insbesondere in $\xi = 0$?

Motivation zu den Aufgaben

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Nach der Vorlesung fragten Sie mich, was Sie mit der Fourier–Transformation anfangen können. (Seufz) Die Vorlesung hatte gerade das ausgeführt, in beeindruckenden Worten, Bildern und Formeln... War alles vergebens? Nein! Ihr Studium gibt Ihnen die Antworten traditionell *vor* Ihren Fragen. Jetzt ist genau Ihr Moment, sich selbst diese Fragen zu stellen... und auch zu beantworten.

Erste Antwort, aus physikalischer Sicht: Sie wollen ein Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$ zerlegen, etwa Musikdaten oder Messdaten, meist ein Signal plus Rauschen. Die Frequenzanalyse hilft Ihnen, das Signal besser zu verstehen, etwa um es weiter zu bearbeiten, zu filtern, zu glätten, usw.

Zweite Antwort, aus rechnerischer Sicht: Ein Problem können Sie leichter lösen, wenn Sie es in geeigneten Koordinaten betrachten. In der linearen Algebra nutzen Sie Basiswahl und Koordinatenwechsel zur Diagonalisierung: Viele Probleme werden leichter, wenn Sie sie von anderer Seite betrachten, also den Kopf quer legen und neue Koordinaten benutzen. Hier ist es genauso: Die Fourier–Transformation wechselt vom Zeitbereich $x \mapsto f(x)$ zum Frequenzbereich $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ und zurück. Das ist sogar eine Isometrie, also nichts anderes als eine Drehung des Vektorraums $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Die Vorlesung präsentiert hierzu zahlreiche erstaunliche Anwendungsbeispiele: Berechnung von Integralen, Lösung von Differentialgleichungen, isoperimetrisches Problem, usw.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problem}} \arrow[r, "\text{Transformation}"] \arrow[d, dotted, "\text{schwierig}"] & \boxed{\text{vereinfachtes Problem}} \arrow[d, "\text{leichter}"'] \\
\boxed{\text{Lösung}} & \boxed{\text{vereinfachte Lösung}} \arrow[l, "\text{Rücktransformation}"']
\end{tikzcd}$$

Welcher Lösungsweg schwer oder leicht ist, ist manchmal offensichtlich, andermal müssen Sie es ausprobieren. In jedem Falle ist es besser, zwei Wege zu kennen und den effizienteren auszuwählen.

Aufgabe 1: Die Stetigkeit bzw. Glattheit der Funktion f entspricht dem schnellen Abklingen ihrer Fourier–Koeffizienten, also ihres Spektrums $\widehat{f}$. Sie kennen hierzu die Energiegleichung (J2A), das Riemann–Lebesgue–Lemma (I3B), und das Stetigkeitskriterium (I3C). Damit können Sie zu gegebenen Fourier–Koeffizienten die Glattheit prüfen, so wie hier, oder umgekehrt Ihre eigenen Rechenergebnisse auf Plausibilität prüfen. Das nützt oft zur Prognose oder als Überschlagsrechnung.

Aufgabe 2&5: Anwender in Ingenieur- und Naturwissenschaften schätzen die $\mathscr{L}$–Transformation: Umfangreiche $\mathscr{L}$–Tabellen erledigen die meisten Integrale, was bleibt ist meist Routinearbeit wie Partialbruchzerlegung. Die Aufgaben 2c und 5c zur $\mathscr{L}$–Transformation illustrieren das obige Prinzip und das Diagramm: Das transformierte Problem ist leichter zu lösen als das ursprüngliche. Diese Übersetzung gelingt Ihnen anfangs erst holprig, dann immer flüssiger. Erfahrungsgemäß wächst die Liebe zur $\mathscr{L}$–Transformation mit der Häufigkeit ihrer Anwendung. *Fun fact des Tages:* Die Fourier–Transformation ist der Spezialfall der Laplace–Transformation für $s = \mathrm{i}\xi$. Wow, cool!

Aufgabe 3&4: Von Fourier–Reihen kennen Sie die Integrationsregel (I3A) als sehr nützlichen Rechentrick. Bei der Ableitung hingegen müssen Sie vorsichtig sein, wie in der Vorlesung erklärt. Bei der Fourier–Transformation ist es genauso: Die beliebten Ableitungsregeln $\partial_x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi)$ und $x\,f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi)$ vereinfachen viele Rechnungen erheblich. Sie spüren dies deutlich im Vergleich von 3b und 3c. Der zugehörige Satz K2A hat jedoch gewisse Voraussetzungen, milde aber wesentlich: In Aufgabe 4c sehen Sie, dass diese wirklich benötigt werden.

HAUSÜBUNGEN 6: Fourier und Laplace, zwei Freunde fürs Leben

Abzugeben in den Gruppenübungen am 5.–8. Dezember 2017

Diese Woche, am Samstag, den 2. Dezember 2017, schreiben wir unsere erste Scheinklausur. Daher gibt es diesmal nur zwei Aufgaben. Von diesen beiden wird eine korrigiert.

4 Fourier, we've got a problem!

(a) Skizzieren Sie die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x) & \text{falls } -\pi \le x \le \pi, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos(3x) & \text{falls } -\pi < x < \pi, \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } x = \pm\pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier–Transformierten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$.
Sind diese stetig? Bestimmen Sie insbesondere $\widehat{f}(\pm 3)$ und $\widehat{g}(\pm 3)$.

(b) Gilt $f' = 3g$? In welchen Punkten? Gilt $f(x) = f(0) + \int_{t=0}^{x} 3g(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$?
Gilt $g' = -3f$? In welchen Punkten? Gilt $g(x) = g(0) - \int_{t=0}^{x} 3f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(c) Gilt $\mathrm{i}\xi \widehat{f}(\xi) = 3\widehat{g}(\xi)$? Gilt $\mathrm{i}\xi \widehat{g}(\xi) = -3\widehat{f}(\xi)$?
Wo lässt sich die Ableitungsregel (Satz K2A) anwenden, und wo nicht?

(d) Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 \sin^2(\xi\pi)}{(9-\xi^2)^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

5 Parlez-vous Laplace? Voulez-vous transformer avec moi?

(a) Finden Sie (mit möglichst wenig Rechnung) die $\mathscr{L}$–Transformierten von

$$f(t) = \cos(2t), \qquad g(t) = t\sin(2t), \qquad h(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(2t).$$

(b) Nutzen Sie die reelle Partialbruchzerlegung, um folgende Funktionen rückzutransformieren:

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)}, \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+4} \cdot \left(\frac{4s}{s^2+4} - \frac{15}{s-1} - 3s - 1 \right)$$

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y''(t) + 4y(t) = 4\cos(2t) - 15\,\mathrm{e}^t$ mit den Anfangswerten $y(0) = -3$, $y'(0) = -1$ mittels $\mathscr{L}$–Transformation.

(d) Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis aus (c) tatsächlich eine Lösung ist.